Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

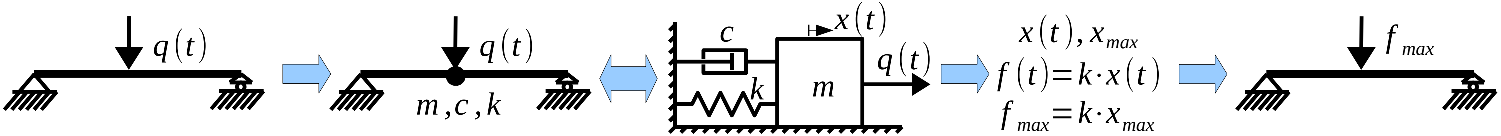
Rezgések osztályozása

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)}$$

	$q(t)=0$ *szabadrezgés* (homogén DE)	$q(t)\neq 0$ *gerjesztett rezgés* (inhomogén DE)
$c=0$ *csillapítatlan rendszer* (hiányos DE)	*csillapítatlan szabadrezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$	*csillapítatlan, gerjesztett rezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)$
$c>0$ *csillapított rendszer*	*csillapított szabadrezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$	*csillapított, gerjesztett rezgés* $m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)$

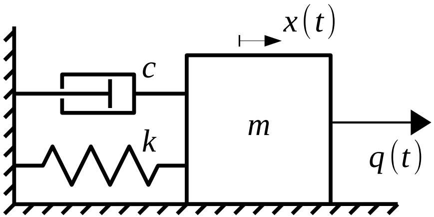
A differenciálegyenlet $x(t)$ megoldásának ki kell elégítenie a *kezdeti feltételeket* is.
Egy adott t_0 pillanatban az elmozdulás és a sebesség értéke előírt: x_0, illetve v_0, azaz:

$$x(t_0) = x_0 \qquad \dot{x}(t_0) = v_0$$

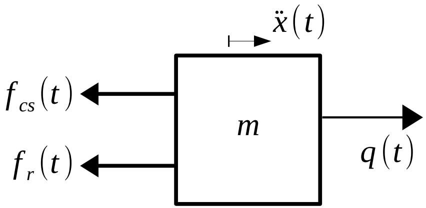


Gerjesztett rezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – I.

Modell



Elkülönítés



N2: $m \cdot \ddot{x}(t) = q(t) - f_r(t) - f_{cs}(t)$

lineáris rugó: $f_r(t) = k \cdot x(t)$

seb. arányos csill.: $f_{cs}(t) = c \cdot \dot{x}(t)$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)}$$

Keressük $x(t)$-t, ha $x(t_0) = x_0$, és $\dot{x}(t_0) = v_0$.

Megoldás

A megoldás a *kiegészítő* (homogén) differenciálegyenlet általános és az inhomogén differenciálegyenlet egy *partikuláris* megoldásának összege:

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_g(t)$$

$x_{hom}(t)$: mint a szabadrezgésnél A, B paraméterekkel

$x_g(t)$: gerjesztés miatti rész. Kereshetjük:

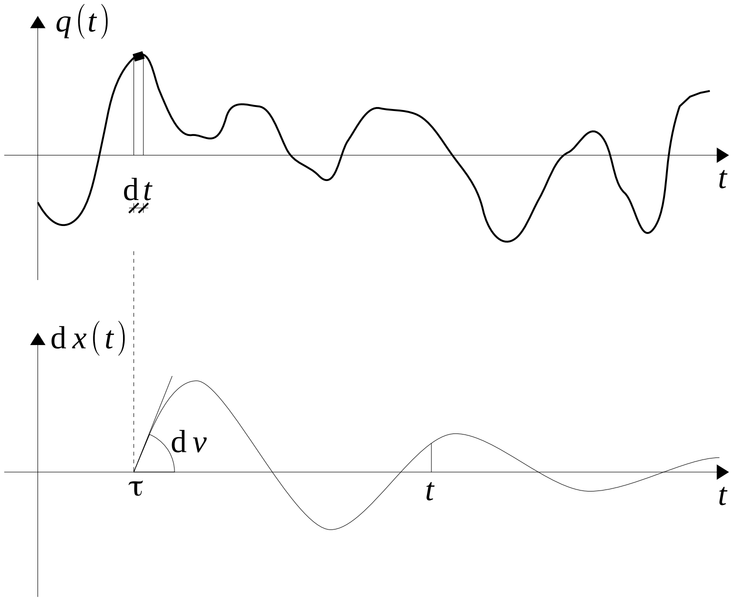
1. *Ansatz*-függvénnyel
valamilyen feltételezett alak, paraméterekkel
DE-be visszahelyettesítve keressük a paramétert
függvényszerű gerjesztés kell.

