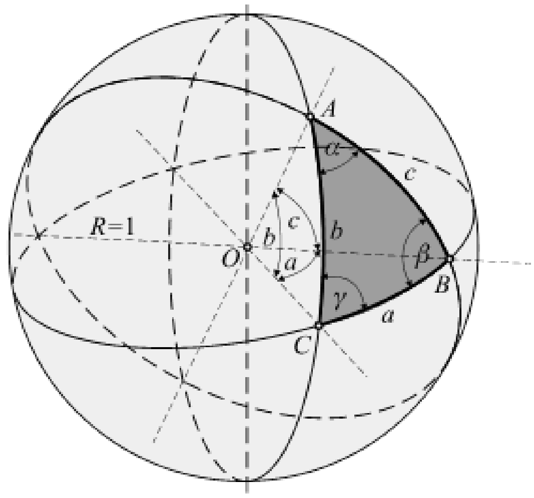
Vetülettan - 3. előadás vázlata

1 GÖMBHÁROMSZÖGTANI SZÁMÍTÁSOK

- A gömbháromszög mindegyik oldalának egy-egy *főkörív* felel meg. Csúcsai ezek metszéspontjai.
- A gömbháromszög *a, b, c* oldalán az origót a csúcsokkal összekötő három félegyenes által páronként bezárt szöget értjük.
- Az *a, b, c* oldalakkal szemközti szögek a gömbháromszög szögei: α, β, γ.
- Mind az oldalakat, mind a szögeket *szögértékben* fejezzük ki.



2 GÖMBI SZÖGFELESLEG

A *gömbháromszög szögeinek összege* mindig nagyobb 180°-nál:

$$180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$$

- Az $\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - 180°$ különbséget a gömbháromszög ***gömbi szögfeleslegének*** nevezzük.
- Az ε számítható a gömbháromszög területéből is: $\varepsilon = \dfrac{F}{R^2}\rho$

ahol F a gömbháromszög területe, R a gömb sugara, ρ pedig az analitikus szögegységnek megfelelő fok- vagy másodperc-érték ($\rho° = \dfrac{180°}{\pi}$, $\rho'' = \dfrac{180}{\pi} 3600'' = 206\,264{,}806\,2471''$.)

- Ha ismerjük a gömbháromszög két oldalát és a közbezárt szöget:

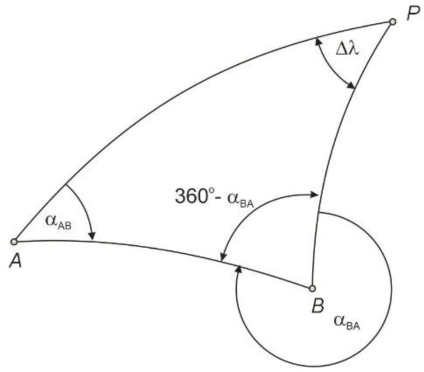
$$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\sin\gamma}{1 + \tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\cos\gamma}.$$

- A gömbháromszög 3 oldalának ismeretében:

$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}, \text{ ahol } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

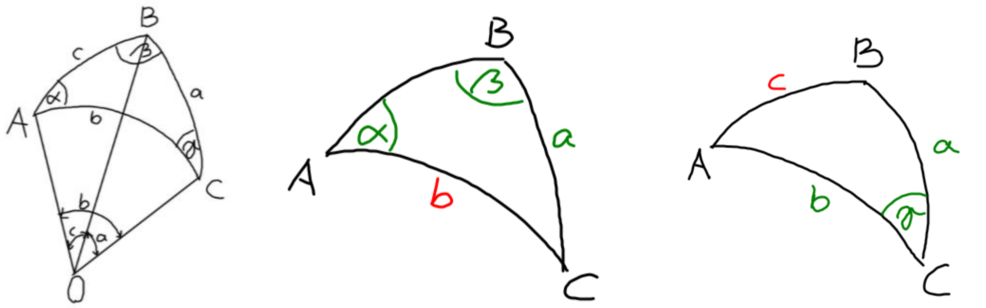
3 VALÓDI GÖMBI MERIDIÁN KONVERGENCIA

A valódi gömbi meridián konvergencia két pontot összekötő ortodróma végpontjaiban az azimut és ellenazimut 180°-tól eltérő különbsége:



