Kiegyenlítő számítások: Robusztus kiegyenlítés

Barsi Árpád

A használat előfeltételei

- Legyenek fölös mérések
- Legyen ismert a súlyozás (súlymátrix, súlykoefficiens mátrix…)
- Ne legyen durva hibával terhelt mérés
- A funkcionális modell függvénye legyen lineáris (vagy linearizálható)

Az alapelvek

- $M(\xi_i) = M(L_i)$ becslésére vezessük be: U_i **kiegyenlített érték**
- Ennek felhasználásával a **javítás**: $v_i = U_i - L_i$
- A cél: $\sum p_i v_i^2 = \min$ vagy $\sum v_i^2 = \min$
- Gauss jelölésével: $[pvv] = \min$

- Általános megfogalmazásban: $\boxed{\mathbf{v}^T \mathbf{P}_{LL} \mathbf{v} = \min}$
- Ehhez még a **súlyegység középhibája**

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{c^2}\mathbf{C} \qquad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{c}^2 = m_0^2 = f^{-1}\mathbf{v}^T \mathbf{P}_{LL} \mathbf{v}$$

Korábbi óráról…

Kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel – „Recept”

1. Előzetes paraméterértékek
2. Lineáris vagy linearizált közvetítő egyenletek felírása
3. Javítási egyenletek felírása
4. Súlymátrix felvétele
5. Normálegyenlet felírása
6. A normálegyenlet megoldása
7. Paraméterek, javítások, kiegyenlített mérési eredmények számítása
8. Iteráció?
9. Pontossági mérőszámok levezetése

Kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel

- Az alapvető összefüggések

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{U}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{X}} \qquad \underset{(r,1)}{\mathbf{X}} = \underset{(r,1)}{\mathbf{X_0}} + \underset{(r,1)}{\mathbf{x}}$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{U}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{L}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} \qquad \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}$$

- A számításnál a cél

$$\underset{(1,n)}{\mathbf{v}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \min$$

- Tehát **optimalizálunk**!
- Ez az ún. L_2-norma alapján számított optimum.

A legkisebb négyzetek módszere szerinti optimalizálás

- Adatok
  - Mérési eredmények $\underset{(n,1)}{\mathbf{L}}$
- Kényszerek (Figyelem! Más szóhasználat! Nem kényszerfeltétel!)
  - A feladatból adódóan meghatározzuk

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{U}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{X}} \qquad \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \qquad \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}$$

  - Ezután még felírható

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}$$

- Célfüggvény

$$\underset{(1,n)}{\mathbf{v}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \min$$

Mik a változók, amiket keresünk?

A (többváltozós) optimalizálás

- Kényszerek
  - Egyenletek, egyenletrendszer
  - Egyenlőtlenség, egyenlőtlenség rendszer
  - Alsó- vagy felső korlátok
- Célfüggvény
  - Maga a függvény
  - Minimum vagy maximum?
- Megoldó
  - Lineáris programozás
  - Kvadratikus programozás
  - …

Az L_1 norma alapján végzett kiegyenlítés

- Az alapösszefüggések alapján felírt

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}$$

- Átrendezve

$$\underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{0}}$$

- Meghatározandó

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}}, \underset{(r,1)}{\mathbf{x}}$$

- Célfüggvény

$$\sum_i |v_i| = \min$$

Az L_1 norma alapján végzett kiegyenlítés

- A változók átalakítása szükséges, hogy (a lineáris programozás szerint) nemnegatív számok különbségeként legyenek

$$x_j = x_j^+ - x_j^- \quad ahol\ j = 1,2,\ldots,r \qquad \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \underset{(r,1)}{\mathbf{x}^+} - \underset{(r,1)}{\mathbf{x}^-}$$

$$v_i = v_i^+ - v_i^- \quad ahol\ i = 1,2,\ldots,n \qquad \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{v}^+} - \underset{(n,1)}{\mathbf{v}^-}$$

- A célfüggvény átalakításával felírható

$$\underset{(1,n)}{\mathbf{e}}\ \underset{(n,1)}{\mathbf{v}^+} - \underset{(1,n)}{\mathbf{e}}\ \underset{(n,1)}{\mathbf{v}^-} = \min$$

- ahol

$$\underset{(1,n)}{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Az L_1 norma alapján végzett kiegyenlítés

