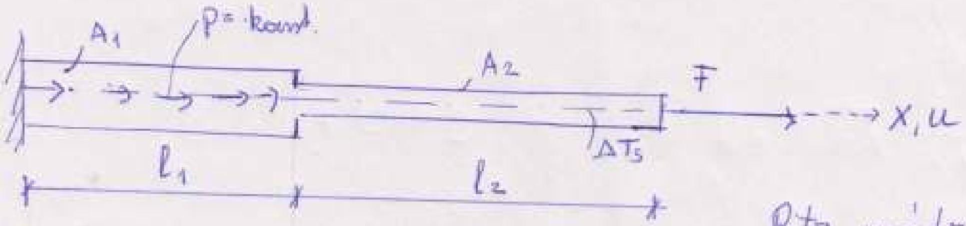
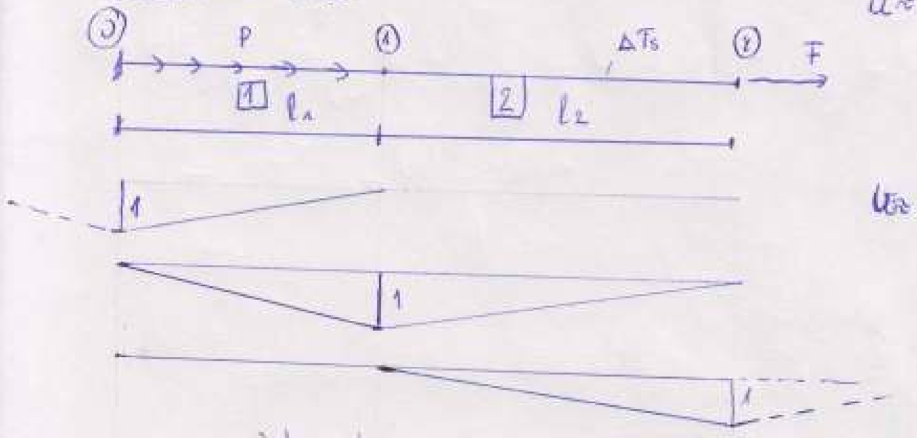
① Ritz-módszer ⟷ Végeselem módszer



Ritz-módszer

$u \approx u_3 = \sum c_i \varphi_i$

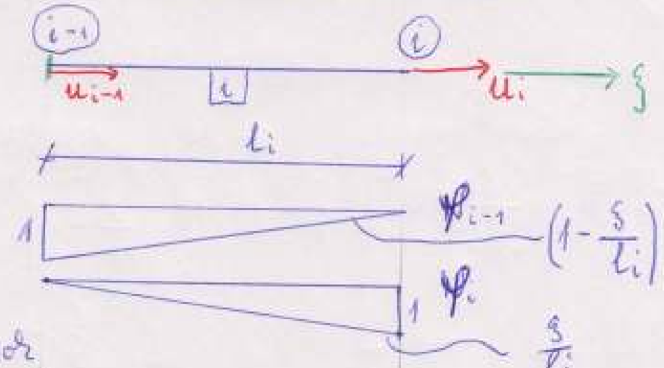
Statikai váz



$$u \approx u_3 = \begin{cases} \varphi_1 \begin{cases} \text{tetsz.}-0 \\ 0-l_1 \end{cases} \\ \varphi_2 \begin{cases} 0-l_1 \\ l_1-l_1+l_2 \end{cases} \\ \varphi_3 \begin{cases} l_1-l_1+l_2 \\ l_1+l_2-\text{tetsz.} \end{cases} \end{cases}$$

átrendezve

i-edik rész (elem)



elmozdulások

$$u(\xi) = u_{i-1}\left(1-\frac{\xi}{l_i}\right) + u_i \frac{\xi}{l_i}$$

(2)

matematikailag: $\Omega \doteq (\phi;\ l_1+l_2)$

peremfeltételek:

- elmozdulási (S_u): $x=0$ -nál $[u] \doteq 0$
- erő (S_σ): $[\sigma] \doteq F$

$\boxed{\text{mechanikai modell:}}$ központosan húzott-nyomott rúd

- geometriai egyenlet $\varepsilon = Lu = \boxed{\dfrac{d}{dx}}\, u(x)$
- anyag egyenlet: lin. rug. anyag

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

elmozdulás fgv.: $u(\xi) = u_{i-1}\cdot\left(1-\dfrac{\xi}{l_i}\right) + u_i\dfrac{\xi}{l_i} =$

egy elemre (i-edik)

$$= \underbrace{\left[1-\frac{\xi}{l_i}\ ;\ \frac{\xi}{l_i}\right]}_{\underline{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{bmatrix}}_{v_e} = \underline{N}\cdot \underline{v_e}$$

