Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

2 EA / évközi jegy

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Mit fogunk tanulni?

Alapfogalmak
Egyszabadságfokú rendszerek rezgései
Többszabadságfokú rendszerek rezgései
Rúdszerkezetek rezgése
Kontinuumok rezgése

Mit fogunk tanulni?

$\boxed{\text{Alapfogalmak}}$

Egyszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:

szabadságfok
modell
merevség, helyettesítő merevség
tömeg
csillapítás
mozgás differenciálegyenlete

Alapfogalmak – I.

Bevezetés

Építőmérnöki szerkezetek terhei → általában álló teherként kezeljük

Valójában a terhek jó része mozog:

- hidakon átmenő (gyalogos-, jármű-) forgalom
- koncertterem közönsége
- szélteher
- gépek mozgó részei miatti terhek
-
-
-
- stb.

Mi változik emiatt?

Időfüggő elmozdulások → időfüggő alakváltozások → időfüggő igénybevételek

-Esetleg elegendő ezek maximumértéke.

Követelmények: teherbírási, használhatósági, stabilitási követelmények

Mit használunk? ($\approx$Előkövetelmények)

- Közönséges differenciálegyenletek $\left(homogén, inhomogén, lineáris, állandó\ együtthatójú, stb.\right)$
- Tartók elmozdulásainak számítása, mátrix-elmozdulásmódszer $\left(Tartók\ statikája\ I., Szilárdságtan\right)$
- Lineáris algebra $\left(lineáris\ egyenletrendszerek, sajátértékfeladat, sajátérték, sajátvektor\right)$
- Parciális differenciálegyenletek $\left(változók\ szétválasztása\right)$

Alapfogalmak – II.

Miben más a dinamikai vizsgálat az egyensúlyi helyzethez képest?

Emlékeztetőül a dinamika alaptörvénye: $\underline{R} = m \cdot \underline{a}$

Nincs egyensúly ➔ a jobb oldal nem nulla.

Ennek oka lehet:

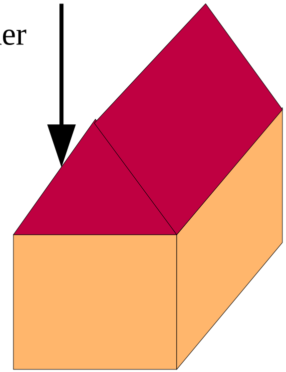
1. Statikus teher, stabil egyensúlyi helyzet ➔ a kitérített szerkezet visszatér az egyensúlyi állapotba.
   - Milyen gyorsan (mennyi idő alatt) tér vissza?
   - Mennyire megy túl az egyensúlyi helyzeten, mielőtt megáll?
   (Hogy aztán ebből a nem egyensúlyi, azaz kitérítettnek tekinthető helyzetből visszatérjen, s.í.t.)

   Az oda-vissza mozgás a *rezgés*.
   A magára hagyott szerkezet rezgése a *szabadrezgés*.
   A kitérés maximumának csökkenése a *csillapítás* hatása.

2. Időfüggő teher ➔ *gerjesztett rezgés*
   - Mi az elmozdulások, alakváltozások, igénybevételek időfüggése?
   - Mi az elmozdulások, alakváltozások, igénybevételek maximuma?

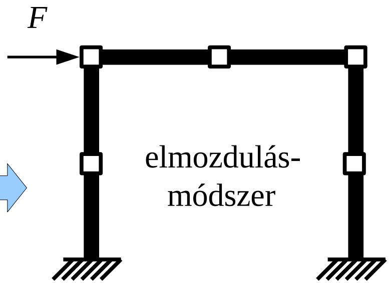
A dinamika szerepe tartószerkezetek vizsgálatában - statika

teher



szerkezet

mechanikai modell



matematikai modell

egyensúlyi egyenletek

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{x} = \underline{q}$$
$$\underline{\underline{K}}\,\underline{u} = \underline{q}$$

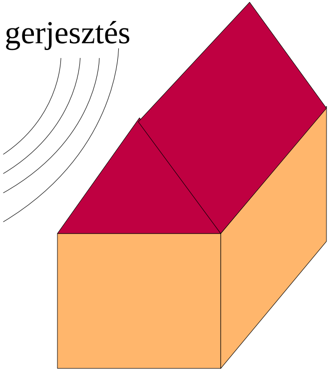
matematikai
megoldás

formálisan: $\underline{x} = \underline{\underline{K}}^{-1}\underline{q}$
vagy $\underline{u} = \underline{\underline{K}}^{-1}\underline{q}$

statikus teher okozta
elmozdulások,
alakváltozások,
igénybevételek

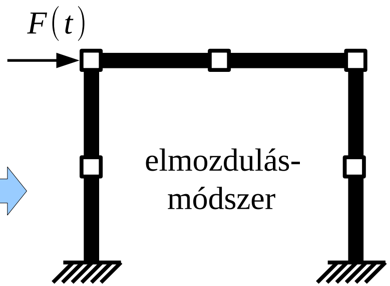
A dinamika szerepe tartószerkezetek vizsgálatában

gerjesztés



szerkezet

mechanikai modell



matematikai modell

mozgásegyenlet(ek)

$$m\,\ddot{x}(t)+c\,\dot{x}(t)+k\,x(t)=q(t)$$

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{C}}\,\underline{\dot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{q}(t)$$

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{u}}(t)+\underline{\underline{C}}\,\underline{\dot{u}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{u}(t)=\underline{q}(t)$$

matematikai
megoldás

$x(t)$, és x_{max}

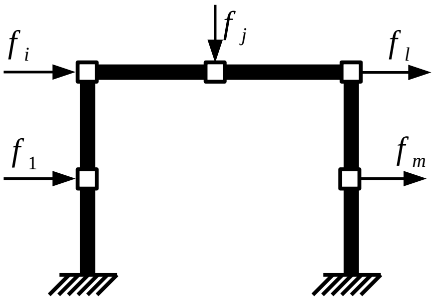
$\underline{x}(t)$, és $\underline{x}_{max}$

$\underline{u}(t)$, és $\underline{u}_{max}$

+ rezgés: előjel!

egyanekkora elmozdulást, alakváltozást
okozó statikus erők

$f=k\cdot x$ $\quad \underline{f}=\underline{\underline{K}}\,\underline{x}$ $\quad \underline{f}=\underline{\underline{K}}\,\underline{u}$



igénybevételek maximuma

+rezgés: előjel!

