Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Mit tanultunk eddig?

Alapfogalmak

Egyszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:

szabadságfok
modell
merevség, helyettesítő merevség
tömeg
csillapítás
általános mozgás differenciálegyenlete

csillapított, csillapítatlan rezgés
gerjesztett rezgés, szabadrezgés

csillapítatlan szabadrezgés
sajátkörfrekvencia
önrezgésszám, periódusidő

Mit fogunk tanulni ma?

Egyszabadságfokú csillapított rendszer mechanikai rezgései:

mozgás differenciálegyenlete
általános megoldás menete
megoldási lehetőségek, a csillapítás jellemzése

Egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer gerjesztett rezgései:

mozgás differenciálegyenlete
általános megoldás menete
megoldás

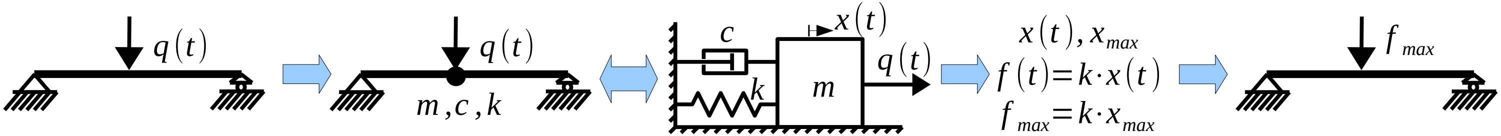
Rezgések osztályozása

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)}$$

	$q(t)=0$ *szabadrezgés* (homogén DE)	$q(t)\neq 0$ *gerjesztett rezgés* (inhomogén DE)
$c=0$ *csillapítatlan rendszer* (hiányos DE)	*csillapítatlan szabadrezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$	*csillapítatlan, gerjesztett rezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)$
$c>0$ *csillapított rendszer*	*csillapított szabadrezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$	*csillapított, gerjesztett rezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)$

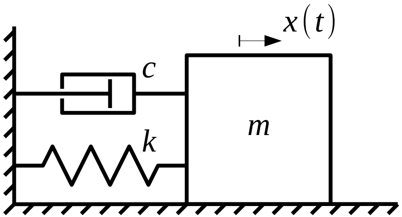
A differenciálegyenlet $x(t)$ megoldásának ki kell elégítenie a *kezdeti feltételeket* is.
Egy adott t_0 pillanatban az elmozdulás és a sebesség értéke előírt: x_0, illetve v_0, azaz:

$$x(t_0) = x_0 \qquad \dot{x}(t_0) = v_0$$

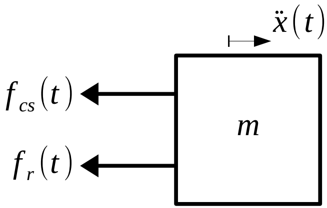


Csillapított szabadrezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – I.

Modell



Elkülönítés



N2: $m\cdot\ddot{x}(t)=-f_r(t)-f_{cs}(t)$

lineáris rugó: $f_r(t)=k\cdot x(t)$

seb. arányos csill.: $f_{cs}(t)=c\cdot\dot{x}(t)$

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=0}$$

Keressük $x(t)$-t, ha $x(t_0)=x_0$, és $\dot{x}(t_0)=v_0$.

Megoldás

Keressük az általános megoldást az alábbi alakban:

$$x(t)=d\cdot e^{\lambda t}$$

Így: $\dot{x}(t)=d\cdot\lambda\cdot e^{\lambda t}$, $\ddot{x}(t)=d\cdot\lambda^2\cdot e^{\lambda t}$

Behelyettesítve a DE-be:

$$m\cdot d\cdot\lambda^2\cdot e^{\lambda t}+c\cdot d\cdot\lambda\cdot e^{\lambda t}+k\cdot d\cdot e^{\lambda t}=0$$

A *karakterisztikus egyenlet*:

$$m\cdot\lambda^2+c\cdot\lambda+k=0$$

Amiből: $\lambda_{1,2}=\dfrac{-c\pm\sqrt{c^2-4mk}}{2m}=-\dfrac{c}{2m}\pm\sqrt{\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2-\dfrac{k}{m}}$

Vezessük be a $\varrho=\dfrac{c}{2m}$ mennyiséget

(ez végső soron egy, a csillapítást jellemző fajlagos érték),

és használjuk az $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ sajátkörfrekvenciát:

$$\lambda_{1,2}=-\varrho\pm\sqrt{\varrho^2-\omega_0^2}$$

Csillapított szabadrezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – II.

Def.: *kritikus csillapítás*: $c_{kr} = 2\sqrt{k \cdot m}$ ekkor $\varrho_{kr} = \omega_0$ $\quad$ $\lambda_{1,2} = -\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - \omega_0^2}$, $\varrho = \frac{c}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

A csillapítás aktuális értékétől függően három eset lehetséges:

1. Nagy csillapítás: ha $c > c_{kr}$ és így $\varrho > \omega_0$

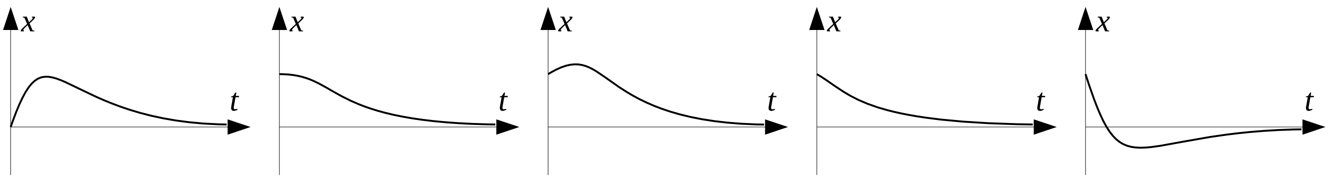
Ekkor $\sqrt{\varrho^2 - \omega_0^2}$ valós (és kisebb ϱ-nál), így λ_1 és λ_2 két valós (negatív) gyök, ezért a megoldás:

$$x(t) = d_1 e^{\lambda_1 \cdot t} + d_2 e^{\lambda_2 \cdot t}$$

Mindkét exponenciális függvény aszimptotikusan tart a nullához (azaz az egyensúlyi helyzethez).
Nem alakul ki tényleges rezgés.
d_1 és d_2 értéke a kezdeti értékektől függ (x_0 és v_0)

Az elmozdulásfüggvény jellege néhány típus lehet:

$x_0 = 0$, $v_0 \neq 0$ $\quad$ $x_0 \neq 0$, $v_0 = 0$ $\quad$ $x_0 \neq 0$, $x_0 \cdot v_0 > 0$ $\quad$ $x_0 \neq 0$, $x_0 \cdot v_0 < 0$



Csillapított szabadrezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – III.

