Tartók dinamikája BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Mit tanultunk eddig?

Csillapítatlan és csillapított egyszabadságfokú rendszerek szabadrezgése

Csillapítatlan egyszabadságfokú rendszer gerjesztett rezgése

Mit fogunk tanulni ma?

Csillapított egyszabadságfokú rendszer gerjeszetett rezgése - harmonikus gerjesztés

Egyszabadságfokú rendszer támaszrezgése

Szuperpozíció, periodikus gerjesztés

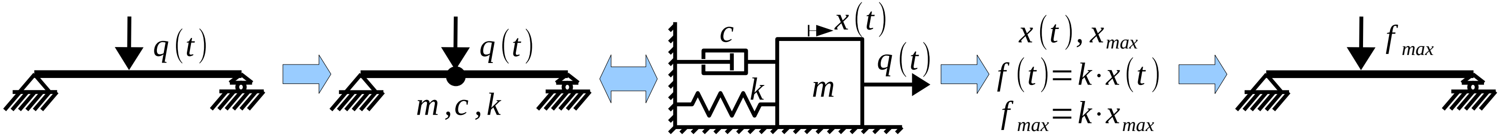
Rezgések osztályozása

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)$$

	$q(t)=0$ *szabadrezgés* (homogén DE)	$q(t)\neq 0$ *gerjesztett rezgés* (inhomogén DE)
$c=0$ *csillapítatlan rendszer* (hiányos DE)	*csillapítatlan szabadrezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$	*csillapítatlan, gerjesztett rezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)$
$c>0$ *csillapított rendszer*	*csillapított szabadrezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$	*csillapított, gerjesztett rezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)$

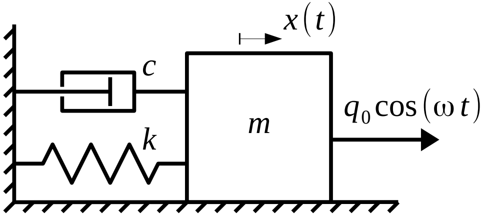
A differenciálegyenlet $x(t)$ megoldásának ki kell elégítenie a *kezdeti feltételeket* is.
Egy adott t_0 pillanatban az elmozdulás és a sebesség értéke előírt: x_0, illetve v_0, azaz:

$$x(t_0) = x_0 \qquad \dot{x}(t_0) = v_0$$

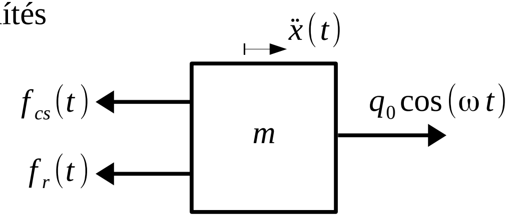


Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – I.

Modell



Elkülönítés



N2: $m \cdot \ddot{x}(t) = q_0 \cos(\omega t) - f_r(t) - f_{cs}(t)$

lineáris rugó: $f_r(t) = k \cdot x(t)$

seb. arányos csill.: $f_{cs}(t) = c \cdot \dot{x}(t)$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q_0 \cos(\omega t)}$$

Keressük $x(t)$-t, ha $x(t_0) = x_0$, és $\dot{x}(t_0) = v_0$.

Megoldás

A megoldás a homogén differenciálegyenlet általános, és az inhomogén differenciálegyenlet egy *partikuláris* megoldásának összege:

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_g(t)$$

A homogén egyenlet megoldásának általános alakja:

$$x_{hom}(t) = e^{-\varrho t} \cdot \left(A \cdot \cos\left(\omega_0^* t\right) + B \cdot \sin\left(\omega_0^* t\right) \right)$$

Keressük a partikuláris megoldást a gerjesztőerő függvényéhez hasonló alakban:

$$x_g(t) = x_{g0} \cdot \cos(\omega t - \varphi_0)$$

azaz a válasz φ_0 szöggel *késik* a gerjesztéshez képest.

Így: $\dot{x}_g(t) = -x_{g0}\, \omega \sin(\omega t - \varphi_0)$,

$\ddot{x}_g(t) = -x_{g0}\, \omega^2 \cos(\omega t - \varphi_0)$

Behelyettesítve a DE-be:

$$-m \cdot \omega^2 \cdot x_{g0} \cos(\omega t - \varphi_0) - c \cdot \omega \cdot x_{g0} \sin(\omega t - \varphi_0) +$$
$$+ k \cdot x_{g0} \cos(\omega t - \varphi_0) = q_0 \cdot \cos(\omega t)$$

Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – II.