+anyagmodell (fáradás)

etc.

Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Mit fogunk tanulni?

Alapfogalmak

Egyszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:

szabadságfok
modell
merevség, helyettesítő merevség
tömeg
csillapítás
mozgás differenciálegyenlete

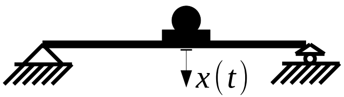
Szabadságfok – I.

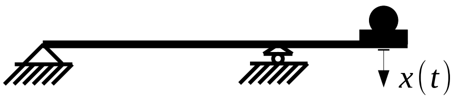
Szabadságfok:

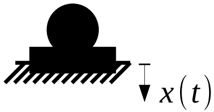
azon skalárfüggvények minimális száma, mely elegendő a szerkezet pillanatnyi helyzetének megadására.

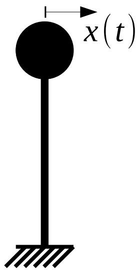
➔ valamilyen hely-, vagy elmozdulás-koordináta.

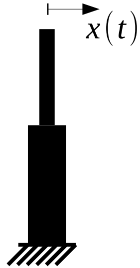
Példák egyszabadságfokú szerkezetekre (mindig síkbeli feladat)

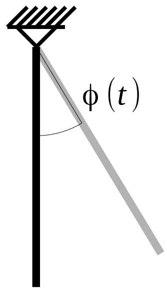


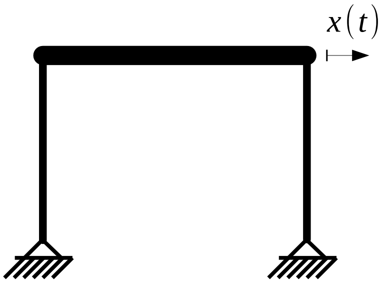


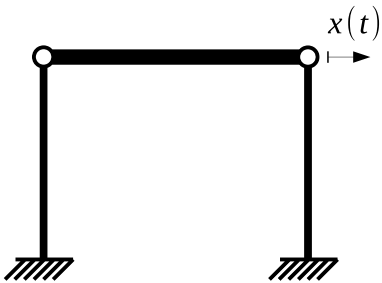


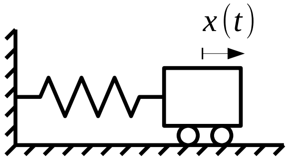


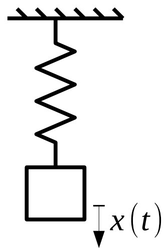












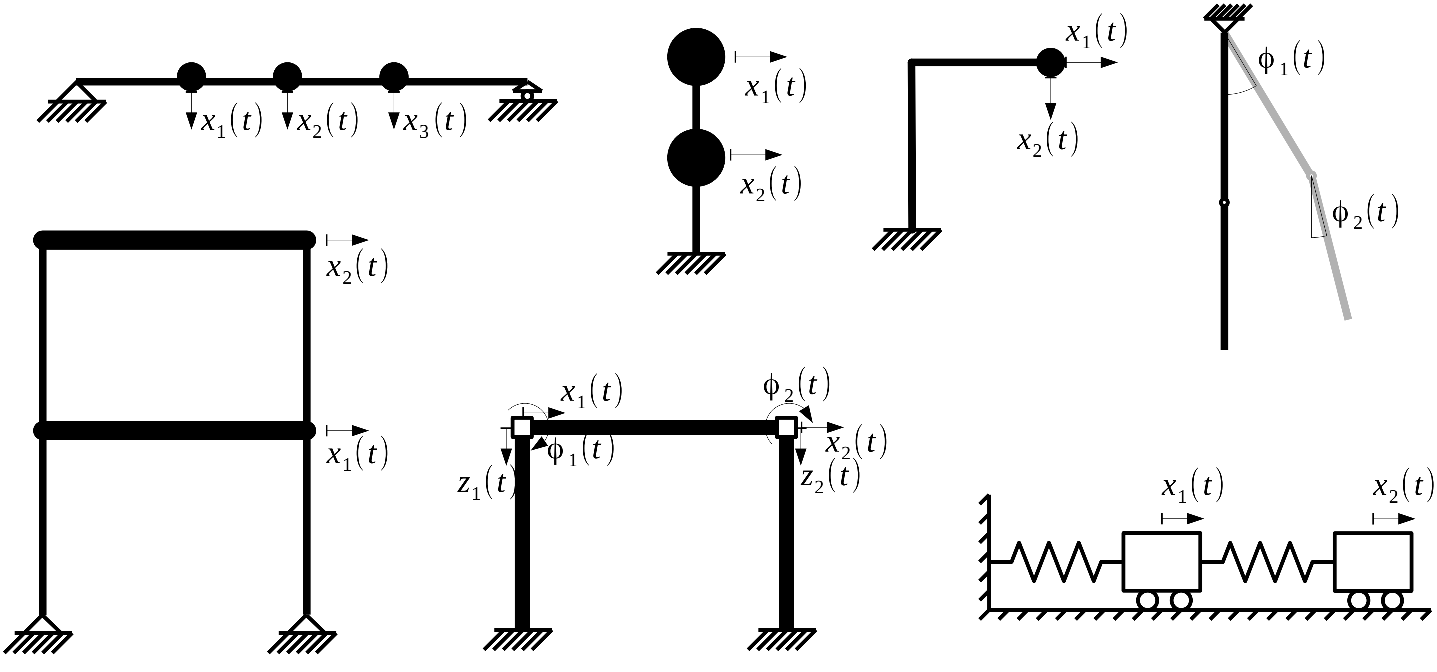
Szabadságfok – II.