Def.: *kritikus csillapítás*: $c_{kr}=2\sqrt{k\cdot m}$ ekkor $\varrho_{kr}=\omega_0$

$$\lambda_{1,2}=-\varrho\pm\sqrt{\varrho^2-\omega_0^2}\ ,\quad \varrho=\frac{c}{2m}\ ,\quad \omega_0^2=\frac{k}{m}$$

A csillapítás aktuális értékétől függően három eset lehetséges:

2. Kritikus csillapítás: ha $c=c_{kr}$ és így $\varrho=\omega_0$

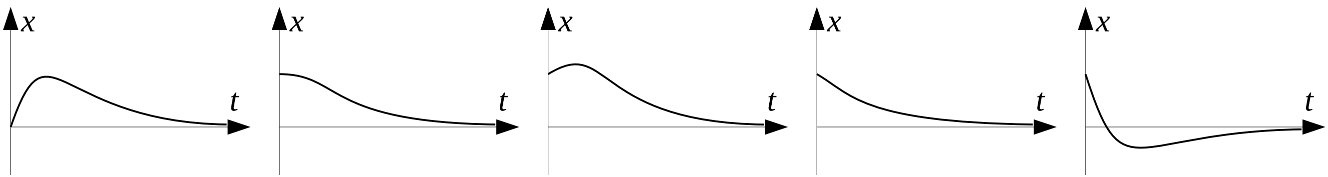
Ekkor $\sqrt{\varrho^2-\omega_0^2}=0$, így a $\lambda_1=\lambda_2=-\varrho$ valós (negatív) gyök kétszeres, ezért a megoldás:

$$x(t)=d_1\cdot e^{-\varrho\cdot t}+d_2\cdot t\cdot e^{-\varrho\cdot t}$$

Mindkét függvény aszimptotikusan tart a nullához (azaz az egyensúlyi helyzethez).
d_1 és d_2 értéke a kezdeti értékektől függ (x_0 és v_0)

Az elmozdulásfüggvény jellege néhány típus lehet:

$x_0=0$	$x_0\neq 0$	$x_0\neq 0$	$x_0\neq 0$
$v_0\neq 0$	$v_0=0$	$x_0\cdot v_0>0$	$x_0\cdot v_0<0$



Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

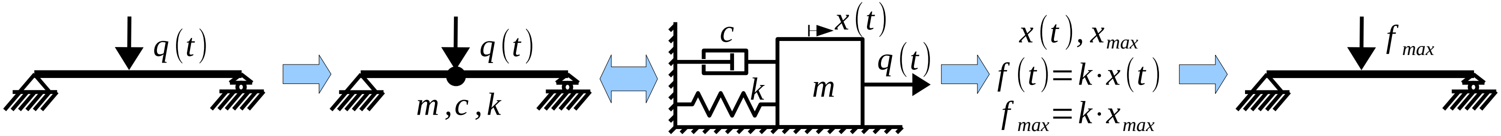
Rezgések osztályozása

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)}$$

	$q(t)=0$ *szabadrezgés* (homogén DE)	$q(t)\neq 0$ *gerjesztett rezgés* (inhomogén DE)
$c=0$ *csillapítatlan rendszer* (hiányos DE)	*csillapítatlan szabadrezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=0$	*csillapítatlan, gerjesztett rezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$
$c>0$ *csillapított rendszer*	*csillapított szabadrezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=0$	*csillapított, gerjesztett rezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$

A differenciálegyenlet $x(t)$ megoldásának ki kell elégítenie a *kezdeti feltételeket* is.
Egy adott t_0 pillanatban az elmozdulás és a sebesség értéke előírt: x_0, illetve v_0, azaz:

$$x(t_0)=x_0 \qquad \dot{x}(t_0)=v_0$$



Csillapított szabadrezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – IV.

Def.: *kritikus csillapítás*: $c_{kr}=2\sqrt{k\cdot m}$ ekkor $\varrho_{kr}=\omega_0$ $\qquad \lambda_{1,2}=-\varrho\pm\sqrt{\varrho^2-\omega_0^2}$, $\varrho=\dfrac{c}{2m}$, $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$

A csillapítás aktuális értékétől függően három eset lehetséges:

3. Kis csillapítás: ha $c<c_{kr}$ és így $\varrho<\omega_0$

Ekkor $\sqrt{\varrho^2-\omega_0^2}$ képzetes, így λ_1 és λ_2 két komplex gyök.

Legyen $c=\xi\cdot c_{kr}$ (azaz jellemezzük a csillapítás mértékét a dimenziótlan $\xi<1$ számmal)

$$\text{Így } \varrho=\frac{\xi 2\sqrt{k\cdot m}}{2m}=\xi\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}=\xi\cdot\omega_0$$

$$\text{és } \sqrt{\varrho^2-\omega_0^2}=\omega_0\cdot\sqrt{\xi^2-1}=\omega_0\cdot\sqrt{-\left(1-\xi^2\right)}=\omega_0\cdot\sqrt{-1}\sqrt{1-\xi^2}=i\,\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}=i\,\omega_0^*$$

ω_0^* a csillapított sajátkörfrekvencia (és van csillapított periódusidő T_0^*, ill. önrezgésszám n_0^* is)

$$\lambda_1=-\varrho+i\,\omega_0^*\ ,\ \lambda_2=-\varrho-i\,\omega_0^* \ \rightarrow \boxed{x(t)}=d_1\cdot e^{\left(-\varrho+i\omega_0^*\right)t}+d_2\cdot e^{\left(-\varrho-i\omega_0^*\right)t}=d_1\cdot e^{-\varrho t}e^{+i\omega_0^* t}+d_2\cdot e^{-\varrho t}e^{-i\omega_0^* t}$$

$$=e^{-\varrho t}\cdot\left(d_1\cdot e^{+i\omega_0^* t}+d_2\cdot e^{-i\omega_0^* t}\right)=\boxed{e^{-\varrho t}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)}$$

A megoldás két függvény szorzata: $e^{-\varrho t}$ exponenciálisan lecsengő

$A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)$ harmonikus függvény

Csillapított szabadrezgés – kis csillapítás I.

$$\varrho=\xi\cdot\omega_0\ ,\ \omega_0^*=\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}$$