Behelyettesítve a DE-be:

$$-m\cdot\omega^2\cdot x_{g0}\cos(\omega t-\varphi_0)-c\cdot\omega\cdot x_{g0}\sin(\omega t-\varphi_0)+k\cdot x_{g0}\cos(\omega t-\varphi_0)=q_0\cdot\cos(\omega t)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

A trigonometriai azonosságokat felhasználva:

$$-m\cdot\omega^2\cdot x_{g0}\left(\cos(\omega t)\cos\varphi_0+\sin(\omega t)\sin\varphi_0\right)-c\cdot\omega\cdot x_{g0}\left(\sin(\omega t)\cos\varphi_0-\cos(\omega t)\sin\varphi_0\right)+$$
$$+k\cdot x_{g0}\left(\cos(\omega t)\cos\varphi_0+\sin(\omega t)\sin\varphi_0\right)-q_0\cdot\cos(\omega t)=0$$

az időben szinuszos és koszinuszos tagokat szétválasztva

$$\cos(\omega t)\left(-m\cdot\omega^2\cdot x_{g0}\cos\varphi_0+c\cdot\omega\cdot x_{g0}\cdot\sin\varphi_0+k\cdot x_{g0}\cos\varphi_0-q_0\right)+$$
$$+\sin(\omega t)\left(-m\cdot\omega^2\cdot x_{g0}\sin\varphi_0-c\cdot\omega\cdot x_{g0}\cdot\cos\varphi_0+k\cdot x_{g0}\sin\varphi_0\right)=0$$

(1) Ha $\sin(\omega t)=0$ akkor $\cos(\omega t)\neq 0$ és: $-m\cdot\omega^2\cdot x_{g0}\cos\varphi_0+c\cdot\omega\cdot x_{g0}\sin\varphi_0+k\cdot x_{g0}\cos\varphi_0-q_0=0$

(2) Ha $\cos(\omega t)=0$ akkor $\sin(\omega t)\neq 0$ és: $-m\cdot\omega^2\cdot x_{g0}\sin\varphi_0-c\cdot\omega\cdot x_{g0}\cos\varphi_0+k\cdot x_{g0}\sin\varphi_0=0$

A (2) egyenletből:

$$(k-m\cdot\omega^2)\sin\varphi_0=c\,\omega\cos\varphi_0 \quad\rightarrow\quad \mathrm{tg}\,\varphi_0=\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2} \quad\rightarrow\quad \varphi_0=\mathrm{arctg}\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+1}}$$
$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+1}}$$

Ezt használjuk fel az (1) egyenletben:

$$x_{g0}\left((k-m\cdot\omega^2)\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2}\right)^2+1}}+c\cdot\omega\cdot\frac{\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2}}{\sqrt{\left(\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2}\right)^2+1}}\right)=q_0$$

Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – III.

$$\mathrm{tg}\,\varphi_0 = \frac{c\,\omega}{k - m\cdot\omega^2}$$

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\,\frac{c\,\omega}{k - m\cdot\omega^2}$$

$$x_{g0}\left((k - m\cdot\omega^2)\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2}\right)^2 + 1}} + c\cdot\omega\cdot\frac{\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2}}{\sqrt{\left(\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2}\right)^2 + 1}} \right) = q_0$$

$$x_{g0}\left(\frac{(k-m\cdot\omega^2)^2}{\sqrt{(c\,\omega)^2 + (k-m\cdot\omega^2)^2}} + \frac{(c\,\omega)^2}{\sqrt{(c\,\omega)^2 + (k-m\cdot\omega^2)^2}} \right) = x_{g0}\sqrt{(k-m\cdot\omega^2)^2 + (c\,\omega)^2} = q_0$$

Amiből a válasz amplitúdója:

$$x_{g0} = \frac{q_0}{\sqrt{(k-m\cdot\omega^2)^2 + (c\,\omega)^2}} = \frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{m}{k}\cdot\omega^2\right)^2 + \left(\frac{c}{k}\,\omega\right)^2}} = \frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\,\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$c = \xi\cdot 2\sqrt{k\cdot m}$$

$$\frac{2\,\xi\sqrt{k\,m}\,\omega}{k - m\,\omega^2} = \frac{2\,\xi\,\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

A partikuláris megoldás:

$$x_g(t) = \frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\,\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\cos\left(\omega\,t - \mathrm{arctg}\,\frac{2\,\xi\,\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – IV.

A teljes megoldás:

$$x(t)=e^{-\xi\omega_0 t}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)+\boxed{\frac{q_0}{k}}\boxed{\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}}\cos\left(\omega t-\mathrm{arctg}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

gerjesztés amplitúdója/rugómerevség
➔ statikus elmozdulás x_{st}

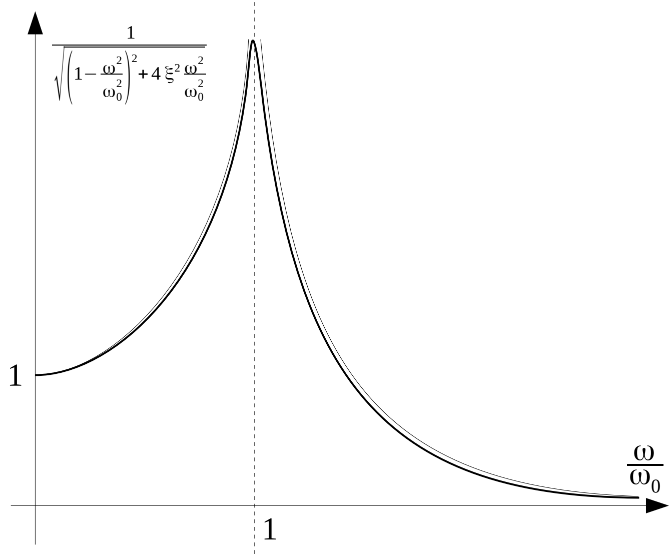
a két körfrekvencia viszonyától függő tényező:

Az állandósult rezgésrész
(most nyilvánvaló a tranziens rész lecsengése):

$$x_{áll}(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\cos\left(\omega t-\mathrm{arctg}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

Az állandósult rezgés amplitúdója:

$$x_á(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}=x_{st}\cdot\mu$$



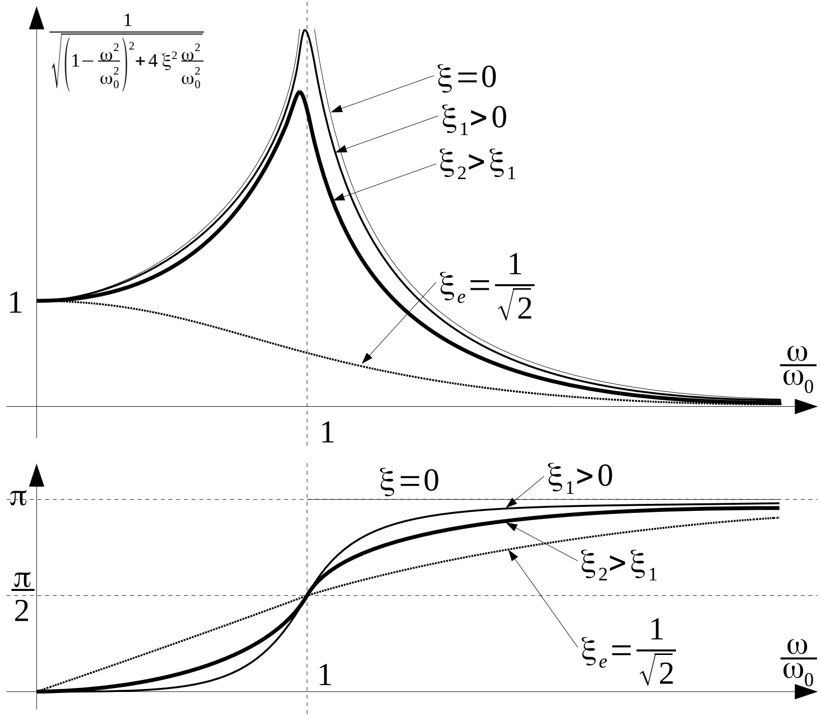
Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés – rezonancia, rezonanciatényező I.

$$x_{áll}(t)=x_{st}\cdot\mu\cdot\cos(\omega t-\varphi_0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\ \text{jellemzői:}$$

$$x_{áll}(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\cos\left(\omega t-\mathrm{arctg}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

- pozitív ➔ csilapított rezonanciatényező μ (a fázis már φ_0-ban benne van)
- mindig kisebb a csillapítatlan rendszer rezonanciatényezőjénél
- nagyobb csillapításnál kisebb a rezonanciatényező
- nem válik soha végtelenné
- rezonancia $(\omega=\omega_0)$:
  - ¤ csillapítás hatása a legjelentősebb (végtelenből véges)
  - ¤ fáziskésés: $\varphi_0=\pi/2$
- μ maximuma eltolódik balra, ahogy ξ növekszik, de
  - ¤ ha ξ kicsi, akkor $\mu_{max}\approx\frac{1}{2\xi}$
  - ¤ ha $\xi>\frac{1}{\sqrt{2}}$ akkor $\mu\leq 1$
    - ➔ *eszményi* csillapítás: $\xi=1/\sqrt{2}$