2. időlépéses módszerrel
csak t_i időpillanatokban számoljuk az elmozdulást, sebességet, de ezekben a pillanatokban kielégítjük a mozgás DE-ét.

3. a DE közvetlen integrálásával

Mozgásegyenlet direkt integrálása – I.

A $q(t)$ gerjesztőerő-függvényt elemi $\mathrm{d}\,t$ ideig ható részekre bontjuk.
A $\mathrm{d}\,t$ ideig ható erők által átadott elemi $q(t)\cdot\mathrm{d}\,t$ impulzusok hatását összegezzük.



A τ időpillanatban átadott $q(\tau)\,\mathrm{d}\,t$ impulzus miatt a test mozgásmennyisége megváltozik:

$$q(\tau)\cdot\mathrm{d}\,t = m\cdot\mathrm{d}\,v$$

Ebből a $\mathrm{d}\,v = \dfrac{q(\tau)}{m}\mathrm{d}\,t$ egy, a $t=\tau$ pillanatban kezdődő szabadrezgés v_0 kezdeti sebessége. Mivel ez a rezgés hozzáadódik a korábbi mozgásokhoz, a kapcsolódó $x_0=0$.

Egy $t>\tau$ pillanatban az elmozdulás:
(figyelembe véve, hogy addig $t-\tau$ idő telik el)

$$\mathrm{d}\,x(t) = e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\left(\frac{q(\tau)}{m\cdot\omega_0^*}\mathrm{d}\,t\right)\cdot\sin\left(\omega_0^*(t-\tau)\right)$$

A teljes megoldáshoz az összes elemi impulzus hatását kell összegeznünk.
A t pillanat elmozdulásaira a $\tau<t$ pillanatokban ható elemi impulzusok hatnak.

Azok összege az alábbi integrál: $x(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{q(\tau)}{m\cdot\omega_0^*}\,e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\cdot\sin\left(\omega_0^*(t-\tau)\right)\mathrm{d}\,\tau$

Mozgásegyenlet direkt integrálása – 2.

Duhamel-integrál: $x(t)=\int_0^t \frac{q(\tau)}{m\cdot\omega_0^*} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\cdot\sin\left(\omega_0^*(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau$

Ez a rendszer *válaszfüggvénye*.

Speciális esetek

Támaszrezgés: az alakváltozások, igénybevételek vizsgálatára a teherfüggvény:

$$q(t)=-m\ddot{z}(t)$$

Amit behelyettesítve:

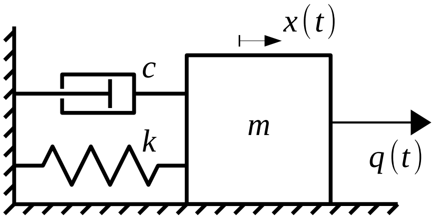
$$u(t)=\int_0^t \frac{-\ddot{z}(\tau)}{\omega_0^*} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\cdot\sin\left(\omega_0^*(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau$$

Csillapítatlan szerkezeten: $\xi=0$ és $\omega_0=\omega_0^*$:

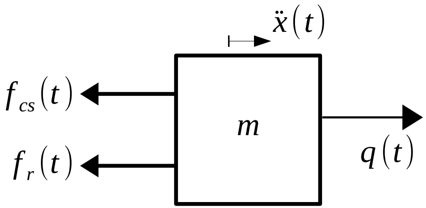
$$x(t)=\int_0^t \frac{q(\tau)}{m\,\omega_0}\cdot\sin\left(\omega_0(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau$$

Gerjesztett rezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – I.

Modell



Elkülönítés



N2: $m \cdot \ddot{x}(t) = q(t) - f_r(t) - f_{cs}(t)$

lineáris rugó: $f_r(t) = k \cdot x(t)$

seb. arányos csill.: $f_{cs}(t) = c \cdot \dot{x}(t)$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)}$$

Keressük $x(t)$-t, ha $x(t_0) = x_0$, és $\dot{x}(t_0) = v_0$.