A megoldás általános alakja: $x(t)=e^{-\varrho t}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)$

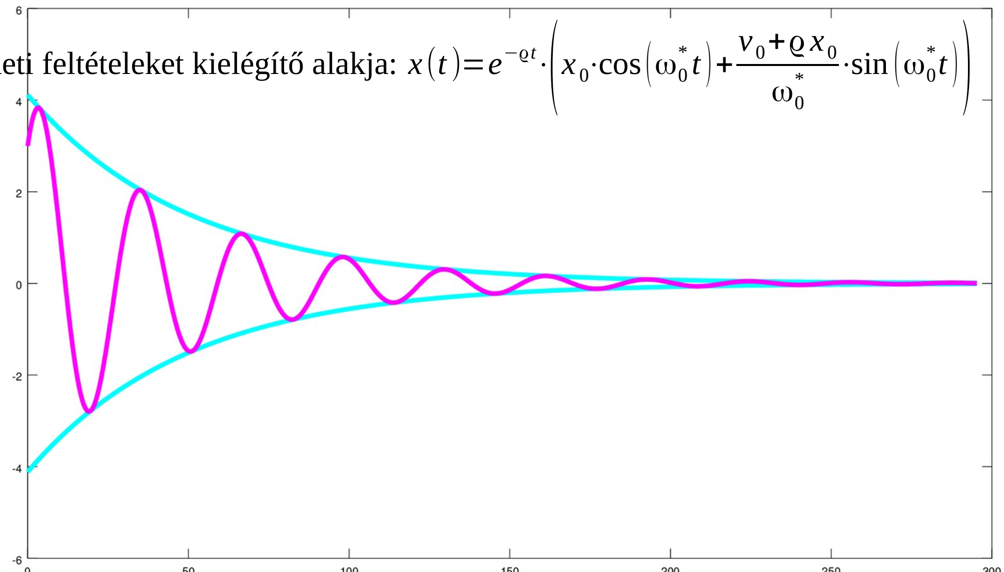
Kezdeti feltételek: $x(0)=x_0\ ,\ \dot{x}(0)=v_0$

Ehhez: $\dot{x}(t)=-\varrho\cdot e^{-\varrho t}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)+e^{-\varrho t}\cdot\left(-A\cdot\omega_0^*\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\omega_0^*\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)\right)$

$$x_0=1\cdot(A\cdot 1+B\cdot 0)\rightarrow A=x_0$$

$$v_0=-\varrho\cdot 1\cdot(x_0\cdot 1+B\cdot 0)+1\cdot(-x_0\cdot 0+B\cdot\omega_0^*\cdot 1)\rightarrow B=\frac{v_0+\varrho x_0}{\omega_0^*}=\frac{v_0}{\omega_0^*}+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}x_0$$

A megoldás kezdeti feltételeket kielégítő alakja: $x(t)=e^{-\varrho t}\cdot\left(x_0\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+\frac{v_0+\varrho x_0}{\omega_0^*}\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)$



Pl.:

$\omega_0=0{,}2\ \mathrm{rad/s}$

$\xi=0{,}1$

$x_0=3\ \mathrm{cm}$

$v_0=0{,}5\ \mathrm{cm/s}$

Csillapított szabadrezgés – kis csillapítás II.

$$\varrho=\xi\cdot\omega_0\ ,\ \omega_0^*=\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}$$

$$x(t)=e^{-\varrho t}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)$$

A csillapítás hatása a csillapítatlan esethez képest kettős:

1. Az amplitúdó csökkenése
   az $e^{-\varrho t}$ tag miatt.

2. A "periódusidő" megnövekedése
   az $\omega_0^*=\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}$ tag miatt: $T_0^*=\dfrac{2\pi}{\omega_0^*}=\dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}}$

Nézzük két, egymáshoz képest T_0^* idő különbséggel mérhető elmozdulás hányadosát:

$$\frac{x(t)}{x(t+T_0^*)}=\frac{e^{-\varrho t}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)}{e^{-\varrho(t+T_0^*)}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^*(t+T_0^*)\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^*(t+T_0^*)\right)\right)}=\frac{e^{-\varrho t}}{e^{-\varrho(t+T_0^*)}}\cdot\frac{A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)}{A\cdot\cos\left(\omega_0^* t+\omega_0^* T_0^*\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t+\omega_0^* T_0^*\right)}=$$

$$=\frac{\cancel{e^{-\varrho t}}}{\cancel{e^{-\varrho t}}\cdot e^{-\varrho T_0^*}}\cdot\cancel{\frac{A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)}{A\cdot\cos\left(\omega_0^* t+2\pi\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t+2\pi\right)}}=\frac{1}{e^{-\varrho T_0^*}}=\boxed{e^{\varrho T_0^*}}=e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

ez hányados csak a csillapítástól függ
akár ezzel is jellemezhető a csillapítás

A gyakorlatban a hányados e-alapú logaritmusát használják.
Ennek neve *logaritmikus dekrementum*:

$$\boxed{\vartheta}=\ln\frac{x(t)}{x(t+T_0^*)}=\boxed{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Ha a (kis) csillapítás kicsi $(\xi\ll 1)$,
akkor $\sqrt{1-\xi^2}\approx 1$ és
$\vartheta\approx 2\pi\xi$,

A logaritmikus dekrementum gyakorlati haszna:
a kitérés maximumértékei (egymástól T_0^* időben) könnyen mérhetők
→ hányadosuk számítható → a szerkezet csillapítása jellemezhető.

Csillapított szabadrezgés – kis csillapítás II.

$$\varrho=\xi\cdot\omega_0 \;,\; \omega_0^*=\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}$$

$$x(t)=e^{-\varrho t}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)$$

A csillapítás hatása a csillapítatlan esethez képest kettős:

1. Az amplitúdó csökkenése az $e^{-\varrho t}$ tag miatt.

2. A "periódusidő" megnövekedése az $\omega_0^*=\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}$ tag miatt: $T_0^*=\dfrac{2\pi}{\omega_0^*}=\dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}}$