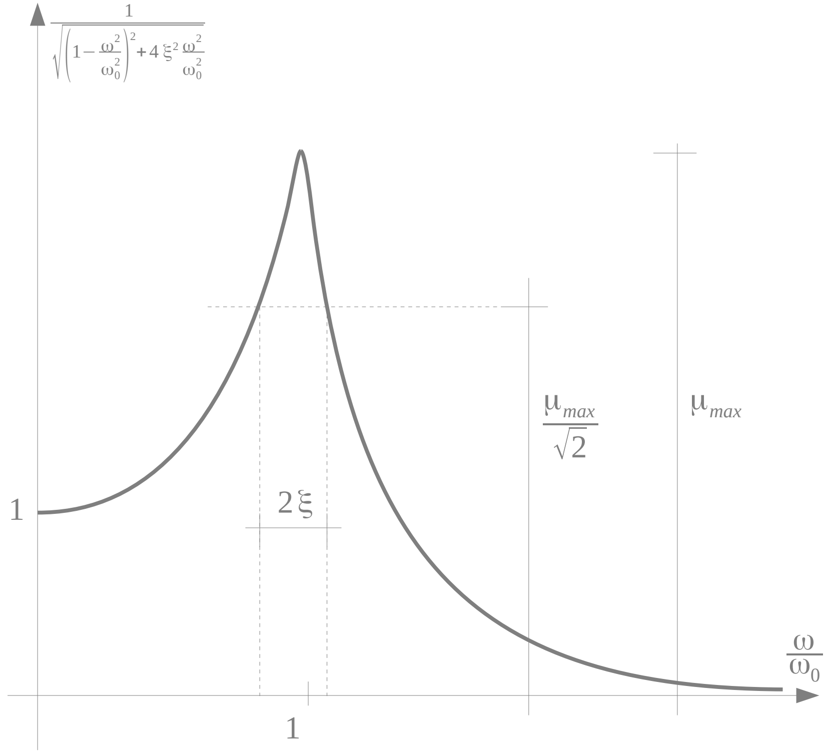


Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés – rezonancia, rezonanciatényező II.

Kísérletek során a $q_0 \cdot \mu$ erőt tudjuk mérni (miközben q_0 is bizonytalan)

Kicsi ξ esetén közelítő módszer használható:

a maximum/$\sqrt{2}$ értékhez tartozó két körfrekvencia közötti sávszélesség 2ξ



Tartók dinamikája BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Mit tanultunk eddig?

Csillapítatlan és csillapított egyszabadságfokú rendszerek szabadrezgése

Csillapítatlan egyszabadságfokú rendszer gerjesztett rezgése

Mit fogunk tanulni ma?

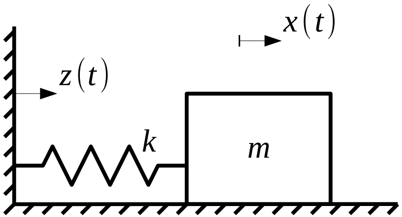
Csillapított egyszabadságfokú rendszer gerjeszetett rezgése - harmonikus gerjesztés

Egyszabadságfokú rendszer támaszrezgése

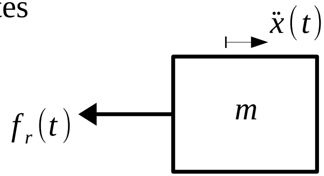
Szuperpozíció, periodikus gerjesztés

Támaszrezgéssel gerjesztett rezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás

Modell



Elkülönítés



N2: $m\cdot\ddot{x}(t)=-f_r(t)$

lineáris rugó: $f_r(t)=k\cdot u(t)$

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot u(t)=0}$$

Keressük $x(t)$-t, vagy $u(t)$-t.

Differenciálegyenlet az elmozdulásra

rugó megnyúlása: $u(t)=x(t)-z(t)$

így: $m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot(x(t)-z(t))=0$

amiből:

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=k\cdot z(t)}$$

Differenciálegyenlet a rugó megnyúlására

az elmozdulás: $x(t)=u(t)+z(t)$

a gyorsulás: $\ddot{x}(t)=\ddot{z}(t)+\ddot{u}(t)$

így: $m\cdot(\ddot{z}(t)+\ddot{u}(t))+k\cdot u(t)=0$

amiből:

$$\boxed{m\cdot\ddot{u}(t)+k\cdot u(t)=-m\cdot\ddot{z}(t)}$$

Formailag mindkét eset egy gerjesztett rezgés vizsgálatához felírt differenciálegyenletnek felel meg

➜ a támaszrezgés gerjesztett rezgésként kezelhető

Különbség az eredmények felhasználásában van:

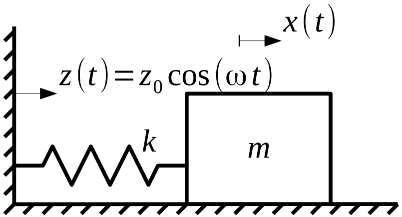
¤ $x(t)$-ből számolható: sebesség, gyorsulás

¤ $u(t)$-ből számolható: alakváltozás, belső erők

Harmonikus támaszrezgéssel gerjesztett rezgés – elmozdulások

$$m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=k\cdot z(t)$$

Modell



$$m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=k\cdot z_0\cos(\omega t)$$

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rezgés, ahol

$$q_0=k\cdot z_0$$

Az állandósult rezgésrész:

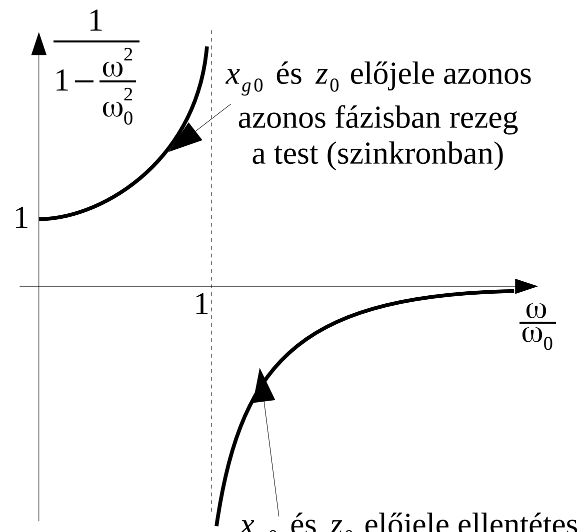
$$x_{áll}(t)=\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\cos(\omega t)=\frac{(k\cdot z_0)}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\cos(\omega t)=$$

$$=\boxed{z_0}\,\boxed{\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\cdot\cos(\omega t)$$

a válaszfüggvény időfüggése

gerjesztés amplitúdója

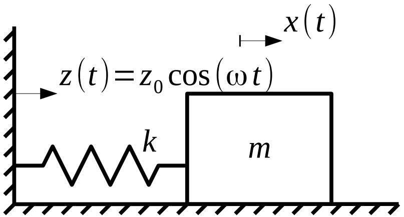
a két körfrekvencia viszonyától függő tényező (mint korábban)



$$u(t)=x(t)-z(t)=z_0\left(\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}-1\right)\cos(\omega t)=z_0\frac{1-\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)=z_0\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t)$$

Harmonikus támaszrezgéssel gerjesztett rezgés – alakváltozások $m\cdot\ddot{u}(t)+k\cdot u(t)=-m\cdot\ddot{z}(t)$

Modell



$$m\cdot\ddot{u}(t)+k\cdot u(t)=m\cdot\omega^2\cdot z_0\cos(\omega t)$$

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rezgés, ahol

$$q_0=m\,\omega^2\cdot z_0$$

Az állandósult rezgésrész:

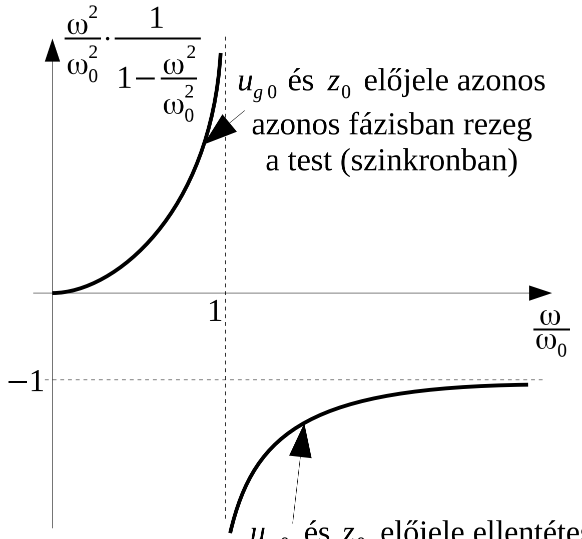
$$u_{áll}(t)=\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\cos(\omega t)=\frac{(m\omega^2\cdot z_0)}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\cos(\omega t)=$$

$$=\boxed{z_0}\cdot\boxed{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\cdot\cos(\omega t)$$

a válaszfüggvény időfüggése

gerjesztés amplitúdója

a két körfrekvencia viszonyától függő tényező (a korábbi $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$-szerese)



u_{g0} és z_0 előjele azonos
azonos fázisban rezeg a test (szinkronban)

u_{g0} és z_0 előjele ellentétes
ellenfázisban rezeg a test (aszinkron)

A rugóerő maximuma az állandósult rezgés során:

$$f_r^{max}=k\cdot z_0\cdot\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}$$

statikusan ekkora erővel lehetne ugyanakkora alakváltozást elérni

Tartók dinamikája BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Mit tanultunk eddig?

Csillapítatlan és csillapított egyszabadságfokú rendszerek szabadrezgése

Csillapítatlan egyszabadságfokú rendszer gerjesztett rezgése

Mit fogunk tanulni ma?

Csillapított egyszabadságfokú rendszer gerjeszetett rezgése - harmonikus gerjesztés

Egyszabadságfokú rendszer támaszrezgése

Szuperpozíció, periodikus gerjesztés

Harmonikus gerjesztések – szuperpozíció

Működjön két periódikus gerjesztőerő: $m\,\ddot{x}(t)+k\,x(t)=q_1\cos(\omega_1 t)+q_2\cos(\omega_2 t)$

A megoldás a homogén egyenlet általános megoldása és az ihomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+\frac{q_1}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega_1 t)+\frac{q_2}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega_2 t)$$

Az állandósult rezgésrész:

$$x_{áll}(t)=\frac{q_1}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega_1 t)+\frac{q_2}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega_2 t)$$

Mekkora a maximuma? $(x_á=?)$

Ha ω_1 és ω_2 relatív prímek, akkor előfordulhat olyan t, amikor a két tag

szélsőértékei *egyszerre* és *azonos előjellel* lépnek fel.$\rightarrow x_á=\sum_i\left|\frac{q_i}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}}\right|$

Minél több ω_i van, ez az egybeesés annál valószínűtlenebb.