Megoldás

A megoldás a *kiegészítő* (homogén) differenciálegyenlet általános és az inhomogén differenciálegyenlet egy *partikuláris* megoldásának összege:

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_g(t)$$

$x_{hom}(t)$: mint a szabadrezgésnél A, B paraméterekkel

$x_g(t)$: gerjesztés miatti rész. Kereshetjük:

1. *Ansatz* -függvénnyel
valamilyen feltételezett alak, paraméterekkel
DE-be visszahelyettesítve keressük a paramétert
függvényszerű gerjesztés kell.

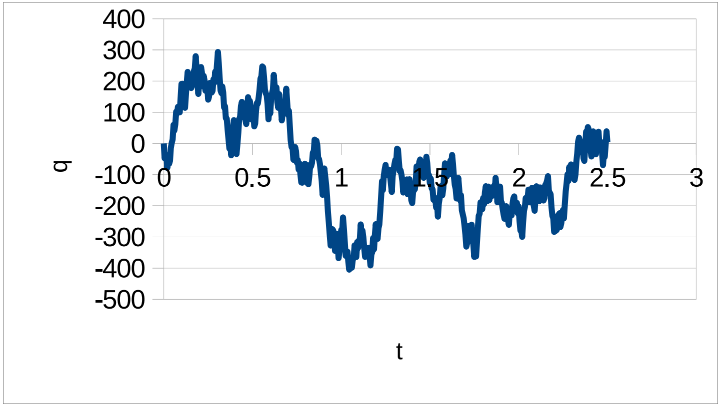
2. időlépéses módszerrel
csak t_i időpillanatokban számoljuk az elmozdulást, sebességet, de ezekben a pillanatokban kielégítjük a mozgás DE-ét.

3. a DE közvetlen integrálásával

Mozgásegyenlet megoldása – időlépéses megoldás

$m = 200\,\text{kg}, k = 5000\,\text{N/m}$
$\rightarrow \omega_0 = 5\,\text{rad/s}, T_0 = 1{,}257\,\text{s}$
$\xi = 0{,}05 \rightarrow c = 100\,\text{Ns/m}$

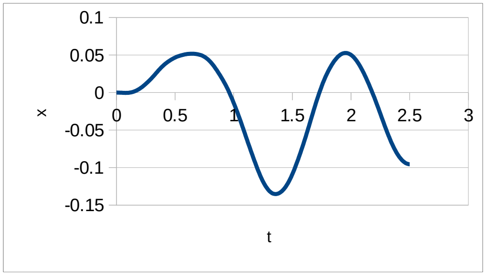
Keressük a választ egy *tetszőleges* gerjesztőerőre:
(Itt egy véletlenszerűen felvett függvénnyel szemléltetve.)

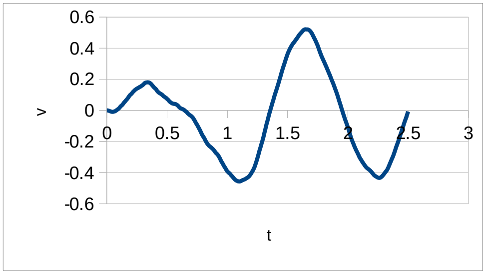


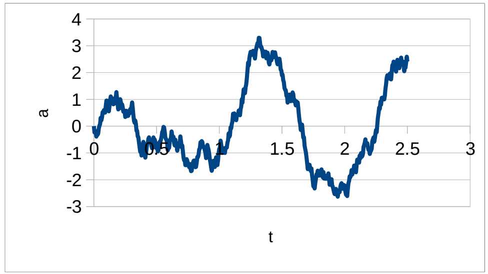
A t_i pillanatban ismert $q(t_i), x(t_i), v(t_i)$ meghatározza a DE-ből $a(t_i)$-t.

E gyorsulást felhasználva számoljuk a kis Δ t időlépésre levő $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ pillanatban a következő $x(t_{i+1}), v(t_{i+1})$ értékeket.

