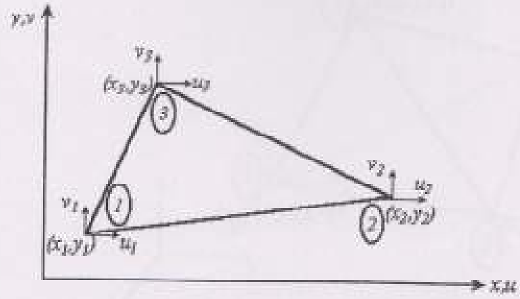
7. Példa: Határozzuk meg a 2D $C^{(0)}$ folytonos elem bázisfüggvényeit a globális koordináták függvényében.



$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & & & \\ & & & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_6 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T\mathbf{a}. \quad \mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{a}.$$

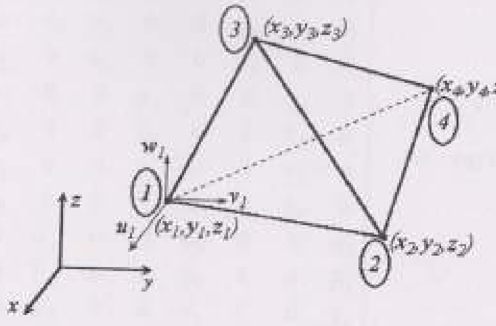
A $\widetilde{\mathbf{B}}$ mátrix inverze:

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix}, \text{ ahol például } \alpha_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 y_3 - x_3 y_2,$$

$\beta_1 = -\begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} = y_2 - y_3$, $\gamma_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} = x_3 - x_2$, $A = 0.5(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, *stb.* A többi elemet az indexek ciklikus váltásával lehet kiszámítani (pl.: $\alpha_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$). A bázisfüggvények mátrixa végül:

$$\mathbf{N} = \mathbf{x}^T\widetilde{\mathbf{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \rightarrow N_i = \frac{1}{2A}(\alpha_i + x\beta_i + y\gamma_i).$$

8. Példa: Határozzuk meg az ábrán látható 3D $C^{(0)}$ tetraéder bázisfüggvényeit.



$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\a_{12}\end{bmatrix}$$

. A $\widetilde{\mathbf{B}}$ mátrix felépítése:

$$\widetilde{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1\\1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{bmatrix}$$

. Az inverz mátrix:

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{-1}=\frac{1}{6V}\begin{bmatrix}
\alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0\\
\beta_1 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & \beta_4 & 0 & 0\\
\gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4 & 0 & 0\\
\delta_1 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 & 0\\
0 & \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0\\
0 & \beta_2 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & \beta_4 & 0\\
0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4 & 0\\
0 & \delta_1 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & \delta_4 & 0\\
0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_4\\
0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & \beta_4\\
0 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4\\
0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & \delta_4
\end{bmatrix}.$$ Az egyes elemek

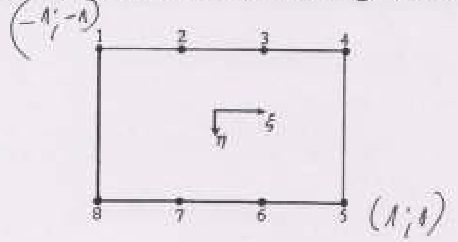
számítása:

$$\alpha_1=\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & y_3\\ x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix},\ \beta_1=-\begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2\\ 1 & y_3 & z_3\\ 1 & y_4 & z_4\end{vmatrix},\ \gamma_1=\begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2\\ 1 & x_3 & z_3\\ 1 & x_4 & z_4\end{vmatrix},\ \delta_1=-\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\\ 1 & x_4 & y_4\end{vmatrix},\ V=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{bmatrix}$$