- $\gamma = \alpha_{BA} - \alpha_{AB} \pm 180°$
- γ poláris gömbháromszögből számítható!
- Levezetés: $\alpha_{AB} + 360° - \alpha_{BA} + \Delta\lambda = 180° + \varepsilon$
  átrendezve: $\alpha_{BA} = \alpha_{AB} \pm 180° + \Delta\lambda - \varepsilon$
- tehát a valódi gömbi meridiánkonvergencia:
  $\gamma = \Delta\lambda - \varepsilon.$

4 ALAPVETŐ ÖSSZEFÜGGÉSEK



1. Gömbi szinusztétel:

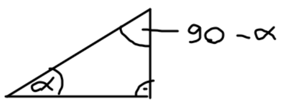
$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

2. Gömbi oldal koszinusz tétel:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$$

3. $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$ (szög koszinusztétel)
4. $\sin a \, ctg b = ctg\beta \sin\gamma + \cos a \cos\gamma$,
5. $\sin\alpha \, ctg\beta = ctg b \sin c - \cos\alpha \cos c$.

<u>Szögfüggvények összefüggései</u>



$\cos(90 - \alpha) = \sin\alpha$

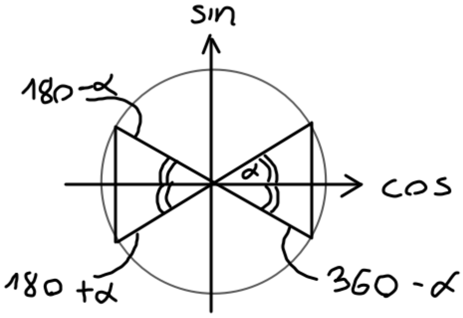
$\sin(90 - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(180 - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(360 - \alpha) = \cos\alpha$

$\sin(360 - \alpha) = -\sin\alpha$



Ha adva van	akkor a többi alkotórészeket megadó formulák száma
a három oldal: *a, b, c,*	α(2), β és γ(1)
a három szög: α, β, γ,	*a*(3), *b* és *c*(1)
két oldal és az általuk közbezárt szög: *a, b,* γ,	β(4), α és c(1)
egy oldal és a rajta lévő két szög: *c,* α, β,	*b*(5), *a* és γ(1)
két oldal és az egyikkel szemben levő szög: *a, b,* β	α(1), *c*(Napier), γ(1)
két szög és az egyikkel szemben levő oldal: α, β, *b*,	*a*(1), *c*(Napier), γ(1)

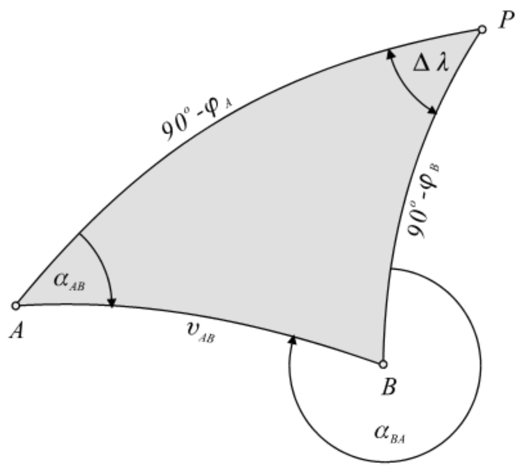
Napier (Neper) képletek:

$$tg\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}tg\frac{c}{2}\,, \qquad tg\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}}{\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}}tg\frac{c}{2}$$

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{(a-b)}{2}}{\cos\frac{(a+b)}{2}}ctg\frac{\gamma}{2}\,, \qquad tg\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{(a-b)}{2}}{\sin\frac{(a+b)}{2}}ctg\frac{\gamma}{2}$$

5 ELSŐ GEODÉZIAI FŐFELADAT GÖMBÖN

$\varphi_A,\ \lambda_A,\ \alpha_{AB},\ s_{AB}\ \rightarrow\ \varphi_B,\ \lambda_B,\ \alpha_{BA}$



Adottak: az *A* pont φ_A , λ_A gömbi földrajzi koordinátái, az *A* pontbeli α_{AB} azimut, az *A* és a *B* pontok közötti s_{AB} gömbi ívhossz és a gömb *R* sugara *(2. ábra)*.

