Interpolációk alkalmazása a végeselemes számításokban

A végeselem módszer egyik nagyon fontos eleme a polinommal való közelítés. Ezek használatával tudjuk a rácspontokon adott értékekből kiszámítani valamely közbenső pont értékeit. Alapvetően kétfajta módszer használatos. :

1. Lagrange-féle interpoláció;
2. Hermite-féle interpoláció.

Lagrange-féle interpoláció

A Lagrange-féle interpoláció során a feladat egy olyan n-ed fokú polinom előállítása, amely az előre ismert n+1 pont (x_i;y_i) esetén a polinom értéke az x_i helyen pontosan y_i . ($P_n(x_i) = y_i$). Az így megadott görbét az un. Lagrange interpolációs polinomok felhasználásával tudjuk előállítani, azaz

$$P_n(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \, L_i(x); \qquad (1)$$

ahol az i-edik Lagrange-polinom

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots.(x_i-x_{n+1})} \qquad (2.\ a)$$

Bevezetve $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n+1})$ az alappolinom számítható

$L_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega\prime(x_i)}$ képlettel is. (2.b)

Tulajdonsága

$$L_i(x) = \begin{cases} 0; & ha\ x = x_j;\ j = 1,2, \ldots , i - 1, i + 1, \ldots , n + 1 \\ 1; & ha\ x = x_i \end{cases} \qquad (3)$$

Pl.: Illesszünk interpolácios polinomot az

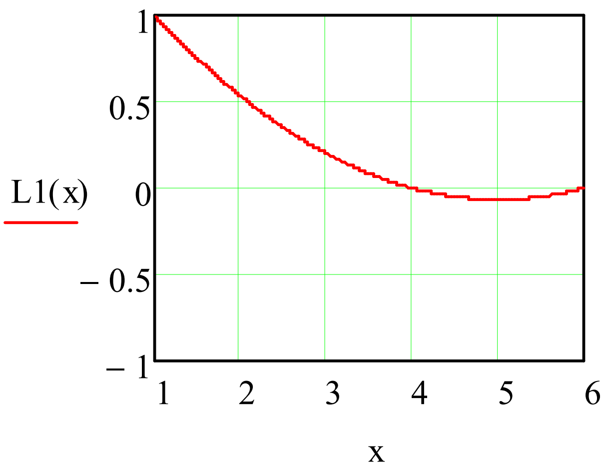
x	1	4	6
y	4	7	2

pontokra.

A megadott 3 pontra egy max. másodfokú polinomot tudunk illeszteni.

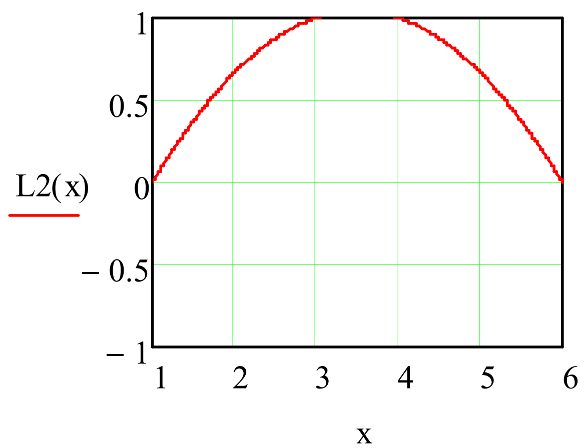
A Lagrange-féle alappolinomok:

$$L_1(x) = \frac{(x-4)(x-6)}{(1-4)(1-6)} = \frac{x^2-10x+24}{15}; \qquad (4)$$



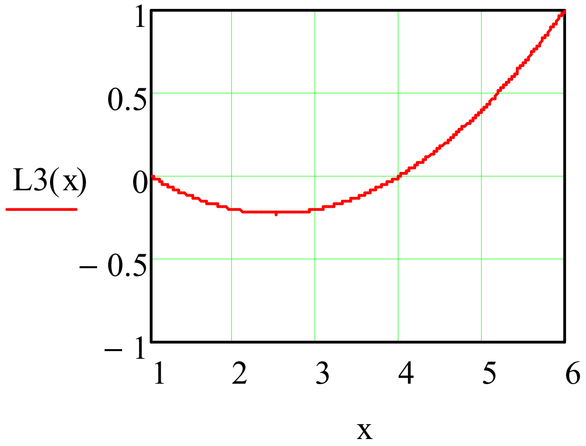
1. ábra Az $L_1(x)$ alappolinom ábrázolása (látható, hogy értéke 1 az x=1 helyen, míg a 4 és 6 helyeken zérus az érték)