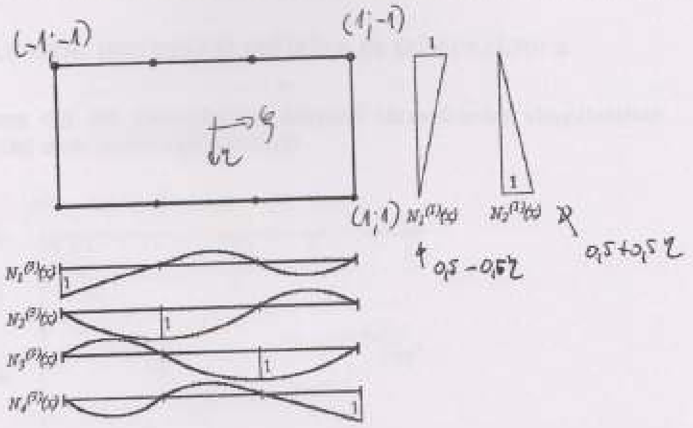
Az összes többit 1,2,3,4 ciklusban ugyanígy lehet számítani. A bázisfüggvények $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{B}}^{-1}$ képlettel számíthatók. A bázisfüggvények mátrixának egy általános eleme:

$$N_i=\frac{\alpha_i+x\beta_i+y\gamma_i+z\delta_i}{6V}.$$

9. Példa: Hogyan lehet az ábrán látható, téglalap alakú ortotróp tárcsaelem bázisfüggvényeit paraméteres koordinátarendszerben meghatározni?



A bázisfüggvények előállításának legegyszerűbb módja, ha az egymásra merőleges irányokhoz tartozó egyváltozós Lagrange-típusú bázisfüggvényeket összeszorozzuk. Az egyváltozós függvények számítását már az előző példákban láttuk.

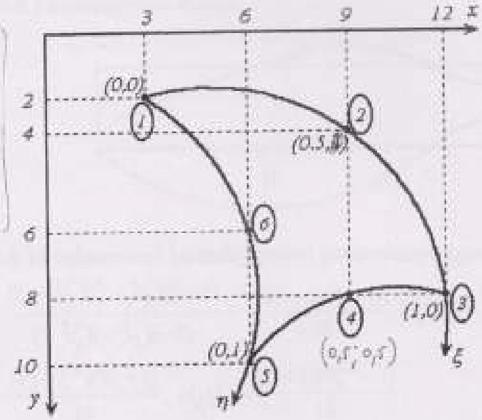


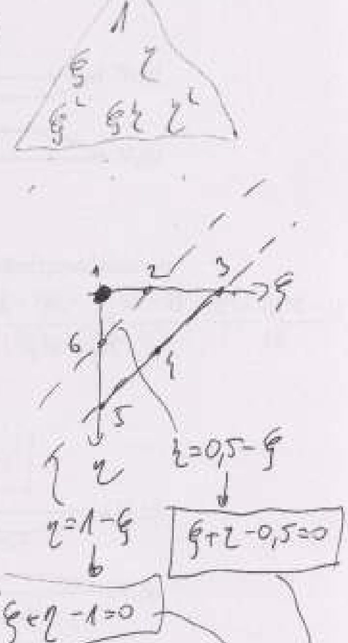
Így például:

$N_1(\xi,\eta)=N_1^{(3)}(\xi)N_1^{(1)}(\eta)$, $N_2(\xi,\eta)=N_2^{(3)}(\xi)N_1^{(1)}(\eta)$, $N_6(\xi,\eta)=N_3^{(3)}(\xi)N_2^{(1)}(\eta)$, stb.

****

3. Példa: Írjuk fel az ábrán látható két koordináta-rendszer kapcsolatát meghatározó összefüggést.





A bázisfüggvények : $N_i(\xi,\eta)=\mathbf{x}^T\mathbf{a}_i=\begin{bmatrix}1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{i1}\\ a_{i2}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{i6}\end{bmatrix}$

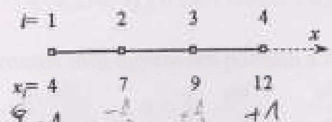
Így a kapcsolati egyenletrendszer (most sorvektorokkal felírva):

$$[x\ \ y]=[N_1\ \ N_2\ \ N_3\ \ N_4\ \ N_5\ \ N_6]\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\\ x_5 & y_5\\ x_6 & y_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2\end{bmatrix}\overline{\mathbf{B}}^{-1}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 9 & 4\\ 12 & 8\\ 9 & 8\\ 6 & 10\\ 6 & 6\end{bmatrix}.$$

Megjegyezzük, hogy az N_i – k közvetlenül is előállíthatók, a két zérusvonal szorzataként.

Például: $N_1=2(\xi+\eta-1)(\xi+\eta-0.5)$, $N_2=-4(\xi+\eta-1)\xi$, stb.