Nézzük két, egymáshoz képest T_0^* idő különbséggel mérhető elmozdulás hányadosát:

$$\frac{x(t)}{x(t+T_0^*)}=\frac{e^{-\varrho t}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)}{e^{-\varrho(t+T_0^*)}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^*(t+T_0^*)\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^*(t+T_0^*)\right)\right)}=\frac{e^{-\varrho t}}{e^{-\varrho(t+T_0^*)}}\cdot\frac{A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)}{A\cdot\cos\left(\omega_0^* t+\omega_0^* T_0^*\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t+\omega_0^* T_0^*\right)}=$$

$$=\frac{\cancel{e^{-\varrho t}}}{\cancel{e^{-\varrho t}}\cdot e^{-\varrho T_0^*}}\cdot\cancel{\frac{A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)}{A\cdot\cos\left(\omega_0^* t+2\pi\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t+2\pi\right)}}=\frac{1}{e^{-\varrho T_0^*}}=\boxed{e^{\varrho T_0^*}}=e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

ez hányados csak a csillapítástól függ
akár ezzel is jellemezhető a csillapítás

A gyakorlatban a hányados e-alapú logaritmusát használják.
Ennek neve *logaritmikus dekrementum*:

$$\vartheta=\ln\frac{x(t)}{x(t+T_0^*)}=\boxed{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Ha a (kis) csillapítás kicsi $(\xi\ll 1)$,
akkor $\sqrt{1-\xi^2}\approx 1$ és
$\vartheta\approx 2\pi\xi$,
$\xi\approx\dfrac{\vartheta}{2\pi}$

A logaritmikus dekrementum gyakorlati haszna:
a kitérés maximumértékei (egymástól T_0^* időben) könnyen mérhetők
→ hányadosuk számítható → a szerkezet csillapítása jellemezhető.

Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

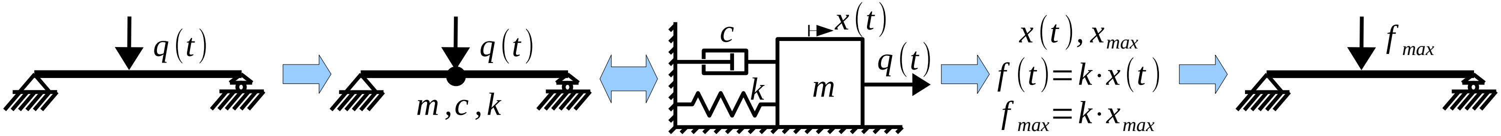
Rezgések osztályozása

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)$$

	$q(t)=0$ *szabadrezgés* (homogén DE)	$q(t)\neq 0$ *gerjesztett rezgés* (inhomogén DE)
$c=0$ *csillapítatlan rendszer* (hiányos DE)	*csillapítatlan szabadrezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$	*csillapítatlan, gerjesztett rezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)$
$c>0$ *csillapított rendszer*	*csillapított szabadrezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$	*csillapított, gerjesztett rezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)$

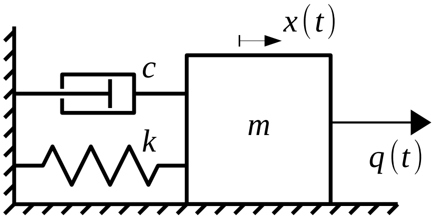
A differenciálegyenlet $x(t)$ megoldásának ki kell elégítenie a *kezdeti feltételeket* is.
Egy adott t_0 pillanatban az elmozdulás és a sebesség értéke előírt: x_0, illetve v_0, azaz:

$$x(t_0) = x_0 \qquad \dot{x}(t_0) = v_0$$

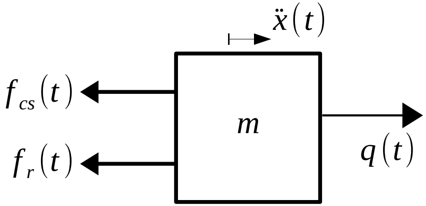


Gerjesztett rezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – I.

Modell



Elkülönítés



N2: $m\cdot\ddot{x}(t)=q(t)-f_r(t)-f_{cs}(t)$

lineáris rugó: $f_r(t)=k\cdot x(t)$

seb. arányos csill.: $f_{cs}(t)=c\cdot\dot{x}(t)$

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)}$$

Keressük $x(t)$-t, ha $x(t_0)=x_0$, és $\dot{x}(t_0)=v_0$.

Megoldás

A megoldás a *kiegészítő* (homogén) differenciálegyenlet általános és az inhomogén differenciálegyenlet egy *partikuláris* megoldásának összege:

$$x(t)=x_{hom}(t)+x_g(t)$$

$x_{hom}(t)$: mint a szabadrezgésnél A, B paraméterekkel

$x_g(t)$: gerjesztés miatti rész. Kereshetjük:

1. *Ansatz* -függvénnyel
valamilyen feltételezett alak, paraméterekkel
DE-be visszahelyettesítve keressük a paramétert
függvényszerű gerjesztés kell.

2. időlépéses módszerrel
csak t_i időpillanatokban számoljuk az elmozdulást, sebességet, de ezekben a pillanatokban kielégítjük a mozgás DE-ét.

3. a DE közvetlen integrálásával

Mozgásegyenlet megoldása – példa I.

$$m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$$

Legyen a csillapítatlan rendszerben a teher egy állandó intenzitású erő:

$$q(t)=b$$

Keressük a partikuláris megoldást hasonló (időben állandó) alakban:

$$x_g(t)=a$$

Ezt és a deriváltjait helyettesítsük be a mozgás differenciálegyenletébe:

$$\dot{x}_g(t)=0\,,\ddot{x}_g(t)=0$$

$$m\cdot 0+0\cdot 0+k\cdot a=b\rightarrow k\cdot a=b$$

Ez megoldható a-ra: $a=\frac{b}{k}$, és így a partikuláris megoldás: $x_g(t)=\frac{b}{k}$.

Az általános megoldás a kiegészítő egyenlet megoldásának és a partikuláris megoldásnak az összege:

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+\frac{b}{k}$$

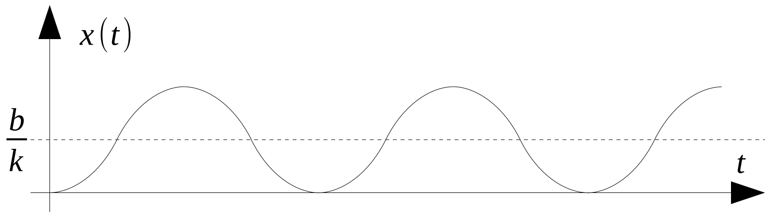
A és B a kezdeti feltételektől függ.