Számítandók: a *B* pont φ_B , λ_B gömbi földrajzi koordinátái és a *B* pontbeli α_{BA} azimut.

Megoldás:

Az *AB* ívhez tartozó középponti szög:

$$\upsilon°_{AB}=\frac{s_{AB}}{R}\rho° \quad \text{,ahol } \rho°=\frac{180°}{\pi}\,.$$

A *B* pont gömbi földrajzi koordinátái:

$$\sin\varphi_B = \cos\upsilon_{AB}\sin\varphi_A + \sin\upsilon_{AB}\cos\varphi_A\cos\alpha_{AB}\,.$$

$$\sin\Delta\lambda = \frac{\sin\alpha_{AB}\sin\upsilon_{AB}}{\cos\varphi_B}, \qquad \lambda_B = \lambda_A + \Delta\lambda_{AB}\,.$$

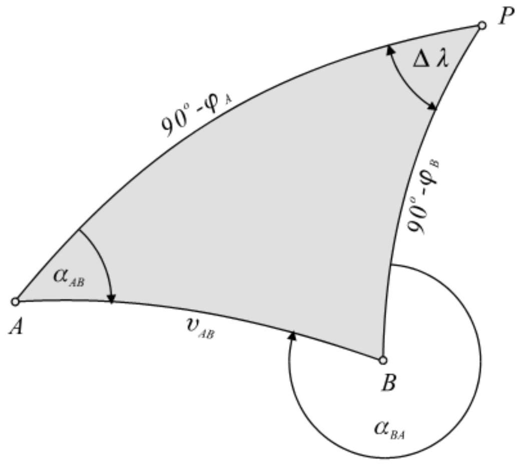
Az ellenazimut szinusza:

$$\sin\alpha_{BA} = -\frac{\sin\Delta\lambda_{AB}\cos\varphi_A}{\sin\upsilon_{AB}}\,.$$

6 MÁSODIK GEODÉZIAI FŐFELADAT GÖMBÖN

φ_A , λ_A , φ_B , λ_B $\rightarrow$ α_{AB} , α_{BA} , s_{AB}

Adottak: az *A* és *B* pontok φ_A , λ_A és φ_B , λ_B gömbi földrajzi koordinátái *(2. ábra)*.



Számítandók: az *A* és *B* pontbeli α_{AB} és α_{BA} azimut és a két pont közti s_{AB} gömbi ív hossza.

Megoldás:

Az *AB* ívhez tartozó középponti szög:

$$\cos\upsilon_{AB} = \sin\varphi_A\sin\varphi_B + \cos\varphi_A\cos\varphi_B\cos\Delta\lambda_{AB}\,,$$

ahol: $\Delta\lambda_{AB} = \lambda_B - \lambda_A$.

A gömbi ívhossz:

$$s_{AB} = \frac{R\upsilon_{AB}}{\rho}\,.$$

Az *A* és *B* pontbeli azimutok szinuszai:

$$\left[\sin\alpha_{AB} = \frac{\sin\Delta\lambda_{AB}\cos\varphi_B}{\sin\upsilon_{AB}}\right] \quad (1)$$

A kiszámított szinusz értékekből csak szemlélet alapján tudjuk eldönteni, hogy az α szögek melyik szögnegyedben vannak. Egyértelművé akkor válik a feladat, ha a $\cos\alpha$-t is kiszámítjuk:

$$\left[\cos\alpha_{AB} = \frac{\sin\varphi_B - \sin\varphi_A\cos\upsilon_{AB}}{\cos\varphi_A\sin\upsilon_{AB}}\right] \quad (2)$$

cos(α) = cos(360°-α)