Behelyettesítve a geometriai egyenletekbe:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L}\ \underline{u} = \underbrace{(\underline{L}\ \underline{N})}_{\underline{B}}\ \underline{v_e} = \underline{B}\ \underline{v_e}$$

$$\underline{B} = \underline{L}\cdot\underline{N} = \underbrace{\frac{d}{dx}}_{\frac{d}{d\xi}}\left[1-\frac{\xi}{l_i}\ ;\ \frac{\xi}{l_i}\right] = \left[-\frac{1}{l_i}\ ;\ \frac{1}{l_i}\right]$$

Potenciális energia:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int (Lu)^T D (Lu)\, dx - \frac{1}{2}\int (Lu)^T D\cdot \varepsilon_0\, dx - \int u^T p\, dx = \text{stac}!$$

itt $D = EA$

③ egyszerűsített megoldás Ritz-módszerrel $(a_{ij}; b_i)$

$$a_{ij} = \langle R\varphi_i ; R\varphi_i \rangle \qquad b_i = \langle \varphi_i ; p \rangle$$

$$\underline{A} \cdot \underline{c} = \underline{b} \qquad \text{itt } R = \sqrt{EA_i} \frac{d}{dx}$$

Elemenként felírva a potenciális energiát

$$\Pi_e(u) = \frac{1}{2} v_e^T \left(\int \overset{B^T}{(LN)^T} D \overset{B}{(LN)} dx \, v_e - v_e^T \int \overset{B}{(LN)}^T D \cdot \varepsilon_0 \, dx - \right.$$

$$- v_e^T \int (LN)^T p \, dx$$

legyen

$$\underline{K}_e = \int_0^{l_i} B^T D B \, dx = B^T \cdot D B \int_X^{l_i} dx = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_i} \\ \frac{1}{l_i} \end{bmatrix} EA_i \left[-\frac{1}{l_i} \; ; \; \frac{1}{l_i} \right]$$

ennélfogva $\underline{A}$ egy blokkja

$$\underline{K}_e = \frac{EA_i}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

hasonló módon $b_i \to$ elemenként

$$\underline{b}_1 = q_e^{(1)} = \int_0^{l_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{l_1} \\ \frac{\xi}{l_1} \end{bmatrix}}_{N^T} p \cdot d\xi = p \cdot \begin{bmatrix} \xi - \frac{\xi^2}{2l_1} \\ \frac{\xi^2}{2l_1} \end{bmatrix}_0^{l_1} = \begin{bmatrix} p \frac{l_1}{2} \\ p \cdot \frac{l_1}{2} \end{bmatrix}$$

$$b_2 = q_e^{(2)} = \int_0^{l_2} B^T D \cdot \varepsilon_0 \, dx + N_2^T (\xi = l_2) \cdot F =$$

(4)

$$\underline{b}_2 = q_e^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_2} \\ \frac{1}{l_2} \end{bmatrix} EA_2 \cdot \alpha \cdot \Delta T_s \cdot \int_0^{l_2} d\xi + \begin{bmatrix} 1 - \frac{l_2}{l_2} \\ \frac{l_2}{l_2} \end{bmatrix} F =$$

$$= \begin{bmatrix} -EA_2 \cdot \alpha \cdot \Delta T_s \\ EA_2 \cdot \alpha \cdot \Delta T_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA_2 \cdot \alpha \cdot \Delta T_s + \phi \\ EA_2 \cdot \alpha \cdot \Delta T_s \end{bmatrix}$$

Összeállítva a $\underline{A} \cdot \underline{c} = \underline{b}$ egyenletet

$\underline{A}_{3,3} = \underline{K}$, $\underline{b}_3 = \underline{q}_r$

$$\begin{array}{c|ccc|} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & \frac{EA_1}{l_1} & -\frac{EA_1}{l_1} & \\ 1 & -\frac{EA_1}{l_1} & \frac{EA_1}{l_1} + \frac{EA_2}{l_2} & -\frac{EA_2}{l_2} \\ 2 & \phi & -\frac{EA_2}{l_2} & \frac{EA_2}{l_2} \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} u_0 = \phi \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p \cdot l_1}{2} \\ \frac{p l_1}{2} - EA_2 \cdot \Delta T_s \\ EA_2 \Delta T_s + F \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \underline{K} \qquad \underline{c} = \underline{v} \qquad \underline{b} = \underline{q}_r$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA_1}{l_1} + \frac{EA_2}{l_2} & -\frac{EA_2}{l_2} \\ -\frac{EA_2}{l_2} & \frac{EA_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p l_1}{2} - EA_2 \Delta T_s \\ EA_2 \Delta T_s + F \end{bmatrix}$$

⑤ Megoldva $\underline{u}$-ra $\rightarrow$ $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

visszahelyettesítve elemenként elmozdulás $u(\xi) = \underline{N} \cdot \underline{u}_e$

geometriai egyenletbe:

$$\varepsilon(\xi) = \underline{L}\,\underline{u} = \underline{L}\,\underline{N} \cdot \underline{u}_e = \underline{B} \cdot \underline{u}_e$$

anyagegyenletbe

$$\sigma_e(\xi) = D \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) = D\,(\underline{B} \cdot \underline{u}_e - \varepsilon_{0e})$$