Legyen: $x(0)=0$ és $\dot{x}(0)=0$:

$$x(0):\ A\cdot 1+B\cdot 0+\frac{b}{k}=0\rightarrow A=-\frac{b}{k}$$

$$\dot{x}(0):\ -\omega_0\cdot A\cdot 0+\omega_0\cdot B\cdot 1+0=0\rightarrow B=0$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás: $x(t)=-\frac{b}{k}\cos(\omega_0 t)+\frac{b}{k}$



Mozgásegyenlet megoldása – példa II.

$$m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$$

Legyen a csillapítatlan rendszerben a teher egy lineárisan növekvő intenzitású erő:

$$q(t)=b\cdot t$$

Keressük a partikuláris megoldást hasonló (időben lineárisan változó) alakban:

$$x_g(t)=a\cdot t$$

Ezt és a deriváltjait helyettesítsük be a mozgás differenciálegyenletébe:

$$\dot{x}_g(t)=a\,,\ddot{x}_g(t)=0$$

$$m\cdot 0+0\cdot a+k\cdot a\cdot t=b\cdot t\rightarrow k\cdot a\cdot t=b\cdot t$$

Ez megoldható a-ra (bármilyen t esetén): $a=\frac{b}{k}$, és így a partikuláris megoldás: $x_g(t)=\frac{b}{k}\cdot t$.

Az általános megoldás a kiegészítő egyenlet megoldásának és a partikuláris megoldásnak az összege:

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+\frac{b}{k}\cdot t$$

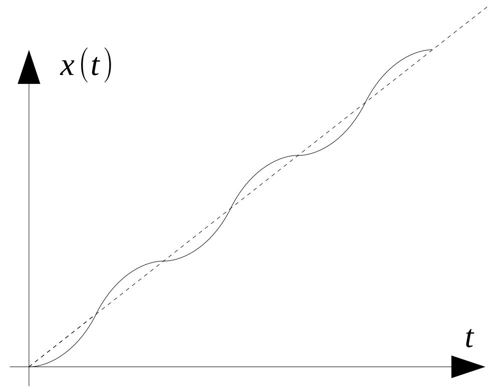
A és B a kezdeti feltételektől függ.

Legyen: $x(0)=0$ és $\dot{x}(0)=0$:

$$x(0):\; A\cdot 1+B\cdot 0+\frac{b}{k}\cdot 0=0\rightarrow A=0$$

$$\dot{x}(0):\; -\omega_0\cdot A\cdot 0+\omega_0\cdot B\cdot 1+\frac{b}{k}=0\rightarrow B=-\frac{b}{k\,\omega_0}$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás: $x(t)=-\frac{b}{k\,\omega_0}\sin(\omega_0 t)+\frac{b}{k}\cdot t$



Mozgásegyenlet megoldása – ellenpélda

$$m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$$

Legyen a csillapítatlan rendszerben a teher egy kvadratikusan növekvő intenzitású erő:

$$q(t)=b\cdot t^2$$

Keressük a partikuláris megoldást hasonló (időben kvadratikusan változó) alakban:

$$x_g(t)=a\cdot t^2$$

Ezt és a deriváltjait helyettesítsük be a mozgás differenciálegyenletébe:

$$\dot{x}_g(t)=2\cdot a\cdot t\,,\ \ddot{x}_g(t)=2\cdot a$$

$$m\cdot 2\cdot a+0\cdot 2\cdot a\cdot t+k\cdot a\cdot t^2=b\cdot t^2$$

$$m\cdot 2\cdot a+k\cdot a\cdot t^2=b\cdot t^2$$

$$\rightarrow a=\frac{b\cdot t^2}{2\cdot m+k\cdot t^2}$$

Ez nem olyan megoldás, ami független t-től és minden t-re igaz.

→ nem a feltételezett alakú a megoldás

(más alakban kellene keresni)

Mozgásegyenlet megoldása – példa III.

$$m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$$

Legyen a csillapítatlan rendszerben a teher egy impulzusteher (T ideig ható állandó intenzitású erő):

$$q(t)=\left\{\begin{array}{ll}0, & \text{ha } t<0\\ b, & \text{ha } 0<t<T\\ 0, & \text{ha } T<t\end{array}\right\}$$

Ha $t<0$, akkor az $x(t)=0$ a megoldás.

És legyen a kezdeti feltétel:
$x(0)=0$ és $\dot{x}(0)=0$

Ha $0<t<T$, akkor az első példában látott állandó teher esete áll fenn:

$$x(t)=-\frac{b}{k}\cos(\omega_0 t)+\frac{b}{k}$$

Ha $T<t$, akkor ismét az $x_g(t)=0$ a partikuláris megoldás, de a kezdeti feltételek most a $t=T$ pillanatban adottak:

$$x(T)=-\frac{b}{k}\cos(\omega_0 T)+\frac{b}{k} \text{ és } \dot{x}(t)=\omega_0\frac{b}{k}\sin(\omega_0 T)$$

$$\left.\begin{array}{r}A\cos(\omega_0 T)+B\sin(\omega_0 T)=-\frac{b}{k}\cos(\omega_0 T)+\frac{b}{k}\\ -\omega_0 A\sin(\omega_0 T)+\omega_0 B\cos(\omega_0 T)=\omega_0\frac{b}{k}\sin(\omega_0 T)\end{array}\right\}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}\cos(\omega_0 T) & \sin(\omega_0 T)\\ -\sin(\omega_0 T) & \cos(\omega_0 t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{b}{k}(1-\cos(\omega_0 T))\\ \frac{b}{k}\sin(\omega_0 T)\end{bmatrix}$$

Mozgásegyenlet megoldása – példa III.

$$m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$$

$$\begin{bmatrix}\cos(\omega_0 T) & \sin(\omega_0 T)\\ -\sin(\omega_0 T) & \cos(\omega_0 t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{b}{k}\left(1-\cos(\omega_0 T)\right)\\ \frac{b}{k}\sin(\omega_0 T)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\omega_0 T) & -\sin(\omega_0 T)\\ \sin(\omega_0 T) & \cos(\omega_0 t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{b}{k}\left(1-\cos(\omega_0 T)\right)\\ \frac{b}{k}\sin(\omega_0 T)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{b}{k}\left(\cos(\omega_0 T)-\cos^2(\omega_0 T)-\sin^2(\omega_0 T)\right)\\ \frac{b}{k}\left(\sin(\omega_0 T)-\cos(\omega_0 T)\sin(\omega_0 T)+\sin(\omega_0 T)\cos(\omega_0 T)\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{b}{k}\left(\cos(\omega_0 T)-1\right)\\ \frac{b}{k}\sin(\omega_0 T)\end{bmatrix}$$