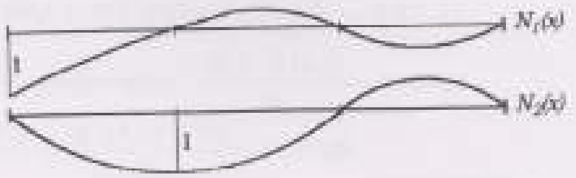
4. Példa: Határozzuk meg az ábrán látható $C^{(0)}$ folytonos négycsomópontú 1D elem bázisfüggvényeit.



Írjuk fel először a Lagrange-polinomként számítható bázisfüggvényeket a globális koordináta-rendszerben.

$$N_1(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}=\frac{(x-7)(x-9)(x-12)}{(-3)(-5)(-8)},\; N_2=\frac{(x-4)(x-9)(x-12)}{3(-2)(-5)},\text{ stb.}$$

Az első két bázisfüggvény alakja:

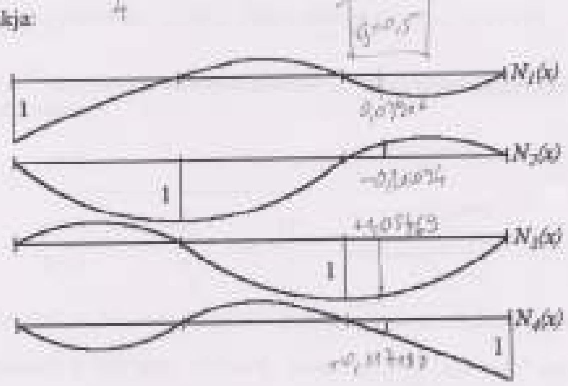


Számítsuk ki valamennyi bázisfüggvényt paraméteres koordinátarendszerben:

$$N_1(\xi)=\frac{(\xi+\frac{1}{3})(\xi-\frac{1}{3})(\xi-1)}{(-\frac{2}{3})(-\frac{4}{3})(-2)}=\frac{(9\xi^2-1)(\xi-1)}{-16},\; N_2(\xi)=\frac{(\xi+1)(\xi-\frac{1}{3})(\xi-1)}{(\frac{2}{3})(-\frac{2}{3})(-\frac{4}{3})}=\frac{(\xi^2-1)(3\xi-1)}{16},$$

$$N_3(\xi)=\frac{9(1-\xi^2)(3\xi+1)}{16},\; N_4(\xi)=\frac{(\xi+1)(9\xi^2-1)}{16}.$$

A függvények alakja:



Határozzuk meg a bázisfüggvények segítségével a $\xi=0.5$ pont koordinátáját:

$$x=\sum_{i=1}^{4}N_i(0.5)x_i=4(\tfrac{9}{4}-1)(-0.5)/(-16)+7\frac{9}{16}(0.25-1)(1.5-1)+9\frac{9}{16}0.75\cdot 2.5+12\cdot 1.5\cdot 1.25/16$$

Következő feladatként tételezzük fel, hogy ismerjük mind a 4 pont tengelyirányú eltolódását: $u_1=0.1\text{m}$, $u_2=0.11\text{m}$, $u_3=0.09\text{m}$, $u_4=0.05\text{m}$.

Számítsuk ki ezek és a bázisfügvények segítségével a $\xi=0.5$ pont eltolódását.

$$u=\sum_{i=1}^{4}N_i(0.5)u_i=$$

$$0.1\cdot 0.03906+0.11\cdot(-0.21094)+0.09\cdot 1.05469+0.05\cdot 0.117188=0.081484\text{m}.$$

Befejezésül határozzuk meg ugyanezen pontban a fajlagos alakváltozás értékét.

$\varepsilon=\frac{du}{dx}\rightarrow\varepsilon(0.5)=\sum_{i=1}^{4}\left.\frac{dN_i}{dx}\right|_{\xi=0.5}\cdot u_i=\sum_{i=1}^{4}\left.\frac{dN_i}{d\xi}\right|_{\xi=0.5}\cdot\left.\frac{d\xi}{dx}\right|_{\xi=0.5}u_i$. A láncszabály szerinti deriválás miatt szükségünk van a Jacobi-mátrix inverzére is. A Jacobi-mátrix definíciója:

$$\underset{\sim}{J}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}\qquad \underset{\sim}{J}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x}\\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{bmatrix}$$ → 2 [illegible]!