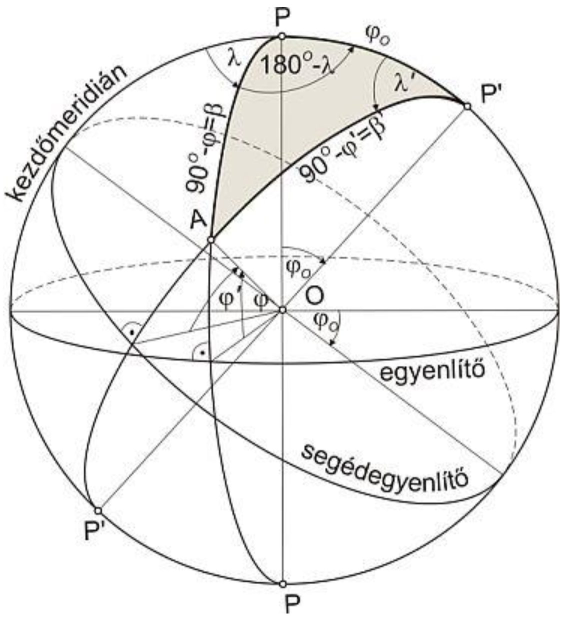
Ezután már csak a szögletes zárójelbe tett képleteket használjuk.

Ha α_{AB} (1) $\geq$ 0, akkor $\alpha_{AB} = \alpha_{AB}(2)$, máskor $\alpha_{AB} = 360° - \alpha_{AB}(2)$.

Az α_{BA} számításához a képletekben az *A, B* indexeket felcseréljük.

7 ÁTSZÁMÍTÁS SEGÉD FÖLDRAJZI KOORDINÁTA RENDSZERBE

A földrajzi koordinátákat a Föld forgástengelyét képviselő átmérőhöz viszonyítottuk. Vetülettani számításokban gyakran előfordul, hogy nem a pólusokat összekötő átmérőhöz, hanem a gömbnek egy másik átmérőjéhez kell adatainkat viszonyítani. Ilyenkor az új átmérő végpontjait *segédpólusnak*, a gömb középpontjában az átmérőre merőlegesen fektetett síknak a gömbfelülettel alkotott metszésvonalát *segédegyenlítőnek*, a vele párhuzamos síkok gömbfelülettel való metszeteit pedig *segédmeridiánoknak* nevezzük. A segédparalelkörök és segédmeridiánok hálózata a *segédfokhálózat*. Ebben a rendszerben a földrajzi koordináták mintájára alakított koordináták a *segéd földrajzi koordináták*: a *segéd földrajzi szélesség* (φ') és a *segéd földrajzi hosszúság* (λ'). A segéd földrajzi szélesség pótszögét (β') *segéd-pólustávolságnak* nevezzük.



1.5. ábra. Gömbi segéd földrajzi koordináták

A λ'szöget a segédpólus valódi meridiánjától számítjuk, mert ez az egyetlen gömbi főkör, amely a segédpóluson átmenő segéd- és egyben valódi meridián is (*1.5. ábra*). Az ábrán felvázoltuk a *P* pólust és az egyenlítőt, a *P′* segédpólust és a segédegyenlítőt, valamint egy tetszőleges *A* pont meridiánját és segédmeridiánját. A φ_o az egyenlítő síkja és a segédegyenlítő síkja által bezárt szög, amely egyenlő a *P′* valódi pólustávolságával ($\beta_{P'}$). A valódi és a segéd földrajzi koordináták közötti összefüggés az *A P P′ poláris gömbháromszögből* megállapítható. Ha ismertek az *A* pont φ és λ valódi földrajzi koordinátái, akkor a gömbháromszög oldal-koszinusz és szinusz tételének alkalmazásával az egyenlítő síkjával φ_o szöget bezáró segédegyenlítőre vonatkozó segéd földrajzi koordináták a

$$\sin\varphi' = \sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\,\sin\varphi_0\cos\lambda,$$

(1.2)

$$\sin\lambda' = \frac{\cos\varphi \sin\lambda}{\cos\varphi'}$$

képletekből számíthatók. Ha pedig a segéd földrajzi koordináták adottak, akkor a valódi földrajzi koordinátákat a

$$\sin\varphi = \sin\varphi' \cos\varphi_0 + \cos\varphi' \sin\varphi_0 \cos\lambda',$$

(1.3)

$$\sin\lambda = \frac{\cos\varphi' \sin\lambda'}{\cos\varphi}$$

képletekből határozzuk meg.