A megoldást a három szakaszból összerakva:

$$x(t)=\left\{\begin{matrix}0 & \text{ha } t<0\\ \frac{b}{k}\left(1-\cos(\omega_0 t)\right) & \text{ha } 0<t<T\\ \frac{b}{k}\left(\left(\cos(\omega_0 T)-1\right)\cos(\omega_0 t)+\sin(\omega_0 T)\sin(\omega_0 t)\right) & \text{ha } T<t\end{matrix}\right)$$

A harmadik szakasz amplitúdója:

$$C=\sqrt{A^2+B^2}=\frac{b}{k}\sqrt{\cos^2(\omega_0 T)-2\cos(\omega_0 T)+1+\sin^2(\omega_0 T)}=\frac{b}{k}\sqrt{2-2\cos(\omega_0 T)}$$

Ennek maximuma $2\cdot\frac{b}{k}$, ha $\omega_0 T=(2j-1)\pi$ $\left(\text{pl. } T=\frac{\pi}{\omega_0}=\frac{T_0}{2}\right)$

Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

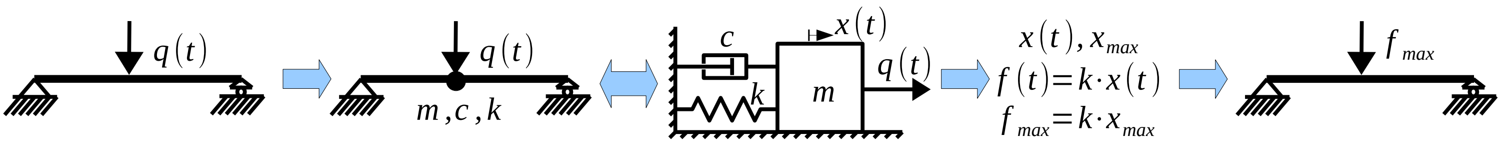
Rezgések osztályozása

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)}$$

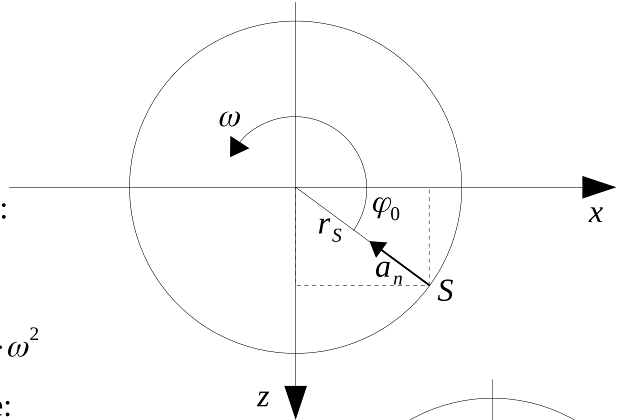
	$q(t)=0$ *szabadrezgés* (homogén DE)	$q(t)\neq 0$ *gerjesztett rezgés* (inhomogén DE)
$c=0$ *csillapítatlan rendszer* (hiányos DE)	*csillapítatlan szabadrezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=0$	*csillapítatlan, gerjesztett rezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$
$c>0$ *csillapított rendszer*	*csillapított szabadrezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=0$	*csillapított, gerjesztett rezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$

A differenciálegyenlet $x(t)$ megoldásának ki kell elégítenie a *kezdeti feltételeket* is.
Egy adott t_0 pillanatban az elmozdulás és a sebesség értéke előírt: x_0, illetve v_0, azaz:

$$x(t_0)=x_0 \qquad \dot{x}(t_0)=v_0$$



Gerjesztett rezgés – harmonikus gerjesztőerő



Merev test forog ω szögsebességgel egy,
a súlypontján nem átmenő tengely körül.

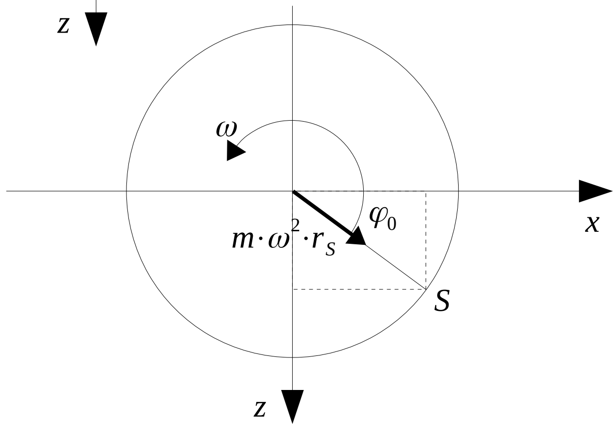
A külpontosság legyen r_S.

A súlypont egyenletes körmozgást végez, helyzete:

$$\boldsymbol{r}_S = \begin{bmatrix} r_S \cdot \cos(\omega t - \varphi_0) \\ -r_S \cdot \sin(\omega t - \varphi_0) \end{bmatrix}$$

A súlypont gyorsulása a forgástengely felé: $a_n = r_S \cdot \omega^2$

Súlyponttétel: a merev testre ható erők eredője:
$m \cdot a_n$, a kör középpontja felé mutat



Ez az erő a tengelyről (a tartószerkezetről)
adódik át a testre

Hatás-ellenhatás: a forgás tengelyére, így
a tartószerkezetre ugyanekkora, de ellentétes
irányú erő hat:

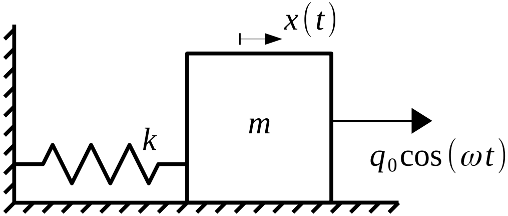
$$\boldsymbol{q}(t) = \begin{bmatrix} m \cdot \omega^2 \cdot r_S \cdot \cos(\omega t - \varphi_0) \\ -m \cdot \omega^2 \cdot r_S \cdot \sin(\omega t - \varphi_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi_0) \\ -q_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi_0) \end{bmatrix}$$

Egyetlen irányban ω körfrekvenciájú q_0 amplitúdójú harmonikus gerjesztőerő:

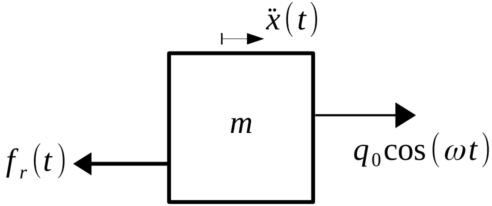
$$q(t) = q_0 \cdot \cos(\omega t), \text{ vagy } q(t) = q_0 \cdot \sin(\omega t)$$

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet, megoldás – I.