Szabadságfok:

azon skalárfüggvények minimális száma, mely elegendő a szerkezet pillanatnyi helyzetének megadására.

➔ valamilyen hely-, vagy elmozdulás-koordináta.

Példák többszabadságfokú szerkezetekre



Mit fogunk tanulni?

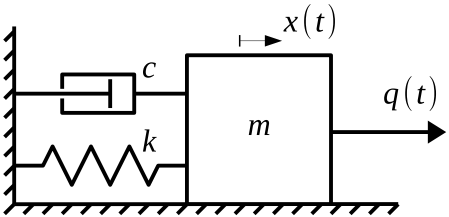
Alapfogalmak

Egyszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:

szabadságfok
modell
merevség, helyettesítő merevség
tömeg
csillapítás
mozgás differenciálegyenlete

Egyszabadságfokú rendszer – modell és mozgásegyenlet

Modell

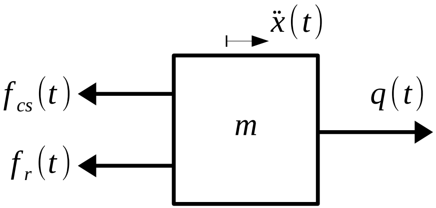


A modell elemei:
tömeg
merevség
csillapítás
gerjesztés (teher)

elmozdulás $(x(t))$
alakváltozás $(u(t))$

Hogyan számoljuk $x(t)$-t?

Elkülönítés



Az elmozdulást az egyensúlyi helyzethez képest mérjük. Globális koordináta.

sebesség:
a helykoordináta idő szerinti első deriváltja

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}=\dot{x}(t)$$

gyorsulás:
a helykoordináta idő szerinti második deriváltja

$$a(t)=\frac{\mathrm{d}^2\,x(t)}{\mathrm{d}\,t^2}=\ddot{x}(t)$$

N2: $$m\cdot\ddot{x}(t)=q(t)-f_r(t)-f_{cs}(t)$$

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)+f_{cs}(t)+f_r(t)=q(t)}$$

Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

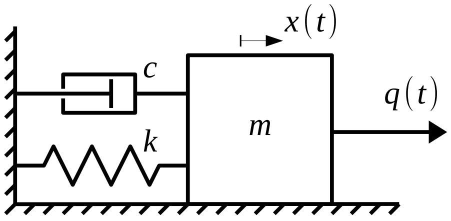
Mit fogunk tanulni?

Alapfogalmak

Egyszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:

szabadságfok
modell
merevség, helyettesítő merevség
$\boxed{\text{tömeg}}$
csillapítás
mozgás differenciálegyenlete

Modell



$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + f_{cs}(t) + f_r(t) = q(t)}$$

Egyszabadságfokú rendszer jellemzői – tömeg

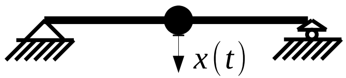
$$m \cdot \ddot{x}(t) + f_{cs}(t) + f_r(t) = q(t)$$

A szabadságfok elmozdulása nem mindig azonos a rugalmas szerkezet minden pontjának elmozdulásával ➔ nem a teljes tömeg mozog azonos gyorsulással. A folytonos szerkezet tömegének csak egy része jelenik meg a modell tömegében.
➔ A teljes tömeg helyett egy *redukált* tömeget használunk.

Példák a redukált tömegre:

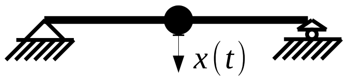
naiv közelítés:
szakaszok tömegeinek a
fele a szakaszok végpontjaiba

$$m \approx m_{tot}/2$$



pontosabb közelítés:
hasonló rezgésjellemzők

$$m \approx \frac{17}{35} m_{tot}$$



$$m \approx m_{tot}/3$$

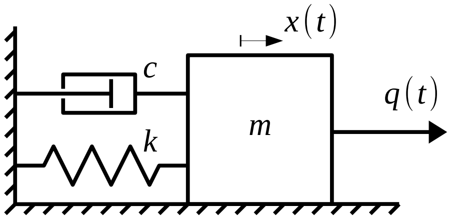
Mit fogunk tanulni?

Alapfogalmak

Egyszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:

szabadságfok
modell
merevség, helyettesítő merevség
tömeg
csillapítás
mozgás differenciálegyenlete

Modell



$$m \cdot \ddot{x}(t) + f_{cs}(t) + f_r(t) = q(t)$$

Egyszabadságfokú rendszer jellemzői – merevség I.

$$m\cdot\ddot{x}(t)+f_{cs}(t)+f_r(t)=q(t)$$

A rugalmas visszatérítő erő arányos a rugó megnyúlásával/rugalmas szerkezet alakváltozásával: $u(t)$.
Lineárisan rugalmas szerkezet: az arányossági tényező a *rugómerevség*: k.

$$f_r(t)=k\cdot u(t)$$

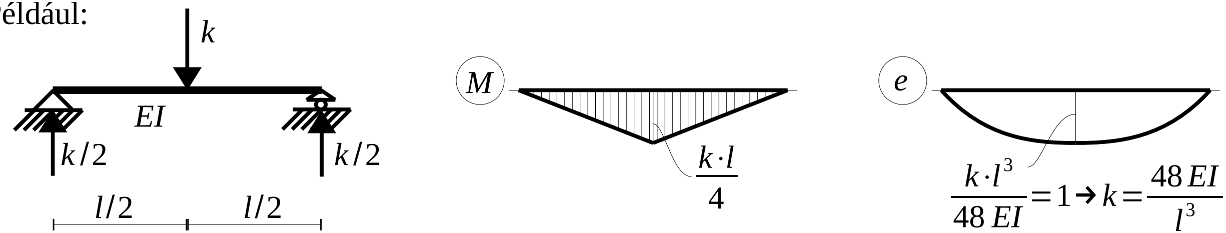
Ha a rugó másik vége (a támasz) nem mozog, akkor $x(t)=u(t)$.

$$f_r(t)=k\cdot x(t)$$

Rugómerevség fizikai jelentése: egységnyi elmozdulást létrehozó statikus erő.