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-6)}{(4-1)(4-6)} = \frac{x^2-7x+6}{-6}; \qquad (5)$$



2. ábra Az $L_2(x)$ alappolinom ábrázolása (látható, hogy értéke 1 az x=4 helyen, míg a 1 és 6 helyeken zérus az érték)

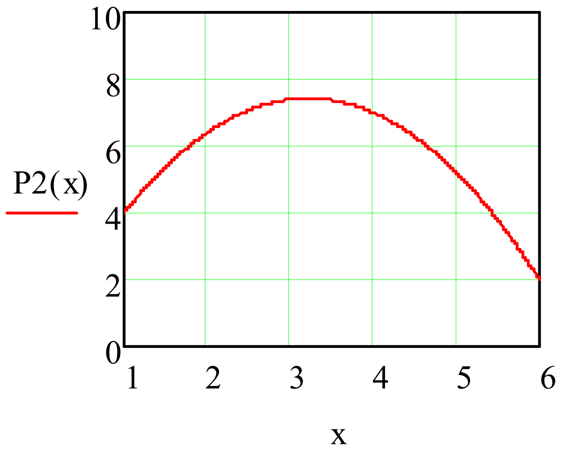
$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(6-1)(6-4)} = \frac{x^2-5x+4}{10}$; (6)



3. ábra Az $L_3(x)$ alappolinom ábrázolása (látható, hogy értéke 1 az x=6 helyen, míg a 1 és 4 helyeken zérus az érték)

Ennélfogva az interpolációs polinom:

$P_2(x) = 4\frac{x^2-10x+24}{15} + 7\,\frac{x^2-7x+6}{-6} + 2\,\frac{x^2-5x+4}{10}$. (7)



4 ábra A Lagrange-féle $P_2(x)$ polinom ábrázolása

Amennyiben ki kívánjuk számolni az x=3 helyen a közelítő értéket, akkor a $P_2(x)$ polinomba (7. egyenlet) be kell helyettesíteni az x=3 értéket.

$$P_2(x=3) = 4\frac{3^2-10x+24}{15} + 7\,\frac{x^2-7x+6}{-6} + 2\,\frac{x^2-5x+4}{10} = 7.4$$

Hermite-féle interpoláció

Amennyiben az adott pontokon nemcsak a függvény érték adott, hanem a deriváltak is ismertek, akkor a közelítő függvény meghatározásához a Hermite-féle interpolációt alkalmazhatjuk. Tehát keressük azt a legfeljebb 2n-1 fokú polinomot, amelynek értéke az $x_1, x_2, \dots, x_n$ helyeken $H(x_i) = y_i$ és $H'(x_i) = y_i'$.

A fenti feladatnak eleget tevő polinom egyértelműen meghatározható a Hermite-féle interpolációs polinomok felhasználásával. A Hermite-féle interpolációs polinomot is alappolinomok segítségével állítjuk elő, hasonlóan a Lagrange-féle interpolációhoz. Kétféle alappolinomot használunk.

A $h_{i,0}(x)$ alappolinom az x_i hely kivételével 0 értéket vesz fel, az x_i helyen 1 az értéke, a deriváltja pedig minden alappontban 0.

A $h_{i,1}(x)$ alappolinom értéke minden alappontban 0, deriváltja pedig az x_i helyen 1, míg a többi helyen 0.

Így:

$$h_{i,0}(x) = \begin{cases} 0; \ ha \ x = x_{j;} \, j = 1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n; \\ 1; \ ha \ x = x_i \end{cases} \quad . \tag{8.a}$$

$$h'_{i,0}(x) = 0; \ ha \ i = 1,2,\dots,n \tag{8.b}$$

és

$$h_{i,1}(x) = 0; \ ha \ i = 1,2,\dots,n \ . \tag{8.c}$$

$$h'_{i,1}(x) = \begin{cases} 0; \ ha \ x = x_{j;} \, j = 1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n \\ 1; \ ha \ x = x_i \ . \end{cases} \tag{8.d}$$

Az alappolinomok segítségével állítjuk elő a Hermite-féle interpolációs polinomot:

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i h_{i,0}(x) + \sum_{i=1}^{n} y'_i h_{i,1}(x) \tag{9}$$

