

Kiegyenlítő számítások: Robusztus kiegyenlítés

Barsi Árpád



A használat előfeltételei

- Legyenek fölös mérések
- Legyen ismert a súlyozás (súlymátrix, súlykoefficiens mátrix...)
- Ne legyen durva hibával terhelt mérés
- A funkcionális modell függvénye legyen lineáris (vagy linearizálható)

Korábbi óráról...

Az alapelvek

- $M(\xi_i) = M(L_i)$ becslésére vezessük be: U_i **kiegyenlített érték**
- Ennek felhasználásával a **javítás**: $v_i = U_i - L_i$
- A cél: $\sum p_i v_i^2 = \min$ vagy $\sum v_i^2 = \min$
- Gauss jelölésével: $[pvv] = \min$
- Általános megfogalmazásban: $\mathbf{v}^T \mathbf{P}_{LL} \mathbf{v} = \min$
- Ehhez még a **súlyegység középhibája**

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{c^2} \mathbf{C} \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} \quad \longrightarrow \quad \bar{c}^2 = m_0^2 = f^{-1} \mathbf{v}^T \mathbf{P}_{LL} \mathbf{v}$$

Kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel – „Recept”

1. Előzetes paraméterértékek
2. Lineáris vagy linearizált közvetítő egyenletek felírása
3. Javítási egyenletek felírása
4. Súlymátrix felvétele
5. Normálegyenlet felírása
6. A normálegyenlet megoldása
7. Paraméterek, javítások, kiegyenlített mérési eredmények számítása
8. Iteráció?
9. Pontossági mérőszámok levezetése

Kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel

- Az alapvető összefüggések

$$\mathbf{U}_{(n,1)} = \mathbf{A}_{(n,r)} \cdot \mathbf{X}_{(r,1)} \quad \mathbf{X}_{(r,1)} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{x}_{(r,1)}$$

$$\mathbf{U}_{(n,1)} = \mathbf{L}_{(n,1)} + \mathbf{v}_{(n,1)} \quad \mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{A}_{(n,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)} - \mathbf{l}_{(n,1)}$$

- A számításnál a cél

$$\mathbf{v}_{(1,n)}^T \mathbf{P}_{LL(n,n)} \mathbf{v}_{(n,1)} = \min$$

- Tehát **optimalizálunk!**
- Ez az ún. L_2 -norma alapján számított optimum.

A legkisebb négyzetek módszere szerinti optimalizálás

- Adatok

- Mérési eredmények $\mathbf{L}_{(n,1)}$

- Kényszerek (Figyelem! Más szóhasználat! Nem kényszerfeltétel!)

- A feladatból adódóan meghatározzuk

$$\mathbf{U}_{(n,1)} = \mathbf{A}_{(n,r)} \cdot \mathbf{X}_{(r,1)}$$

$$\mathbf{P}_{LL_{(n,n)}}$$

$$\mathbf{l}_{(n,1)}$$

- Ezután még felírható

$$\mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{A}_{(n,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)} - \mathbf{l}_{(n,1)}$$

- Célfüggvény

$$\mathbf{v}_{(1,n)}^T \mathbf{P}_{LL_{(n,n)}} \mathbf{v}_{(n,1)} = \min$$

Mik a változók, amiket keresünk?

A (többváltozós) optimalizálás

- Kényszerek
 - Egyenletek, egyenletrendszer
 - Egyenlőtlenség, egyenlőtlenség rendszer
 - Alsó- vagy felső korlátok
- Célfüggvény
 - Maga a függvény
 - Minimum vagy maximum?
- Megoldó
 - Lineáris programozás
 - Kvadratikusan programozás
 - ...

Az L_1 norma alapján végzett kiegyenlítés

- Az alapösszefüggések alapján felírt

$$\mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{A}_{(n,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)} - \mathbf{l}_{(n,1)}$$

- Átrendezve

$$\mathbf{A}_{(n,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)} - \mathbf{l}_{(n,1)} - \mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{0}_{(n,1)}$$

- Meghatározandó

$$\mathbf{v}_{(n,1)}, \mathbf{x}_{(r,1)}$$

- Célfüggvény

$$\sum_i |v_i| = \min$$

Az L_1 norma alapján végzett kiegyenlítés

- A változók átalakítása szükséges, hogy (a lineáris programozás szerint) nemnegatív számok különbségeként legyenek

$$x_j = x_j^+ - x_j^- \quad \text{ahol } j = 1, 2, \dots, r$$

$$\mathbf{x}_{(r,1)} = \mathbf{x}_{(r,1)}^+ - \mathbf{x}_{(r,1)}^-$$

$$v_i = v_i^+ - v_i^- \quad \text{ahol } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{v}_{(n,1)}^+ - \mathbf{v}_{(n,1)}^-$$

- A célfüggvény átalakításával felírható

$$\mathbf{e}_{(1,n)} \mathbf{v}_{(n,1)}^+ - \mathbf{e}_{(1,n)} \mathbf{v}_{(n,1)}^- = \min$$