Modell



Elkülönítés



N2: $m \cdot \ddot{x}(t) = q_0 \cos(\omega t) - f_r(t)$

lineáris rugó: $f_r(t) = k \cdot x(t)$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = q_0 \cos(\omega t)}$$

Keressük $x(t)$-t, ha $x(t_0) = x_0$, és $\dot{x}(t_0) = v_0$.

Megoldás

Keressük a partikuláris megoldást a gerjesztéshez hasonló alakban:

$$x_g(t) = x_{g0} \cos(\omega t)$$

Így: $\dot{x}_g(t) = -\omega x_{g0} \sin(\omega t)$, $\ddot{x}_g(t) = -\omega^2 x_{g0} \cos(\omega t)$

Behelyettesítve a DE-be:

$$-m \omega^2 x_{g0} \cos(\omega t) + k x_{g0} \cos(\omega t) = q_0 \cos(\omega t)$$

Egyszerűsítsünk $\cos(\omega t)$-vel:

$$-m \omega^2 x_{g0} + k x_{g0} = q_0$$

$$(k - m \omega^2) x_{g0} = q_0$$

T.f.h. $k \neq m \omega^2$ (azaz $\omega \neq \omega_0$)

$$x_{g0} = \frac{q_0}{k - m \omega^2} = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{m \omega^2}{k}} = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

A gerjesztésre adott *válasz*:

$$x_g(t) = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega t)$$

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet, megoldás – II.

$$x_g(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)$$

A teljes megoldás:

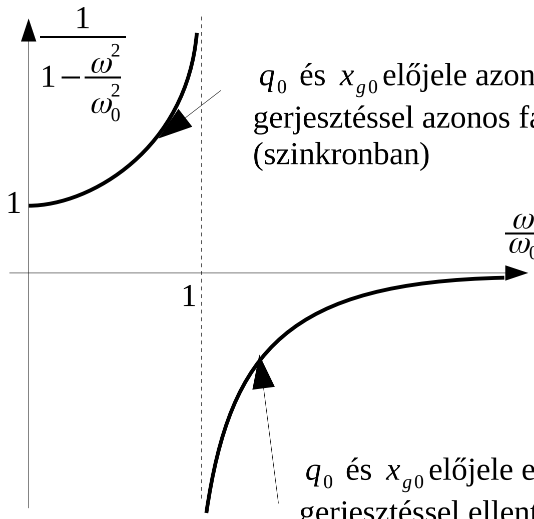
$$x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+\boxed{\frac{q_0}{k}}\boxed{\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\boxed{\cos(\omega t)}$$

a válasz időfüggése
(azonos a teher időfüggésével)

$\dfrac{\text{gerjesztőerő amplitúdója}}{\text{rugómerevség}}$

x_{st}: *statikus elmozdulás*

a két körfrekvencia hányadosától
függő tényező



q_0 és x_{g0} előjele azonos, a test a gerjesztéssel azonos fázisban rezeg (szinkronban)

q_0 és x_{g0} előjele ellentétes, a test a gerjesztéssel ellentétes fázisban rezeg (aszinkron mozgás)

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet, megoldás – III.

$$x_g(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)$$

A teljes megoldás:

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\cos(\omega t)$$

Def.: *rezonancia*.
Ha a gerjsztőerő frekvenciája megegyezik a sajátkörfrekvenciával $(\omega=\omega_0)$, akkor a fenti megoldás nem érvényes.
A megoldást

$$x_g(t)=x_{g0}t\sin(\omega t)$$

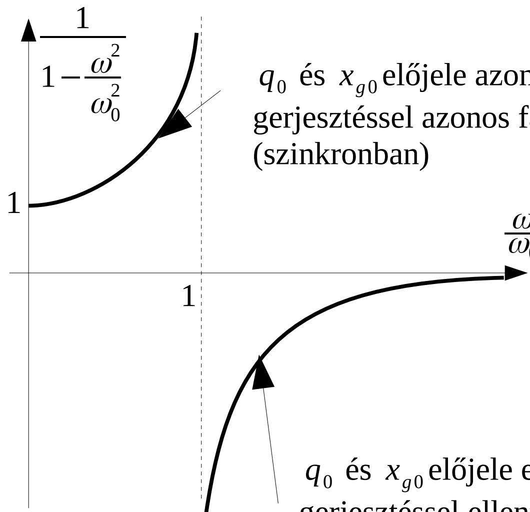
alakban kellene keresni.
Folyamatosan (végtelenig) növekvő amplitúdójú rezgés alakul ki.

A partikuláris megoldást írhatnánk úgy is, hogy:

$$x_g(t)=\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}\cos(\omega t-\varphi)$$

ahol $\varphi=\begin{cases}0 & \text{ha } \omega<\omega_0\\ \pi/2 & \text{ha } \omega=\omega_0\\ \pi & \text{ha } \omega_0<\omega\end{cases}$

a válasz *késése* a gerjesztéshez képest.



q_0 és x_{g0} előjele azonos, a test a gerjesztéssel azonos fázisban rezeg (szinkronban)

q_0 és x_{g0} előjele ellentétes, a test a gerjesztéssel ellentétes fázisban rezeg (aszinkron mozgás)

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet, megoldás – IV.

$$x_g(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)$$

A teljes megoldás:

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\cos(\omega t)$$

Példa a kezdeti feltételek kielégítésére, ha $x(0)=x_0$ és $\dot{x}(0)=v_0$:

$$x_0=A\cdot 1+B\cdot 0+\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot 1 \qquad \rightarrow A=x_0-\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$v_0=-\omega_0 A\cdot 0+\omega_0 B\cdot 1-\omega\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot 0 \qquad \rightarrow B=\frac{v_0}{\omega_0}$$

$$x(t)=\underbrace{\left(x_0-\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)\cos(\omega_0 t)+\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}_{\text{ha lenne csillapítás, ez a rész idővel lecsengene ún. } \textit{tranziens rezgésrész}}+\underbrace{\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\cos(\omega t)}_{\text{ez a rész hosszú távon is megmarad: } \textit{állandósult rezgésrész}}$$

ha lenne csillapítás, ez a rész
idővel lecsengene
ún. *tranziens rezgésrész*

ez a rész hosszú távon is
megmarad: *állandósult rezgésrész*

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet, megoldás – V.