Rugalmas szerkezeten *helyettesítő* vagy *ekvivalens* *rugómerevség* számítható a jelentés alapján:

Például:



$$\frac{k\cdot l^3}{48\,EI}=1\rightarrow k=\frac{48\,EI}{l^3}$$

Hátrány: paraméteres reakciók, igénybevételi ábrák, elmozdulások.

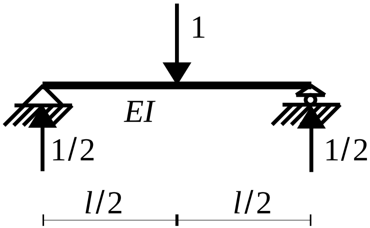
Egyszabadságfokú rendszer jellemzői – merevség II.

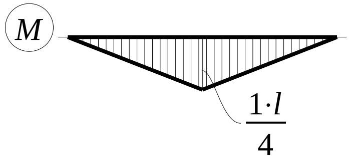
$$m\cdot\ddot{x}(t)+f_{cs}(t)+f_r(t)=q(t)$$

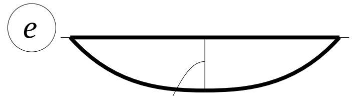
A helyettesítő vagy ekvivalens rugómerevség számítható az ellentettje alapján is.

Ez a szerkezet *hajlékonysága*, vagy *engedékenysége*. $\rightarrow f=\dfrac{1}{k}$, és így $k=\dfrac{1}{f}$

Fizikai jelentése: egységnyi statikus erő által létrehozott elmozdulás.

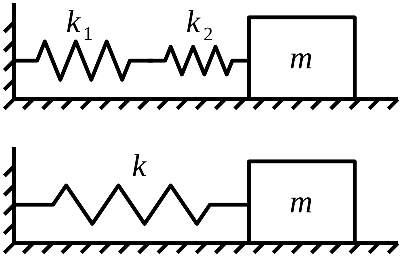






$$f=\frac{1\cdot l^3}{48\,EI}\rightarrow k=\frac{1}{f}=\frac{48\,EI}{l^3}$$

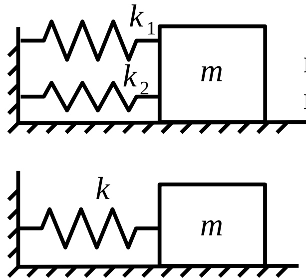
Sorba és *párhuzamosan* kapcsolt rugók helyettesítő merevsége



Soros kapcsolás
rugóerők azonosak
megnyúlások összeadódnak:

$$f=f_1+f_2$$

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$



Párhuzamos kapcsolás
rugóerők összeadódnak
megnyúlások azonosak:

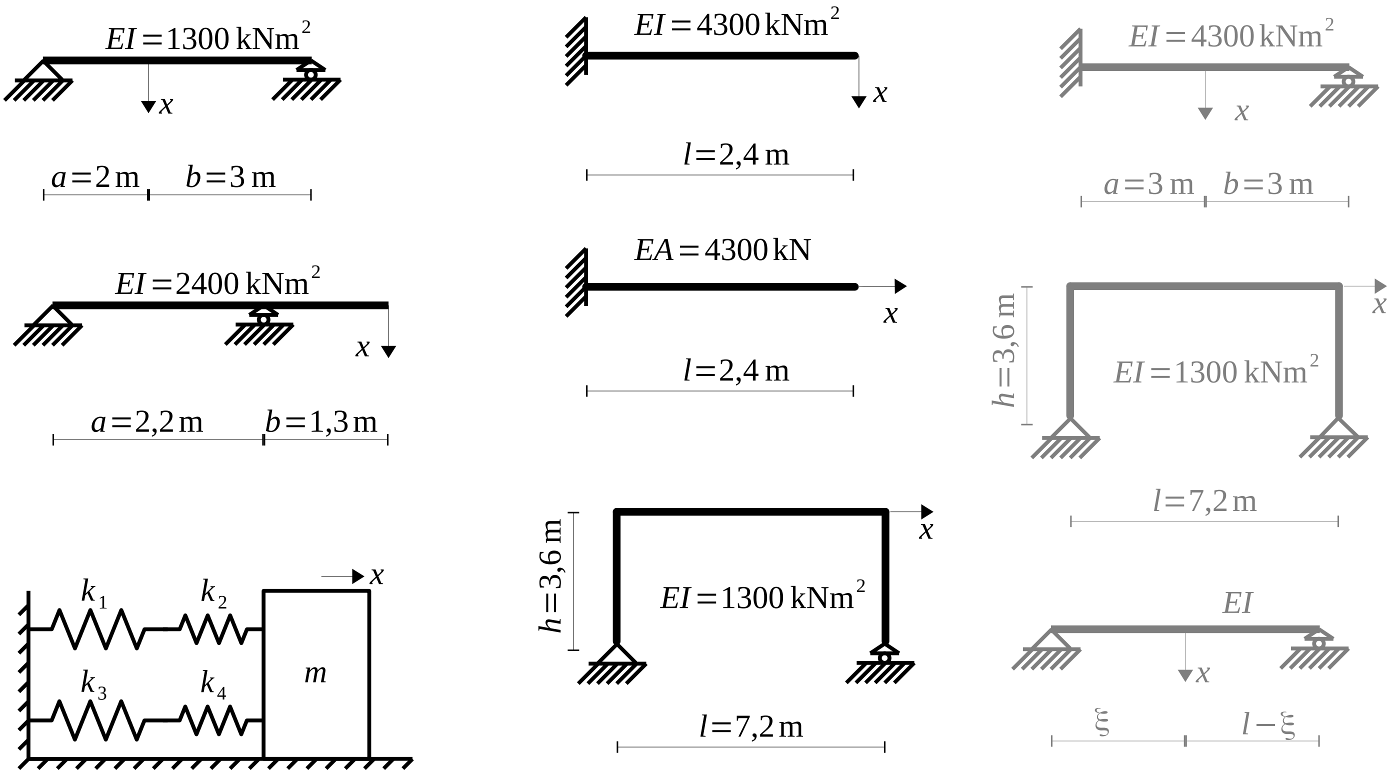
$$k=k_1+k_2$$

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$$

Ha nem lineárisan rugalmas a szerkezet, akkor a helyettesítő rugó sem lineáris $\rightarrow$ *a differenciálegyenlet is nemlineáris*

Egyszabadságfokú rendszer jellemzői – merevség HF

Számítsa ki az alábbi szerkezetek helyettesítő rugómerevségét!
(Az x koordináta jelöli a szabadságfok helyét.)



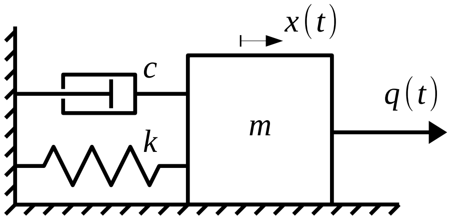
Mit fogunk tanulni?

Alapfogalmak

Egyszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:

szabadságfok
modell
merevség, helyettesítő merevség
tömeg
csillapítás
mozgás differenciálegyenlete

Modell



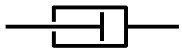
$$m \cdot \ddot{x}(t) + f_{cs}(t) + f_r(t) = q(t)$$

Egyszabadságfokú rendszer jellemzői – csillapítás

$$m\cdot\ddot{x}(t)+f_{cs}(t)+f_r(t)=q(t)$$

A mozgás miatti lassító erő, az alakváltozás sebességével ($\dot{u}(t)$) ellenkező irányba hat

Sebességgel arányos csillapítás
Modell: viszkózus folyadékkal töltött hengerben mozgó dugattyú
Arányossági tényező: c ➔ $f_{cs}(t)=c\cdot\dot{u}(t)$



Ha a rugó másik vége (a támasz) nem mozog, akkor $x(t)=u(t)\rightarrow\dot{x}(t)=\dot{u}(t)$ ➔ $f_{cs}(t)=c\cdot\dot{x}(t)$

Súrlódási erő miatti csillapítás
Modell: Coulomb–féle száraz súrlódás
A súrlódási erő mozgás esetén állandó nagyságú, iránya a mozgás irányával (a sebességgel) ellentétes:

$$f_{cs}=\mu\cdot m\cdot g\cdot\frac{|\dot{x}(t)|}{\dot{x}(t)}$$ (a pozitív előjel esetén mutat balra, mint az elkülönítésen)

Így a mozgás diff. egyenlete: $m\cdot\ddot{x}(t)+\mu\cdot m\cdot g\cdot\frac{|\dot{x}(t)|}{\dot{x}(t)}+k\cdot x(t)=q(t)\rightarrow$ *ez már nemlineáris*

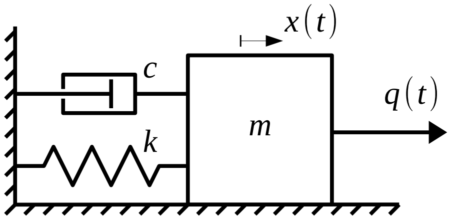
Mit fogunk tanulni?

Alapfogalmak

Egyszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:

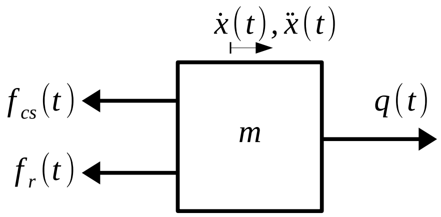
szabadságfok
modell
merevség, helyettesítő merevség
tömeg
csillapítás
mozgás differenciálegyenlete

Modell



$$m \cdot \ddot{x}(t) + f_{cs}(t) + f_r(t) = q(t)$$

Egyszabadságfokú rendszer mozgásának differenciálegyenlete



$$m \cdot \ddot{x}(t) + f_{cs}(t) + f_r(t) = q(t)$$

$$f_r(t) = k \cdot x(t)$$

$$f_{cs}(t) = c \cdot \dot{x}(t)$$

Behelyettesítés után a mozgás differenciálegyenlete:

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)}$$

közönséges, másodrendű, lineáris, állandó együtthatójú

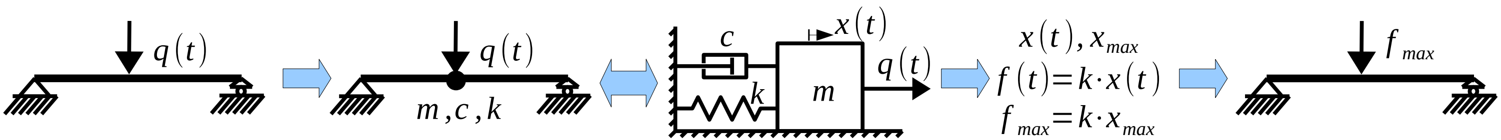
Rezgések osztályozása

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)$$

	$q(t)=0$ *szabadrezgés* (homogén DE)	$q(t) \neq 0$ *gerjesztett rezgés* (inhomogén DE)
$c=0$ *csillapítatlan rendszer* (hiányos DE)	*csillapítatlan szabadrezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$	*csillapítatlan, gerjesztett rezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)$
$c>0$ *csillapított rendszer*	*csillapított szabadrezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$	*csillapított, gerjesztett rezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)$