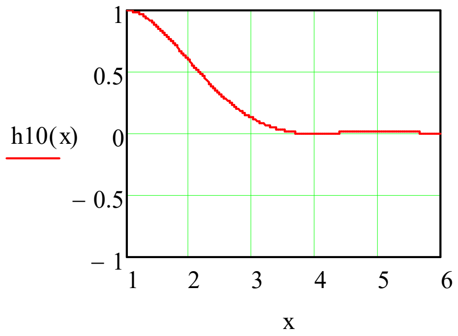
ahol a $h_{i,0}(x)$ és $h_{i,1}(x)$ alappolinomokat a Lagrange-féle interpolációs alappolinomok segítségével állíthatjuk elő. Jelölje $\omega(x) \ a \ (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) \ szorzatot.$

$$h_{i,0}(x) = \left(\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}\right)^2 \left[1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(x-x_i)\right] = \left(L_i(x)\right)^2 \left[1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(x-x_i)\right].$$

$h_{i,1}(x) = \left(\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}\right)^2 (x-x_i) = \left(L_i(x)\right)^2 (x-x_i);$

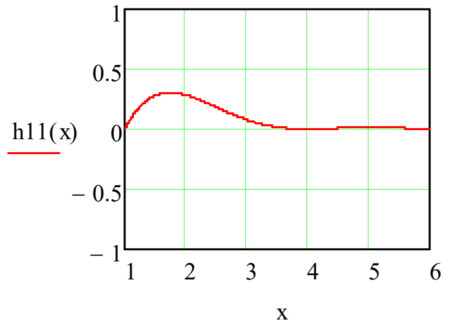
Az előbbi példában megadott három ponthoz tartozó Hermite-féle alappolinomok:

$$h_{1,0}(x) = \frac{(x-4)^2(x-6)^2(16 * \frac{x}{15} - \frac{1}{15})}{225}$$



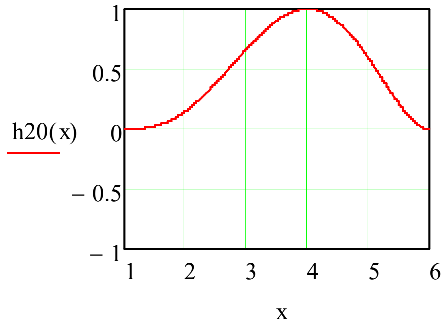
5 ábra Az $h_{1,0}(x)$ alappolinom ábrázolása (látható, hogy értéke 1 az x=1 helyen, míg a 4 és 6 helyeken zérus az érték, míg a deriváltak az x=1, 4 és 6 helyeken zérusok.)

$$h_{1,1}(x) = \frac{(x-4)^2(x-6)^2(x-1)}{225}$$



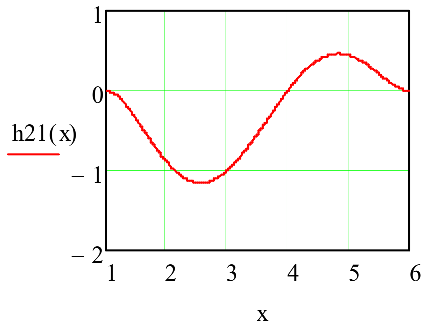
6 ábra Az $h_{1,1}(x)$ alappolinom ábrázolása (látható, hogy értéke 0 az x=1, 4 és 6 helyeken , míg a derivált az x=1 helyen 1 a 4 és 6 helyeken zérus.)

$$h_{2,0}(x) = \frac{(x-1)^2(x-6)^2(\frac{x}{3} - \frac{1}{3})}{36}$$



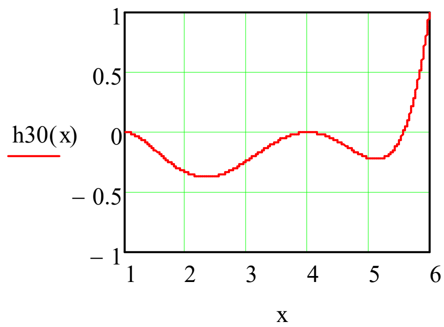
7 ábra Az $h_{2,0}(x)$ alappolinom ábrázolása (látható, hogy értéke 1 az x=4 helyen, míg a 1 és 6 helyeken zérus az érték, míg a deriváltak az x=1, 4 és 6 helyeken pedig zérusok.)

$$h_{2,1}(x) = \frac{(x-1)^2(x-6)^2(x-4)}{36}$$



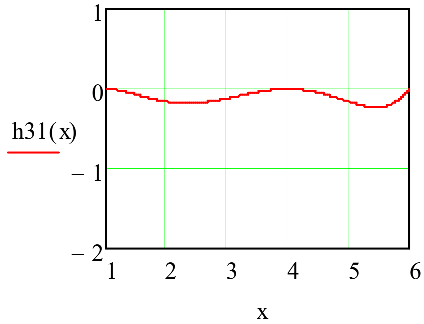
8 ábra Az $h_{2,1}(x)$ alappolinom ábrázolása (látható, hogy értéke 0 az x=1, 4 és 6 helyeken , míg a derivált az x=4 helyen 1 az 1 és 6 helyeken pedig zérus.)