Létezik-e pontosabb felső határ?

Lebegés – I.

Mi történik, ha a mozgás két olyan harmonikus függvény összegeként adódik, melyek körfrekvenciája egymáshoz közeli.
Ilyen eset előfordulhat:
¤ két harmonikus erő, egymáshoz közeli körfrekvenciával,
¤ a reznonanciához közeli állapotban, amikor a gerjesztőerő körfrekvenciája a sajátkörfrekvenciához közeli.

Tekintsük például az $|\omega-\omega_0|$ kicsiny esetet (közel a rezonanciához), és:

$$x(t)=\cos(\omega_0 t)+\cos(\omega t)$$

Legyen $\bar{\omega}=\dfrac{\omega_0+\omega}{2}, \Delta\omega=\dfrac{\omega_0-\omega}{2}$ és így:

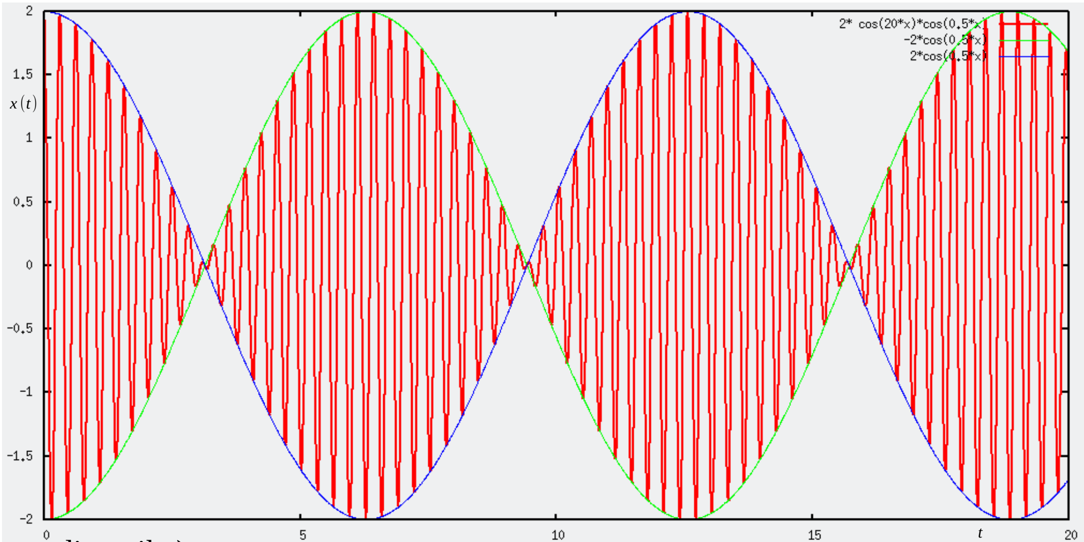
$$\begin{aligned}\cos(\omega_0 t)+\cos(\omega t) &= \cos(\bar{\omega} t+\Delta\omega t)+\cos(\bar{\omega} t-\Delta\omega t)= \\ &=\cos(\bar{\omega} t)\cos(\Delta\omega t)-\sin(\bar{\omega} t)\sin(\Delta\omega t)+\cos(\bar{\omega} t)\cos(-\Delta\omega t)-\sin(\bar{\omega} t)\sin(-\Delta\omega t)= \\ &=2\cos(\bar{\omega} t)\cos(\Delta\omega t)\end{aligned}$$

t

Lebegés – II.

$$\cos(\omega_0 t)+\cos(\omega t)=2\cos(\bar{\omega} t)\cos(\Delta\omega t)$$

Eredmény: egy $\Delta\,\omega$-tól függően változó amplitúdójú rezgés
a két körfrekvencia közelében levő átlagos körfrekvenciával.
Ezt a jelenséget (az amplitúdó hullámzó változást) hívjuk *lebegés* nek.



pl.:
$\omega=19{,}5$ rad/s
$\omega_0=20{,}5$ rad/s
$\bar{\omega}=20$ rad/s (gyors dinamika)
$\Delta\omega=0{,}5$ rad/s (lassú dinamika)

Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Mit tanultunk eddig?

Csillapítatlan és csillapított egyszabadságfokú rendszerek szabadrezgése

Csillapítatlan egyszabadságfokú rendszer gerjesztett rezgése

Mit fogunk tanulni ma?