(Legegyszerűbb esetben pl. konstans gyorsulást feltételezve az időlépés alatt.)







$$x^{max} = 0{,}135\,\text{m}, v^{max} = 0{,}5212\,\text{m/s}, a^{max} = 3{,}298\,\text{m/s}^2$$

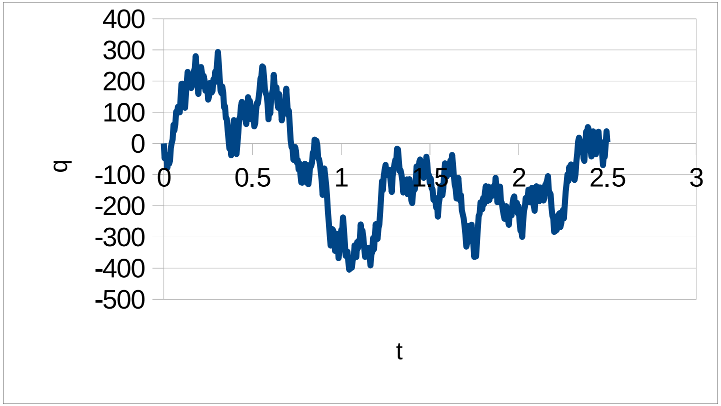
Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Mozgásegyenlet megoldása – időlépéses megoldás

$m = 200\,\mathrm{kg}, k = 5000\,\mathrm{N/m}$
$\rightarrow \omega_0 = 5\,\mathrm{rad/s}, T_0 = 1{,}257\,\mathrm{s}$
$\xi = 0{,}05 \rightarrow c = 100\,\mathrm{Ns/m}$

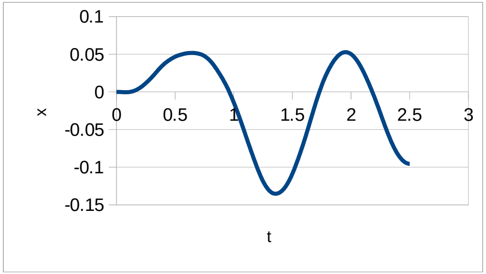
Keressük a választ egy *tetszőleges* gerjesztőerőre:
(Itt egy véletlenszerűen felvett függvénnyel szemléltetve.)

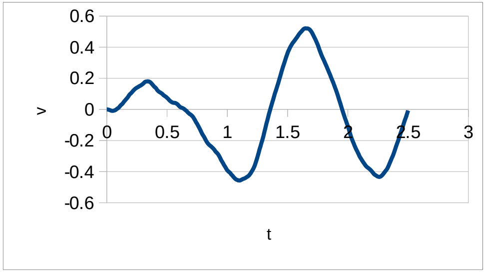


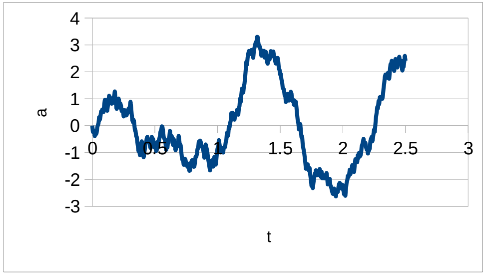
A t_i pillanatban ismert $q(t_i), x(t_i), v(t_i)$ meghatározza a DE-ből $a(t_i)$-t.

E gyorsulást felhasználva számoljuk a kis Δ t időlépésre levő $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ pillanatban a következő $x(t_{i+1}), v(t_{i+1})$ értékeket.

(Legegyszerűbb esetben pl. konstans gyorsulást feltételezve az időlépés alatt.)







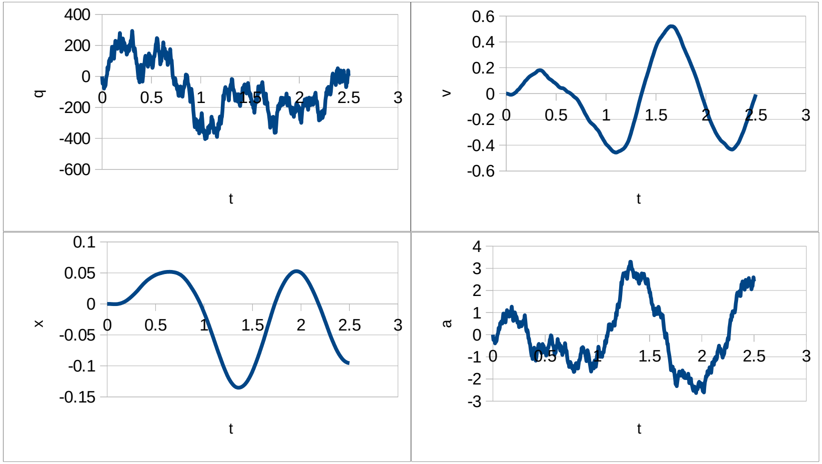
$$x^{max} = 0{,}135\,\mathrm{m}, v^{max} = 0{,}5212\,\mathrm{m/s}, a^{max} = 3{,}298\,\mathrm{m/s^2}$$