A differenciálegyenlet $x(t)$ megoldásának ki kell elégítenie a *kezdeti feltételeket* is.
Egy adott t_0 pillanatban az elmozdulás és a sebesség értéke előírt: x_0, illetve v_0, azaz:

$$x(t_0) = x_0 \qquad \dot{x}(t_0) = v_0$$



Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Mit fogunk tanulni?

Egyszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:

csillapítatlan rendszer szabadrezgése

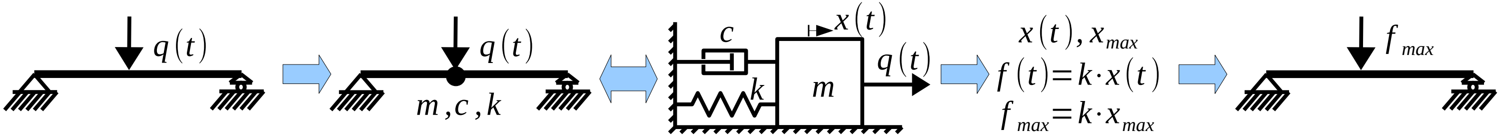
Rezgések osztályozása

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)}$$

	$q(t)=0$ *szabadrezgés* (homogén DE)	$q(t)\neq 0$ *gerjesztett rezgés* (inhomogén DE)
$c=0$ *csillapítatlan rendszer* (hiányos DE)	*csillapítatlan szabadrezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=0$	*csillapítatlan, gerjesztett rezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$
$c>0$ *csillapított rendszer*	*csillapított szabadrezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=0$	*csillapított, gerjesztett rezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$

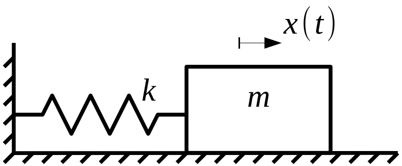
A differenciálegyenlet $x(t)$ megoldásának ki kell elégítenie a *kezdeti feltételeket* is.
Egy adott t_0 pillanatban az elmozdulás és a sebesség értéke előírt: x_0, illetve v_0, azaz:

$$x(t_0)=x_0 \qquad \dot{x}(t_0)=v_0$$

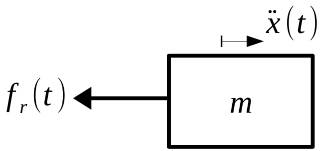


Egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer szabadrezgése – I.

Modell



Elkülönítés



N2: $m\cdot\ddot{x}(t)=-f_r(t)$

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=0}$$

Keressük $x(t)$-t, ha $x(t_0)=x_0$, és $\dot{x}(t_0)=v_0$.

Megoldás

Keressük az általános megoldást az alábbi alakban:

$$x(t)=d\cdot e^{\lambda t}$$

Így: $\ddot{x}(t)=d\cdot\lambda^2\cdot e^{\lambda t}$

Behelyettesítve a DE-be: $m\cdot d\cdot\lambda^2\cdot e^{\lambda t}+k\cdot d\cdot e^{\lambda t}=0$

Amiből: $\lambda^2=-\dfrac{k}{m}$

$$\rightarrow \lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{k}{m}}=\pm\sqrt{-1}\sqrt{\frac{k}{m}}=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Vezessük be az $\boxed{\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$ mennyiséget

Neve: *sajátkörfrekvencia* [rad/s]

Így $\lambda_{1,2}=\pm i\omega_0$ és $x(t)=d_1\cdot e^{+i\omega_0 t}+d_2\cdot e^{-i\omega_0 t}$

$$Euler: e^{ix}=\cos(x)+i\cdot\sin(x)$$

$$\sin(-x)=-\sin(x)$$

$$\cos(-x)=\cos(x)$$

Egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer szabadrezgése – II.

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$$

Az általános megoldás átírása:

$$\boxed{x(t)} = d_1 \cdot (\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)) + $$
$$+ d_2 \cdot (\cos(-\omega_0 t) + i \sin(-\omega_0 t))$$
$$= (d_1 + d_2)\cos(\omega_0 t) + (i d_1 - i d_2) \sin(\omega_0 t)$$
$$= \boxed{A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)}$$

A hely, a sebesség és a gyorsulás:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$
$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)$$
$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \left(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)\right)$$

$$Ell.: m\left(-\omega_0^2 \left(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)\right)\right) +$$
$$+ k\left(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)\right) =$$
$$= -m\omega_0^2 + k = -m\frac{k}{m} + k = 0$$

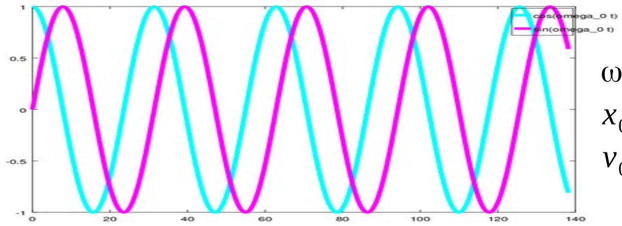
Kezdeti feltételek, ha $t_0 = 0$:

$$x_0 = A \cdot \cos 0 + B \cdot \sin 0 \rightarrow A = x_0$$

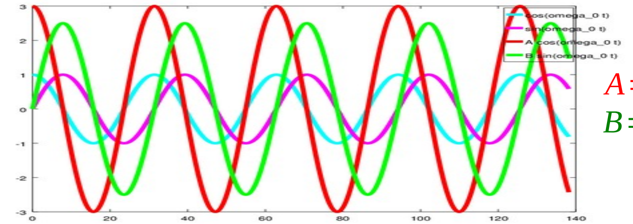
$$v_0 = -\omega_0 A \cdot \sin 0 + \omega_0 B \cdot \cos 0 \rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