Csillapított egyszabadságfokú rendszer gerjeszetett rezgése - harmonikus gerjesztés

Egyszabadságfokú rendszer támaszrezgése

Szuperpozíció, periodikus gerjesztés

Periódikus gerjesztés – alapelv

$$q(t)=\sum_i q_i \cdot \cos(\omega_i t)$$

Mekkora az állandósult rezgésrész: $\left(x_{áll}(t)=\sum_i \frac{q_i}{k} \cdot \frac{1}{1-\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega_i t) \right)$ maximuma? $(x_á=?)$

Ha a gerjesztést alkoto harmonikus függvények körfrekvenciái egy közös körfrekvencia többszörösei $(\omega_j = j \cdot \omega_1)$, pl.:

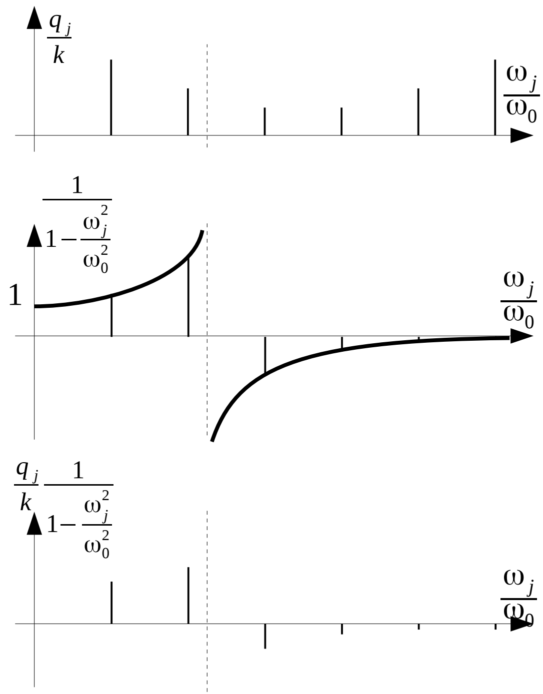
$$q(t)=\sum_j q_j \cos(\omega_j t)=\sum_j q_j \cos(j \omega_1 t)$$

akkor a válasz is periódikus lesz $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$ (alap) periódusidővel:

$$x_{áll}(t)=\sum_j \frac{q_j}{k} \cdot \frac{1}{1-\frac{j^2 \omega_1^2}{\omega_0^2}} \cos(j \omega_1 t)$$

A szélsőérték is T_1 időközönként lép fel.
Elegendő egy akkora időtartamban megkeresni a maximumot.

A válaszban a (kellően) magasabb felharmonikusok szerepe kisebb.



Periódikus gerjesztés – Fourier-sor I.

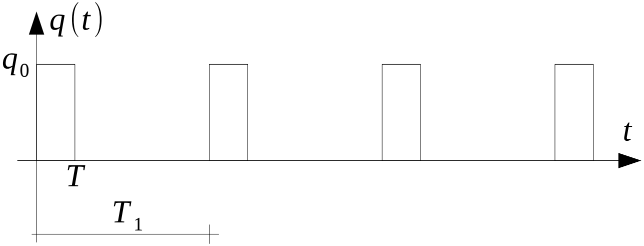
Ha a gerjesztés T_1 periódikus (azaz $q(t)=q(t+T_1)$), akkor átírható az előbbihez hasonló alakra:

$$q(t)=a_0+\sum_j \left(a_j\cos(j\omega_1 t)+b_j\sin(j\omega_1 t)\right)=a_0+\sum_j c_j\cos(j\omega_1 t-\varphi_j)$$

ahol: $a_0=\dfrac{1}{T_1}\displaystyle\int_\tau^{\tau+T_1} q(t)\,\mathrm{d}t$

$$a_j=\frac{2}{T_1}\int_\tau^{\tau+T_1}\cos(j\omega_1 t)q(t)\,\mathrm{d}t\ ,\ b_j=\frac{2}{T_1}\int_\tau^{\tau+T_1}\sin(j\omega_1 t)q(t)\,\mathrm{d}t$$

Példa

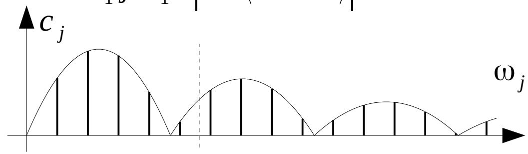


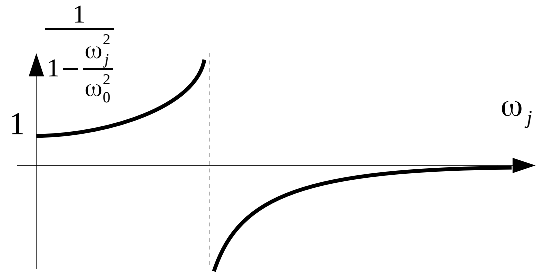
$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_0^T q_0\,\mathrm{d}t=\frac{T q_0}{T_1}$$

$$a_j=\frac{2}{T_1}\int_0^T\cos(j\omega_1 t)q_0\,\mathrm{d}t=\frac{2q_0}{T_1}\frac{\sin(j\omega_1 T)}{j\omega_1}$$

$$b_j=\frac{2}{T_1}\int_0^T\sin(j\omega_1 t)q_0\,\mathrm{d}t=\frac{2q_0}{T_1}\frac{1-\cos(j\omega_1 T)}{j\omega_1}$$

$$c_j=\frac{2q_0}{T_1 j\omega_1}2\left|\sin\left(\frac{j\omega_1 T}{2}\right)\right|$$