Pszeudogyorsulás, pszeudosebesség

$m = 200\,\text{kg}\,,\, k = 5000\,\text{N/m} \rightarrow \omega_0 = 5\,\text{rad/s}\,,\, T_0 = 1{,}257\,\text{s}$

$\xi = 0{,}05 \rightarrow c = 100\,\text{Ns/m}$

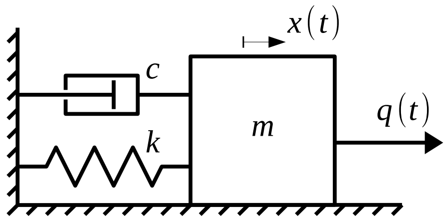
Keressük a választ egy *tetszőleges* gerjesztőerőre:
(Itt egy véletlenszerűen felvett függvénnyel szemléltetve.)



$x^{max} = 0{,}135\,\text{m}$

$v^{max} = 0{,}5212\,\text{m/s}$

$a^{max} = 3{,}298\,\text{m/s}^2$



Ahhoz, hogy az $x(t)$ elmozdulás statikusan jöjjön létre, egy $q_s(t) = k \cdot x(t)$ statikus erőt kellene működtetni.
Mivel $k = m \cdot \omega_0^2$, ez az erő számítható $q_s(t) = m \cdot \omega_0^2 \cdot x(t)$ alakban is.

Az $\omega_0^2 \cdot x(t)$ szorzat egy gyorsulás mértékegységű mennyiség, a neve *pszeudogyorsulás*: $a^p(t) = \omega_0^2 \cdot x(t)$

Az elmozdulást létrehozó erő a pszeudogyorsulásból: $q_s(t) = m \cdot a^p(t)$

Ha fentiekből csak a maximum érdekel minket, akkor az időfüggést elhagyva
a helyettesítő statikus erő: $q_s^{max} = m \cdot a^p$, ahol $a^p = \omega_0^2 \cdot x^{max}$

Hasonló elven definiálhatunk *pszeudosebességet* is: $v^p = \omega_0 \cdot x^{max}$. (Ez csillapítóelemeknél fordul elő.)

Mozgásegyenlet megoldása – válaszspektrum I.

A mozgás differenciálegyenlete:

$$m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$$

$$\ddot{x}(t)+2\xi\omega_0\dot{x}(t)+\omega_0^2\cdot x(t)=\frac{q(t)}{m}$$

Legyen adott egy teher: $z(t)$ támaszmozgás.
Határozzuk meg az elmozdulások maximumait különböző szerkezetekre, de legyen:

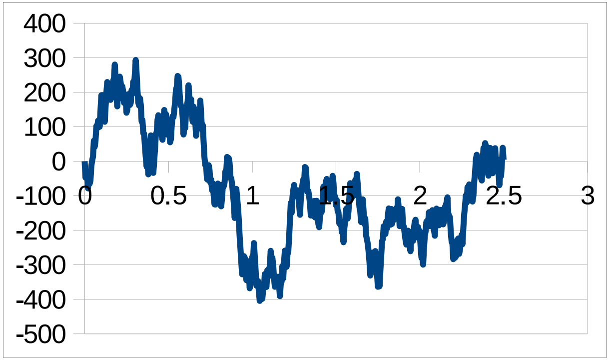
- ¤ azonos anyag → azonos ξ
- ¤ azonos tömeg

A maximum csak ω_0-tól (vagy T_0-tól) függ.