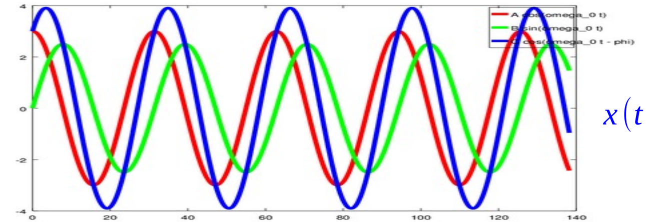
$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)}$$



$\omega_0 = 0{,}2\,\text{rad/s}$
$x_0 = 3\,\text{cm}$
$v_0 = 0{,}5\,\text{cm/s}$



$A = 3\,\text{cm}$
$B = 2{,}5\,\text{cm}$



$x(t)$

Egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer szabadrezgése – III.

$$m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=0$$

Az általános megoldás átírása:

$$\begin{aligned}\boxed{x(t)}&=d_1\cdot(\cos(\omega_0 t)+i\sin(\omega_0 t))+\\&\quad+d_2\cdot(\cos(-\omega_0 t)+i\sin(-\omega_0 t))\\&=(d_1+d_2)\cos(\omega_0 t)+(i d_1-i d_2)\sin(\omega_0 t)\\&=\boxed{A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)}\end{aligned}$$

A hely, a sebesség és a gyorsulás:

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$$
$$\dot{x}(t)=-\omega_0 A\sin(\omega_0 t)+\omega_0 B\cos(\omega_0 t)$$
$$\ddot{x}(t)=-\omega_0^2(A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t))$$

$$\begin{aligned}Ell.: m(-\omega_0^2(A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)))+\\+k(A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t))=\\=-m\omega_0^2+k=-m\frac{k}{m}+k=0\end{aligned}$$

Kezdeti feltételek, ha $t_0=0$:

$$x_0=A\cdot\cos 0+B\cdot\sin 0\rightarrow A=x_0$$

$$v_0=-\omega_0 A\cdot\sin 0+\omega_0 B\cdot\cos 0\rightarrow B=\frac{v_0}{\omega_0}$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$\boxed{x(t)=x_0\cdot\cos(\omega_0 t)+\frac{v_0}{\omega_0}\cdot\sin(\omega_0 t)}$$

A két harmonikus függvény összege átírható

$$x(t)=C\cdot\cos(\omega_0 t-\phi_0)$$

ahol C: a rezgés *amplitúdója*

ϕ_0: a rezgés *kezdeti fázisszöge*

Trigonometriai azonosságok:

$$\begin{aligned}x(t)&=C\cdot\cos(\omega_0 t-\phi_0)\\&=C\cdot\cos(-\phi_0)\cdot\cos(\omega_0 t)-C\cdot\sin(-\phi_0)\cdot\sin(\omega_0 t)\\&=C\cdot\cos\phi_0\cdot\cos(\omega_0 t)+C\cdot\sin\phi_0\cdot\sin(\omega_0 t)\end{aligned}$$

$$\rightarrow A=C\cos\phi_0,\ B=C\sin\phi_0,\ C=\sqrt{A^2+B^2}$$

Ebből a felírásból:

$$x_{max}=C$$
$$\dot{x}(t)=-\omega_0 C\sin(\omega_0 t-\phi_0)\ \rightarrow\ \dot{x}_{max}=\omega_0 C$$
$$\ddot{x}(t)=-\omega_0^2 C\cos(\omega_0 t-\phi_0)\ \rightarrow\ \ddot{x}_{max}=\omega_0^2 C$$
$$\ddot{x}(t)=-\omega_0^2 x(t)$$

Egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer szabadrezgése – IV.

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$$

Az általános megoldás átírása:

$$\begin{aligned} \boxed{x(t)} &= d_1 \cdot (\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)) + \\ &\quad + d_2 \cdot (\cos(-\omega_0 t) + i \sin(-\omega_0 t)) \\ &= (d_1 + d_2) \cos(\omega_0 t) + (i d_1 - i d_2) \sin(\omega_0 t) \\ &= \boxed{A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)} \end{aligned}$$

A hely, a sebesség és a gyorsulás:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 (A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t))$$

$$Ell.: m(-\omega_0^2 (A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t))) + $$
$$+ k(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)) =$$
$$= -m\omega_0^2 + k = -m \frac{k}{m} + k = 0$$

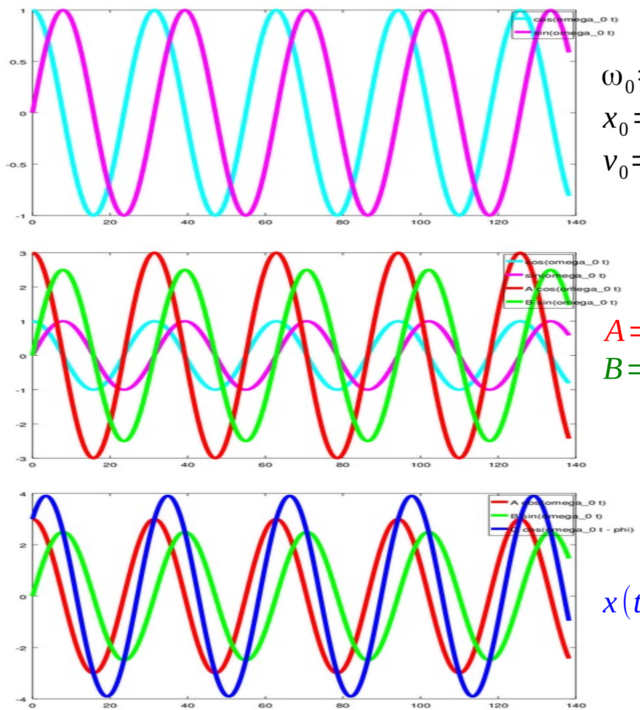
Kezdeti feltételek, ha $t_0 = 0$:

$$x_0 = A \cdot \cos 0 + B \cdot \sin 0 \rightarrow A = x_0$$

$$v_0 = -\omega_0 A \cdot \sin 0 + \omega_0 B \cdot \cos 0 \rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)}$$