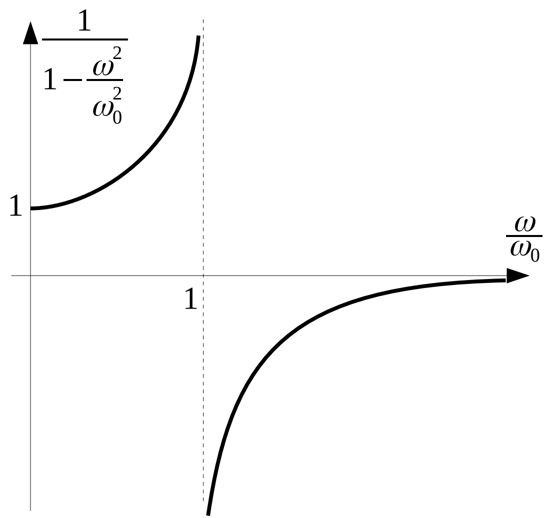
Az állandósult rezgésrész: $x_{áll}(t)=x_g(t)=\dfrac{q_0}{k}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\cos(\omega t)$

Hosszútávon ennek csak az amlitúdója érdekes
(a harmonikus fv. miatt -1..1-gyel szorzódik)

Az állandósult rezgésrész amplitúdója:

$$x_á=\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{\left|1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}$$

$$x_á=x_{st}\cdot\mu$$



x_{st}: a gerjesztőerő amplitúdója miatti statikus elmozdulás

$\mu=\dfrac{1}{\left|1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}$: rezonanciatényező

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet, megoldás – V.

Az állandósult rezgésrész: $x_{áll}(t)=x_g(t)=\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\cos(\omega t)$

Hosszútávon ennek csak az amlitúdója érdekes
(a harmonikus fv. miatt -1..1-gyel szorzódik)

Az állandósult rezgésrész amplitúdója:

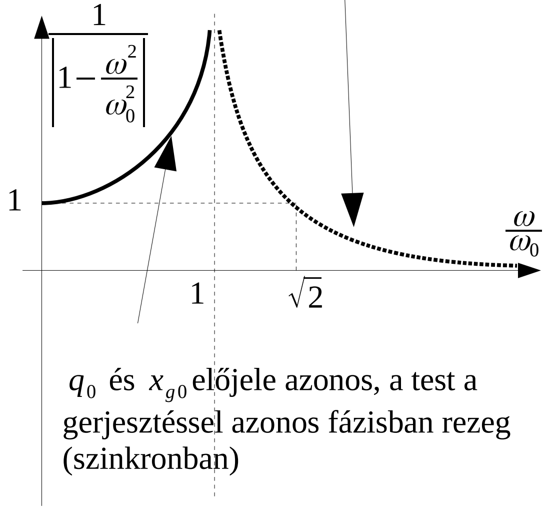
$$x_á=\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}$$

$$x_á=x_{st}\cdot\mu$$

x_{st}: a gerjesztőerő amplitúdója miatti statikus elmozdulás

$\mu=\frac{1}{\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}$: rezonanciatényező

q_0 és x_{g0} előjele ellentétes, a test a gerjesztéssel ellentétes fázisban rezeg (aszinkron mozgás)



q_0 és x_{g0} előjele azonos, a test a gerjesztéssel azonos fázisban rezeg (szinkronban)

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet, megoldás VI.

$$x_{áll} = x_{st} \cdot \mu \cos(\omega t)$$

$$\mu = \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}$$

Rezonanciatényező jellemzői:

$\omega < \omega_0$: $\mu > 1$, rezgés azonos fázisban

$\omega = \omega_0$: rezonancia! μ nincs értelmezve!

$\omega_0 < \omega < \sqrt{2}\,\omega_0$: $\mu > 1$, rezgés ellenfázisban

$\sqrt{2}\,\omega_0 < \omega$: $\mu < 1$, rezgés ellenfázisban

Bármilyen kis rezonanciatényező elérhető,
de pár szempontra figyelni kell:

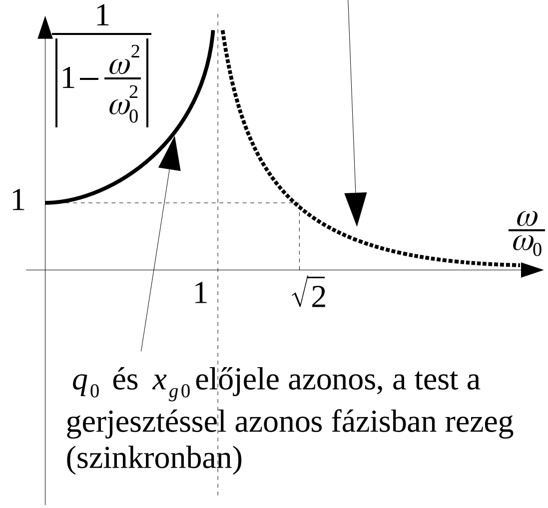
¤ kis ω_0: kis merevség, vagy nagy tömeg
nagy elmozdulások a statikus terhekből

¤ felpörgő/leálló gép a rezonancia környékén levő gerjesztéssel jár együtt:

¤ lassú leállítás: kialakulhat a nagy amplitúdó

¤ gyors leállítás: a gép esetleg nem bírja

q_0 és x_{g0} előjele ellentétes, a test a gerjesztéssel ellentétes fázisban rezeg (aszinkron mozgás)



q_0 és x_{g0} előjele azonos, a test a gerjesztéssel azonos fázisban rezeg (szinkronban)

Rugóerő az állandósult rezgésből:

$$f_r(t) = k\,x_g(t) = k\frac{q_0}{k}\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t) = q_0\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)$$

Szerkezetre ható erő szélsőértéke: $f_r^{max} = q_0 \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|} = q_0 \cdot \mu$

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése – szinuszos gerjesztőerő

A differenciálegyenlet alakja, ha $q(t)=q_0\sin(\omega t)$:

$$m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=q_0\sin(\omega t)$$

Keressük a partikuláris megoldást a gerjesztéshez hasonló alakban:

$$x_g(t)=x_{g0}\sin(\omega t)$$
$$\ddot{x}_g(t)=-\omega^2 x_{g0}\sin(\omega t)$$
$$\vdots$$

A teljes megoldás:

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\sin(\omega t)$$

Hiszen csak az idő tengelyét toltuk el $\frac{\pi}{2\omega}$-val.