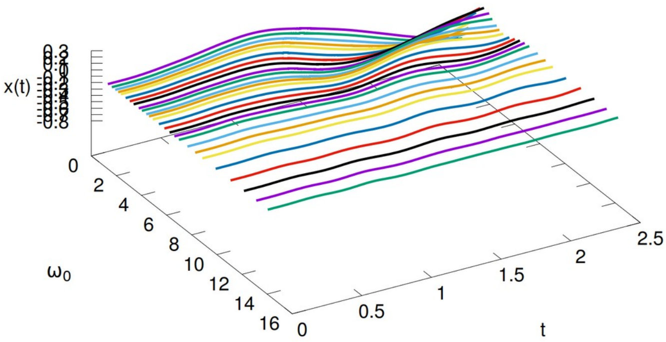
Támaszrezgésnél:

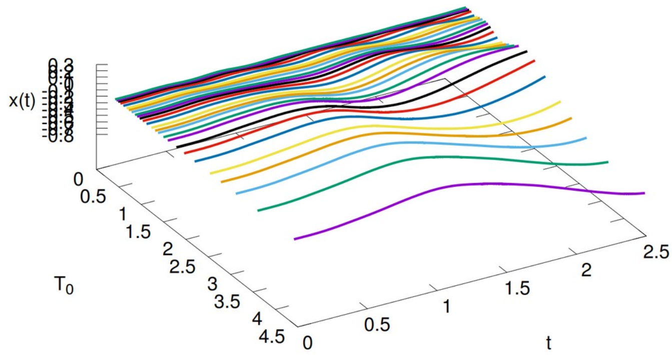
$$\ddot{u}(t)+2\xi\omega_0\dot{u}(t)+\omega_0^2\cdot u(t)=-\ddot{z}(t)$$

Határozzuk meg a maximumot sok szerkezetre!

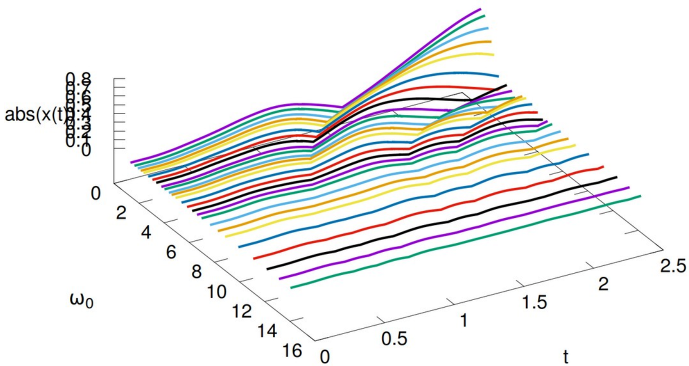


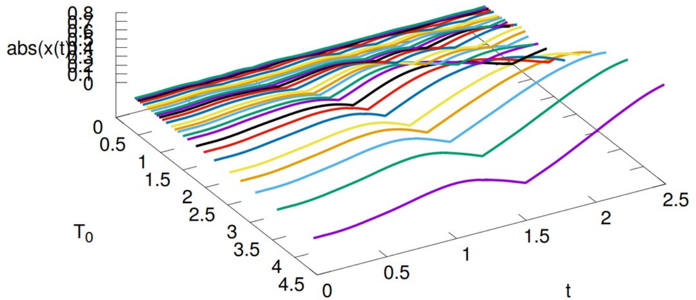
Válaszspektrum számításának lépései – elmozdulás válaszspektrum