- ahol

$$\mathbf{e}_{(1,n)} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$$

Az L_1 norma alapján végzett kiegyenlítés

- Súlyozással a teljes felírható feladat kényszerei

$$\mathbf{P}_{LL}^{(n,n)} \mathbf{A}^{(n,r)} \cdot \mathbf{x}^{+}_{(r,1)} - \mathbf{P}_{LL}^{(n,n)} \mathbf{A}^{(n,r)} \cdot \mathbf{x}^{-}_{(r,1)} - \mathbf{P}_{LL}^{(n,n)} \mathbf{v}^{+}_{(n,1)} + \mathbf{P}_{LL}^{(n,n)} \mathbf{v}^{-}_{(n,1)} - \mathbf{P}_{LL}^{(n,n)} \mathbf{l}_{(n,1)} = \mathbf{0}_{(n,1)}$$

$$\mathbf{A}^{(n,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)} - \mathbf{l}_{(n,1)} - \mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{0}_{(n,1)}$$

$$\mathbf{x}^{+}_{(r,1)} \geq \mathbf{0}_{(r,1)} \quad \mathbf{x}^{-}_{(r,1)} \geq \mathbf{0}_{(r,1)} \quad \mathbf{v}^{+}_{(n,1)} \geq \mathbf{0}_{(n,1)} \quad \mathbf{v}^{-}_{(n,1)} \geq \mathbf{0}_{(n,1)}$$

- A súlyozással felírható célfüggvény

$$\mathbf{e}_{(1,n)} \mathbf{P}_{LL}^{(n,n)} \mathbf{v}^{+}_{(n,1)} - \mathbf{e}_{(1,n)} \mathbf{P}_{LL}^{(n,n)} \mathbf{v}^{-}_{(n,1)} = \min$$

$$\mathbf{e}_{(1,n)} \mathbf{v}^{+}_{(n,1)} - \mathbf{e}_{(1,n)} \mathbf{v}^{-}_{(n,1)} = \min$$

Az L_1 norma alapján végzett kiegyenlítés

- A feladat befejezése

$$\mathbf{x}_{(r,1)} = \mathbf{x}_{(r,1)}^+ - \mathbf{x}_{(r,1)}^-$$

$$\mathbf{X}_{(r,1)} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{x}_{(r,1)}$$

$$\mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{v}_{(n,1)}^+ - \mathbf{v}_{(n,1)}^-$$

$$\mathbf{U}_{(n,1)} = \mathbf{L}_{(n,1)} + \mathbf{v}_{(n,1)}$$

- Iteráció?
- Pontossági mérőszámok?

Példa!

Az L_∞ norma alapján végzett kiegyenlítés

- Az alapösszefüggések alapján felírt

$$\mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{A}_{(n,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)} - \mathbf{l}_{(n,1)}$$

- A javításoknál igaznak kell lenni

$$|v_i| \leq v \quad ahol \ i = 1, 2, \dots, n$$

- Meghatározandó

$$v, \mathbf{x}_{(r,1)}$$

- A célfüggvény

$$v = \min$$

- (alternatív név ezért minimax-módszer)

Az L_∞ norma alapján végzett kiegyenlítés

- A lineáris programozás érdekében

$$v - v_i^+ \geq 0 \quad \text{ahol } i = 1, 2, \dots, n$$

$$v + v_i^- \geq 0 \quad \text{ahol } i = 1, 2, \dots, n$$

- Az alapösszefüggés

$$\mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{A}_{(n,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)} - \mathbf{l}_{(n,1)}$$

- Átrendezve (részletes levezetés nélkül)

$$\mathbf{v}_{(n,1)} - \mathbf{A}_{(n,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)} + \mathbf{l}_{(n,1)} \geq \mathbf{0}_{(n,1)}$$

$$\mathbf{v}_{(n,1)} + \mathbf{A}_{(n,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)} - \mathbf{l}_{(n,1)} \geq \mathbf{0}_{(n,1)}$$

$$\mathbf{v}_{(1,n)}^T = [v \quad v \quad \dots \quad v]$$

Az L_∞ norma alapján végzett kiegyenlítés

- Súlyozással a teljes felírható feladat kényszerei

$$\mathbf{v}_{(n,1)} - \mathbf{P}_{LL(n,n)} \mathbf{A}_{(n,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)} + \mathbf{P}_{LL(n,n)} \mathbf{1}_{(n,1)} \geq \mathbf{0}_{(n,1)}$$

$$\mathbf{v}_{(1,n)}^T = [v \quad v \quad \dots \quad v]$$

$$\mathbf{v}_{(n,1)} + \mathbf{P}_{LL(n,n)} \mathbf{A}_{(n,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)} - \mathbf{P}_{LL(n,n)} \mathbf{1}_{(n,1)} \geq \mathbf{0}_{(n,1)}$$

$$\mathbf{x}_{(r,1)} \geq \mathbf{0}_{(r,1)}$$

- A súlyozással felírható célfüggvény

$$v = \min$$

Az L_∞ norma alapján végzett kiegyenlítés

- A feladat befejezése

$$\mathbf{X}_{(r,1)} = \mathbf{X}_{(r,1)}^0 + \mathbf{x}_{(r,1)}$$

$$\mathbf{v}_{(n,1)} = \mathbf{A}_{(n,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)} - \mathbf{l}_{(n,1)}$$

$$\mathbf{U}_{(n,1)} = \mathbf{L}_{(n,1)} + \mathbf{v}_{(n,1)}$$

- Iteráció?
- Pontossági mérőszámok?

Példa!

Tudósaink

- Torben Krarup (1919-2005)
 - Koppenhága
- Kurt Kubik ()
 - Aalborg, majd Queensland
- Cikk: „Götterdämmerung Over Least Squares Adjustment” (1980) → robusztus becslés és kiegyenlítés, dán módszer



Köszönöm a figyelmet!

A decorative graphic element consisting of several horizontal bars. It starts with a solid green bar, followed by a thin white bar, and then a series of thin, overlapping green and white bars that create a layered, stepped effect extending across the width of the slide.