$x = \sum N_i(\xi) \cdot x_i$

$\mathbf{J} = \dfrac{dx}{d\xi} = \sum_{i=1}^{4} \dfrac{dN_i}{d\xi} x_i$, ahol

$\dfrac{dN_1}{d\xi} = \dfrac{18\xi(\xi-1)+(9\xi^2-1)}{-16}$, ami a $\xi = 0.5$ helyen: $\dfrac{-9/2+9/4-1}{-16} = 0.203125$.

$\dfrac{dN_2}{d\xi} = \dfrac{9(2\xi(3\xi-1)+3(\xi^2-1))}{16}$, behelyettesítve: $\dfrac{9(0.5-0.75\cdot 3)}{16} = -0.984375$.

$\dfrac{dN_3}{d\xi} = \dfrac{9(-2\xi(3\xi+1)+3(1-\xi^2))}{16} \rightarrow \dfrac{9(-2.5+3\cdot 0.75)}{16} = -0.140625$.

$\dfrac{dN_4}{d\xi} = \dfrac{9\xi^2-1+(\xi+1)18\xi}{16} \rightarrow \dfrac{9/4-1+1.5\cdot 9}{16} = 0.921875$.

Ellenőrzésképpen összeadva a kapott négy számot, összegüknek nullát kell adnia. Maga a keresett Jacobi-mátrix:

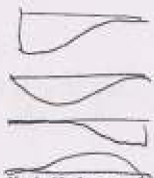
$\mathbf{J}(0.5) = 4\cdot 0.203 - 7\cdot 0.9843 - 9\cdot 0.1406 + 12\cdot 0.9218 = 4.640625$. Ennek „inverze":

$\mathbf{J}^{-1}(0.5) = 0.2154882$. Ennek ismeretében most már számítható a keresett alakváltozás:

$\varepsilon(0.5) = 0.2154882(0.1\cdot 0.203 - 0.11\cdot 0.9843 - 0.09\cdot 0.1406 + 0.05\cdot 0.9218) = -0.01175$.

5. Példa: Határozzuk meg a $C^{(1)}$-folytonos, kétcsomópontú 1D elem bázisfüggvényeit paraméteres koordinátarendszerben.

$i=$	1		2
$x_i=$	4	8	12
$\xi_i=$	-1	0	1



Számítsuk ki először a Jacobi-mátrixot és annak inverzét. A koordináták közötti kapcsolat:

$x = \sum_{i=1}^{2} N_i(\xi) x_i$, de most közvetlenül is felírható: $x = 8 + 4\xi$. Innen: $\mathbf{J} = \left[\dfrac{dx}{d\xi}\right] = 4 \rightarrow \mathbf{J}^{-1} = 0.25$.

Most már hozzáláthatunk a bázisfüggvények meghatározásához:

$N_j(\xi) = [1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3]\mathbf{a}_j$, $\dfrac{dN_j}{dx} = \dfrac{dN_j}{d\xi}\dfrac{d\xi}{dx} = [0 \quad 1 \quad 2\xi \quad 3\xi^2]\mathbf{a}_j 0.25$. A $\widetilde{\mathbf{B}}$ mátrix:

$N = \tilde{B}a$
$x^T \tilde{B}^{-1}$

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0.25 & -0.5 & 0.75 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 \end{bmatrix} \rightarrow \widetilde{\mathbf{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 & -1 \\ -0.75 & -1 & 0.75 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0.25 & 1 & -0.25 & 1 \end{bmatrix}$$

A keresett függvények:

$N_1(\xi) = 0.5 - 0.75\xi + 0.25\xi^3$, $N_2(\xi) = 1 - \xi - \xi^2 + \xi^3$, $N_3(\xi) = 0.5 + 0.75\xi - 0.25\xi^3$,

$N_4(\xi) = -1 - \xi + \xi^2 + \xi^3$.

Ha például ismerjük a csomóponti elmozdulásokat, akkor tetszőleges helyen számíthatók a mozgások. Határozzuk meg például a középső pont eltolódását.

Adott $v_1 = 0.1\text{m}$, $\varphi_1 = 0.01$, $v_2 = -0.1\text{m}$, $\varphi_2 = 0.02$.

$v(0) = \sum_{i=1}^{4} p_i N_i(0) = 0.1\dfrac{1}{2} + 0.01\cdot 1 - 0.1\dfrac{1}{2} + 0.02(-1) = -0.01\text{m}$.