$\omega_0 = 0{,}2\,\text{rad/s}$

$x_0 = 3\,\text{cm}$

$v_0 = 0{,}5\,\text{cm/s}$

$A = 3\,\text{cm}$

$B = 2{,}5\,\text{cm}$

$x(t)$

$C = 3{,}905\,\text{cm}$

A két harmonikus függvény összege átírható

$$x(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t - \phi_0)$$

ahol C: a rezgés *amplitúdója*

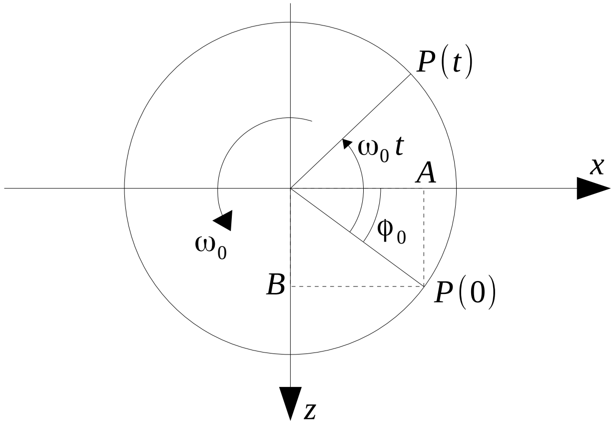
ϕ_0: a rezgés *kezdeti fázisszöge*

Egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer szabadrezgése – V.

$A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$

Miért sajátkörfrekvencia az ω_0?

Az origó körül ω_0 szögsebességel forgó merev test egy pontjának az egyik koordinátája megegyezik $x(t)$-vel.



$$x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)=C\cdot\cos(\omega_0 t-\phi_0)$$

A csillapítatlan szabadrezgés *periódikus* azaz:

$\exists T_0>0$ amire $x(t)=x(t+T_0)\forall t$

A legkisebb T_0 neve a *periódusidő*, vagy *rezgésidő*.

A harmonikus $x(t)$ függvényből:

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

A periódusidő egy teljes rezgés megtételéhez szükséges idő.
A periódusidő inverze az egységnyi idő alatt megtett rezgések száma.
Ez a rezgés *sajátfrekvenciája* vagy *önrezgésszáma*.

$$n_0=\frac{1}{T_0}=\frac{\omega_0}{2\pi}$$

(Mértékegysége [1/s]=Hz, Hertz ➔ ezt halljuk)

Egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer szabadrezgése – VI.

$$m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=0$$

Sajátkörfrekvencia közelítő számítása

Ha az önsúly hatására a szabadsági fok elmozdulása e_0, akkor a rugómerevség: $k=\frac{m\cdot g}{e_0}$

Ezt behelyettesítve a sajátkörfrekvencia képletébe: $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{m\cdot g}{e_0\,m}}=\sqrt{\frac{g}{e_0}}$

Az önrezgésszám pedig: $n_0=\frac{\sqrt{g}}{2\pi\sqrt{e_0}}$

A távolságokat cm-ben behelyettesítve (azaz $g=981\,\mathrm{cm/s^2}$-ből):

$$n_0=\frac{4{,}985}{\sqrt{e_0}}\approx\frac{5}{\sqrt{e_0}}$$

Egyszerű, a hiba kb. $3‰$, de e_0-t cm-ben kell behelyettesíteni!!!

A rugóerő (ami a rugóról a testre hat):

$$f_r(t)=k\cdot x(t)=k\left(x_0\cdot\cos(\omega_0 t)+\frac{v_0}{\omega_0}\cdot\sin(\omega_0 t)\right)$$

a maximuma: $f_{r,max}=k\cdot x_{max}$

a rugóra (rugalmas szerkezetre) ható erő ennek ellentettje

➔ azonos nagyság, ellentétes irány

Példa

Két végén megtámasztott acél cső sajátrezgésideje, ha adott: $l=1{,}2\,\mathrm{m}$, $\varphi=3\,\mathrm{cm}$ (külső átmérő), $v=2\,\mathrm{mm}$, $\varrho=7{,}85\,\mathrm{g/cm^3}$, $E=210\,\mathrm{GPa}$

Megoldás

$$EI=E\cdot\frac{R^4-B^4}{4}\pi=3639\,\mathrm{Nm^2}$$

$$k=\frac{48\,EI}{l^3}=101085\,\mathrm{N/m}$$

$$m=\frac{17}{35}\cdot\varrho\cdot l\cdot(R^2-B^2)\pi=1{,}657\,\mathrm{kg}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{101085}{1{,}657}}=354{,}4\,\mathrm{rad/s}$$

$$n_0=56{,}4\,\mathrm{Hz},\quad T_0=0{,}01773\,\mathrm{s}$$

Egyszabadságfokú rendszer jellemzői – sajátkörfrekvencia HF

Számítsa ki az alábbi szerkezetek sajátkörfrekvenciáját, önrezgésszámát, periódusidejét!
(Az x koordináta jelöli a szabadságfok helyét.)