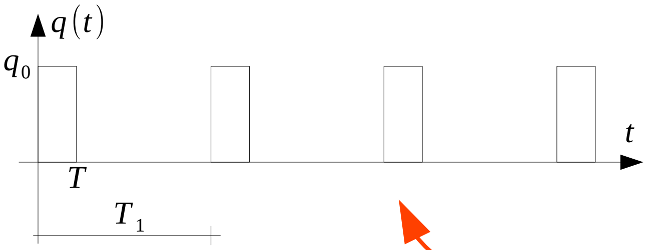
Periódikus gerjesztés – Fourier-sor II.

$$q(t)=a_0+\sum_j \left(a_j\cos(j\omega_1 t)+b_j\sin(j\omega_1 t)\right)$$

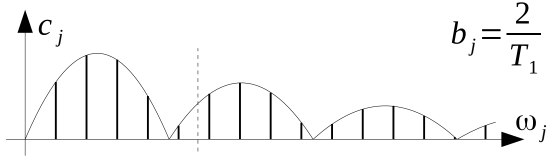
$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} q(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_j=\frac{2}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} \cos(j\omega_1 t)\,q(t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_j=\frac{2}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} \sin(j\omega_1 t)\,q(t)\,\mathrm{d}t$$



$$c_j=\frac{2q_0}{T_1 j\omega_1}2\left|\sin\left(\frac{j\omega_1 T}{2}\right)\right|$$



$Mi\ lenne,\ ha: T_1\rightarrow\infty$?

Ha $T_1\rightarrow\infty$, akkor az alap frekvencia nullához tart, a pálcikák végtelenül besűrűsödnek

a teherfüggvény összegzésekor integrálni kell ω szerint $\left(\mathrm{d}\omega=\frac{2\pi}{T_1}\text{-gyel szorzunk}\right)$

az a és b amplitúdó nem j-től függ, hanem ω-tól

az idő szerinti integrálást $-\infty$-től $+\infty$-ig kell elvégzni

és visszaszorozni $\frac{T_1}{2\pi}$-vel

$$q(t)=\int_0^{\infty}\left(a(\omega)\cos(\omega t)+b(\omega)\sin(\omega t)\right)\mathrm{d}\omega$$

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega t)\,q(t)\,\mathrm{d}t$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega t)\,q(t)\,\mathrm{d}t$$

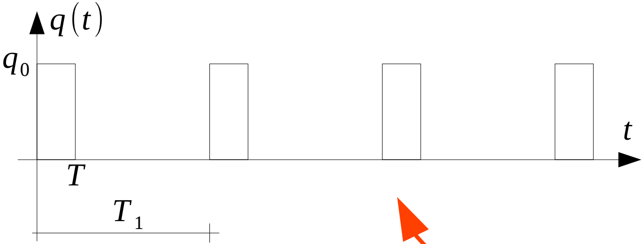
Periódikus gerjesztés – Fourier-sor III.

$$q(t)=a_0+\sum_j \left(a_j\cos(j\omega_1 t)+b_j\sin(j\omega_1 t)\right)$$

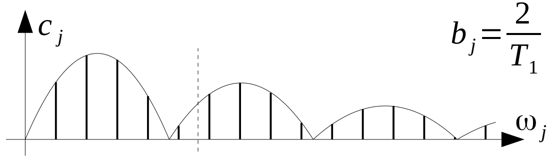
$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} q(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_j=\frac{2}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} \cos(j\omega_1 t)\,q(t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_j=\frac{2}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} \sin(j\omega_1 t)\,q(t)\,\mathrm{d}t$$



$$c_j=\frac{2q_0}{T_1 j\omega_1}2\left|\sin\left(\frac{j\omega_1 T}{2}\right)\right|$$



$Mi\,lenne,ha: T_1 \rightarrow \infty\,?$

$$q(t)=\int_0^{\infty}\left(a(\omega)\cos(\omega t)+b(\omega)\sin(\omega t)\right)\mathrm{d}\omega$$

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega t)\,q(t)\,\mathrm{d}t$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega t)\,q(t)\,\mathrm{d}t$$

Mi lenne, ha egyetlen téglalappal gerjesztenénk?

impulzusteher: $T_1 \rightarrow \infty$ és $T \rightarrow 0, q_0=\frac{1}{T}$

$$c_j=\frac{2}{T_1 j\omega_1}2\left|\frac{\sin\left(\frac{j\omega_1 T}{2}\right)}{T}\right|$$