$$h_{3,0}(x) = \frac{(x-1)^2(x-4)^2(\frac{7*x}{3} - 13)}{100}$$



9 ábra Az $h_{3,0}(x)$ alappolinom ábrázolása (látható, hogy értéke 1 az x=6 helyen, míg a 1 és 4 helyeken zérus az érték, míg a deriváltak az x=1, 4 és 6 helyeken zérusok.)

$$h_{3,1}(x) = \frac{(x-1)^2(x-4)^2(x-6)}{100}$$



10 ábra Az $h_{3,1}(x)$ alappolinom ábrázolása (látható, hogy értéke 0 az x=1, 4 és 6 helyeken , míg a derivált az x=6 helyen 1 az 1 és 4 helyeken zérus.)

A mechanikai számításokban a ezt a fajta közelítést az alábbi feladat megoldására használhatjuk: Adott egy három csomóponttal meghatározott gerenda, ahol az

x=1 helyen az eltolódás értéke 0,3 az elfordulásé 0,001;

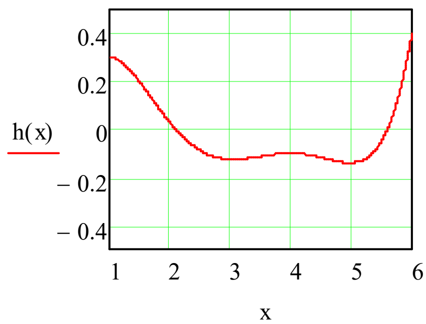
x=4 helyen az eltolódás értéke -0,1 az elfordulásé -0,001;

x=6 helyen az eltolódás értéke 0,4 az elfordulásé 0,009.

Határozzuk meg az eltolódásfüggvényt és az értéket az x=5 helyen.

Megoldás:

H(x)= $0.3\cdot h10(x) + 0.001\cdot h11(x) - 0.1\cdot h20(x) - 0.001\cdot h21(x) + 0.4\cdot h30(x) + 0.009\cdot h31(x)$



H(5)=-0,139

Bázisfüggvények

Az előbbiekben bemutatott interpolációs polinomokat használjuk a végeselem módszer bázisfüggvényeinek (alakfüggvényeinek) felírásához. A bázisfüggvényeket kettős céllal használjuk:

- velük írjuk le a lokális és globális koordinátarendszerek kapcsolatát

$$[x\ y\ z] = [N_1 \quad N_2 \ldots N_n] \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ & \vdots & \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

  itt n a csomópontok számát, $N_1 \quad N_2 \ldots N_n$ a lokális koordinátákkal megadott bázisfüggvényeket, míg x, y és a globális koordinátákat jelenti.

- Felhasználjuk az ismeretlen (pl. elmozdulás-) függvényeknek a csomóponti értékekből (pl. csomóponti értékekből) való interpolálására. A következő képletet az elem elmozdulási függvényeinek kiszámítására használjuk:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & . & & & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & & . & & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & & & . & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

A közelítés pontossága

A végeselemes számítások másik kritikus része, hogy a közelítő számítással kapott eredmények mennyire pontosak. Felmerül a kérdés, hogy növelhető-e a pontosság a diszkretizáció mértékének növelésével. Erre a kérdéskörre reagálunk röviden ebben a részben az irodalmi tapasztalatok alapján [1].

Az interpolációs fejezetben láthattuk, hogy a pontosságot befolyásolja, hogy a közelítés hányadfokú polinomokkal történik. Ezt az eljárást (**polinomok fokszámától függő**t) **p-módszernek** nevezik. A pontosság növelésének másik módja a **hálózat sűrűségének** (ez által a csomópontok számát növeljük) változtatásával. Ezt nevezik **h-módszernek**. Ezt a mennyiségi növelést azonban jelentősen befolyásolja a számítógépünk kapacitása. Meg kell jegyezni, hogy ez a mennyiségi növelés nem mindig célravezető. A hibacsökkentés történhet az **elemszám növelésével (elem méretének csökkentésével) és a közelítő polinomok fokszámának egyidejű növelésé**vel. Ez a **hp-módszer**. Továbbá ismert az un. **r-módszer**, amely a **kritikus helyeken növeli az elemszámot (sűríti a hálót), míg más helyeken (kevésbé érzékeny) csökkenti az elemszámot**.

[1] Bojtár I, Gáspár Zs.: Végeselemmódszer építőmérnököknek, Terc Kiadó, 2003