- Súlyozással a teljes felírható feladat kényszerei

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,r)}{\mathbf{A}}\cdot\underset{(r,1)}{\mathbf{x}^{+}}-\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,r)}{\mathbf{A}}\cdot\underset{(r,1)}{\mathbf{x}^{-}}-\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,1)}{\mathbf{v}^{+}}+\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,1)}{\mathbf{v}^{-}}-\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,1)}{\mathbf{l}}=\underset{(n,1)}{\mathbf{0}}$$

$$\underset{(n,r)}{\mathbf{A}}\cdot\underset{(r,1)}{\mathbf{x}}-\underset{(n,1)}{\mathbf{l}}-\underset{(n,1)}{\mathbf{v}}=\underset{(n,1)}{\mathbf{0}}$$

$$\underset{(r,1)}{\mathbf{x}^{+}}\geq\underset{(r,1)}{\mathbf{0}}\qquad\underset{(r,1)}{\mathbf{x}^{-}}\geq\underset{(r,1)}{\mathbf{0}}\qquad\underset{(n,1)}{\mathbf{v}^{+}}\geq\underset{(n,1)}{\mathbf{0}}\qquad\underset{(n,1)}{\mathbf{v}^{-}}\geq\underset{(n,1)}{\mathbf{0}}$$

- A súlyozással felírható célfüggvény

$$\underset{(1,n)}{\mathbf{e}}\,\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,1)}{\mathbf{v}^{+}}-\underset{(1,n)}{\mathbf{e}}\,\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,1)}{\mathbf{v}^{-}}=\min$$

$$\underset{(1,n)}{\mathbf{e}}\,\underset{(n,1)}{\mathbf{v}^{+}}-\underset{(1,n)}{\mathbf{e}}\,\underset{(n,1)}{\mathbf{v}^{-}}=\min$$

Az L_1 norma alapján végzett kiegyenlítés

- A feladat befejezése

$$\underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \underset{(r,1)}{\mathbf{x}^+} - \underset{(r,1)}{\mathbf{x}^-} \qquad \underset{(r,1)}{\mathbf{X}} = \underset{(r,1)}{\mathbf{X_0}} + \underset{(r,1)}{\mathbf{x}}$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{v}^+} - \underset{(n,1)}{\mathbf{v}^-} \qquad \underset{(n,1)}{\mathbf{U}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{L}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{v}}$$

- Iteráció?

- Pontossági mérőszámok?

Példa!

Az L_∞ norma alapján végzett kiegyenlítés

- Az alapösszefüggések alapján felírt

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}$$

- A javításoknál igaznak kell lenni

$$|v_i| \le v \quad ahol\ i = 1,2,\ldots,n$$

- Meghatározandó

$$v,\ \underset{(r,1)}{\mathbf{x}}$$

- A célfüggvény

$$v = \min$$

- (alternatív név ezért minimax-módszer)

Az L_∞ norma alapján végzett kiegyenlítés

- A lineáris programozás érdekében

$$v - v_i^+ \geq 0 \quad ahol\ i = 1,2,\ldots,n$$

$$v + v_i^- \geq 0 \quad ahol\ i = 1,2,\ldots,n$$

- Az alapösszefüggés

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}$$

- Átrendezve (részletes levezetés nélkül)

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} - \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \geq \underset{(n,1)}{\mathbf{0}} \qquad \underset{(1,n)}{\mathbf{v}^T} = \begin{bmatrix} v & v & \ldots & v \end{bmatrix}$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} + \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \geq \underset{(n,1)}{\mathbf{0}}$$

Az L_∞ norma alapján végzett kiegyenlítés

- Súlyozással a teljes felírható feladat kényszerei

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} - \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \geq \underset{(n,1)}{\mathbf{0}}$$

$$\underset{(1,n)}{\mathbf{v}^T} = \begin{bmatrix} v & v & \dots & v \end{bmatrix}$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} + \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \geq \underset{(n,1)}{\mathbf{0}}$$

$$\underset{(r,1)}{\mathbf{x}} \geq \underset{(r,1)}{\mathbf{0}}$$

- A súlyozással felírható célfüggvény

$$v = \min$$

Az L_∞ norma alapján végzett kiegyenlítés

- A feladat befejezése

$$\underset{(r,1)}{\mathbf{X}} = \underset{(r,1)}{\mathbf{X_0}} + \underset{(r,1)}{\mathbf{x}}$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{U}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{L}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{v}}$$

- Iteráció?

- Pontossági mérőszámok?

Példa!

Tudósaink

- Torben Krarup (1919-2005)
  - Koppenhága

- Kurt Kubik ()
  - Aalborg, majd Queensland

- Cikk: „Götterdämmerung Over Least Squares Adjustment” (1980) $\rightarrow$ robusztus becslés és kiegyenlítés, dán módszer

Köszönöm a figyelmet!