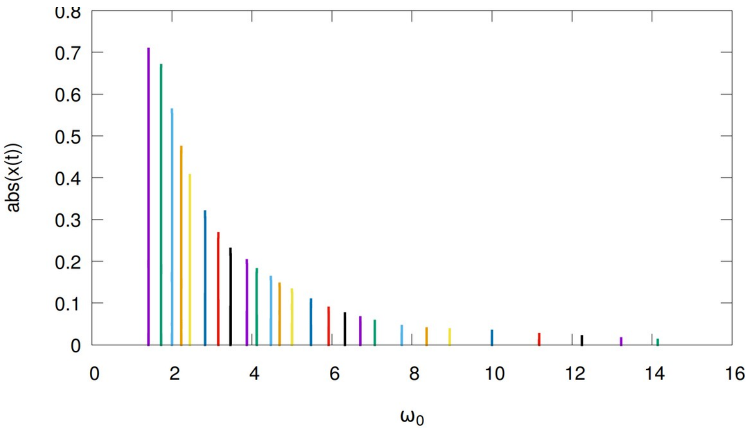


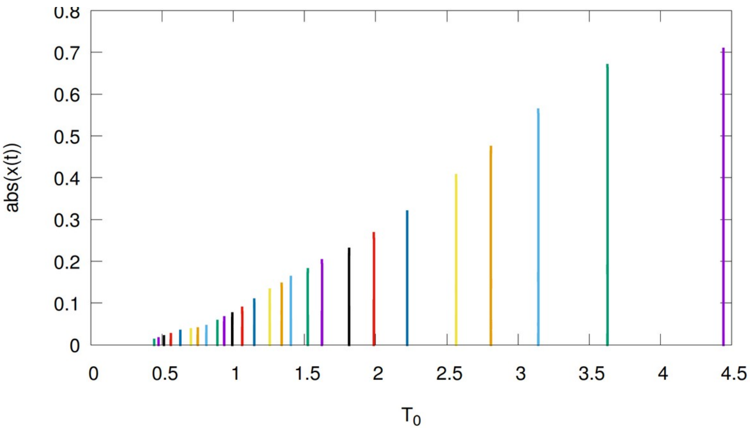


Válaszspektrum számításának lépései – elmozdulás válaszspektrum









Mozgásegyenlet megoldása – válaszspektrum I.

A mozgás differenciálegyenlete:

$$m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$$

$$\ddot{x}(t)+2\xi\omega_0\dot{x}(t)+\omega_0^2\cdot x(t)=\frac{q(t)}{m}$$

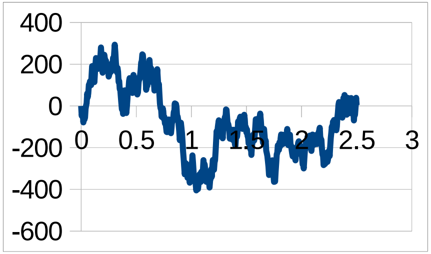
Támaszrezgésnél:

$$\ddot{u}(t)+2\xi\omega_0\dot{u}(t)+\omega_0^2\cdot u(t)=-\ddot{z}(t)$$

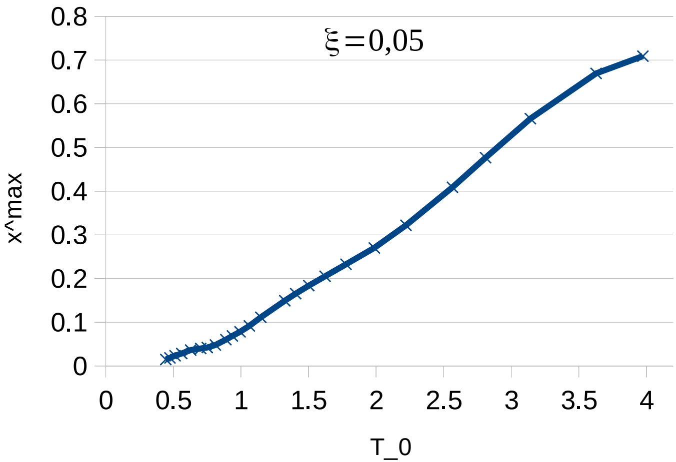
Legyen adott egy teher: $z(t)$ támaszmozgás.
Határozzuk meg az elmozdulások maximumait különböző szerkezetekre, de legyen:

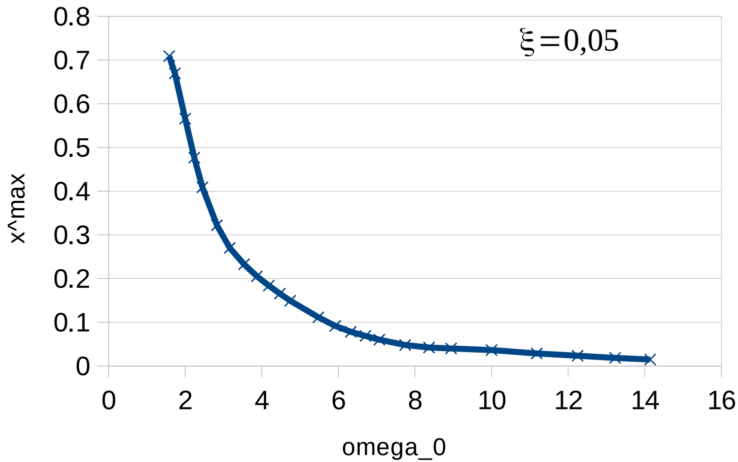
- ¤ azonos anyag → azonos ξ
- ¤ azonos tömeg

A maximum csak ω_0-tól (vagy T_0-tól) függ.



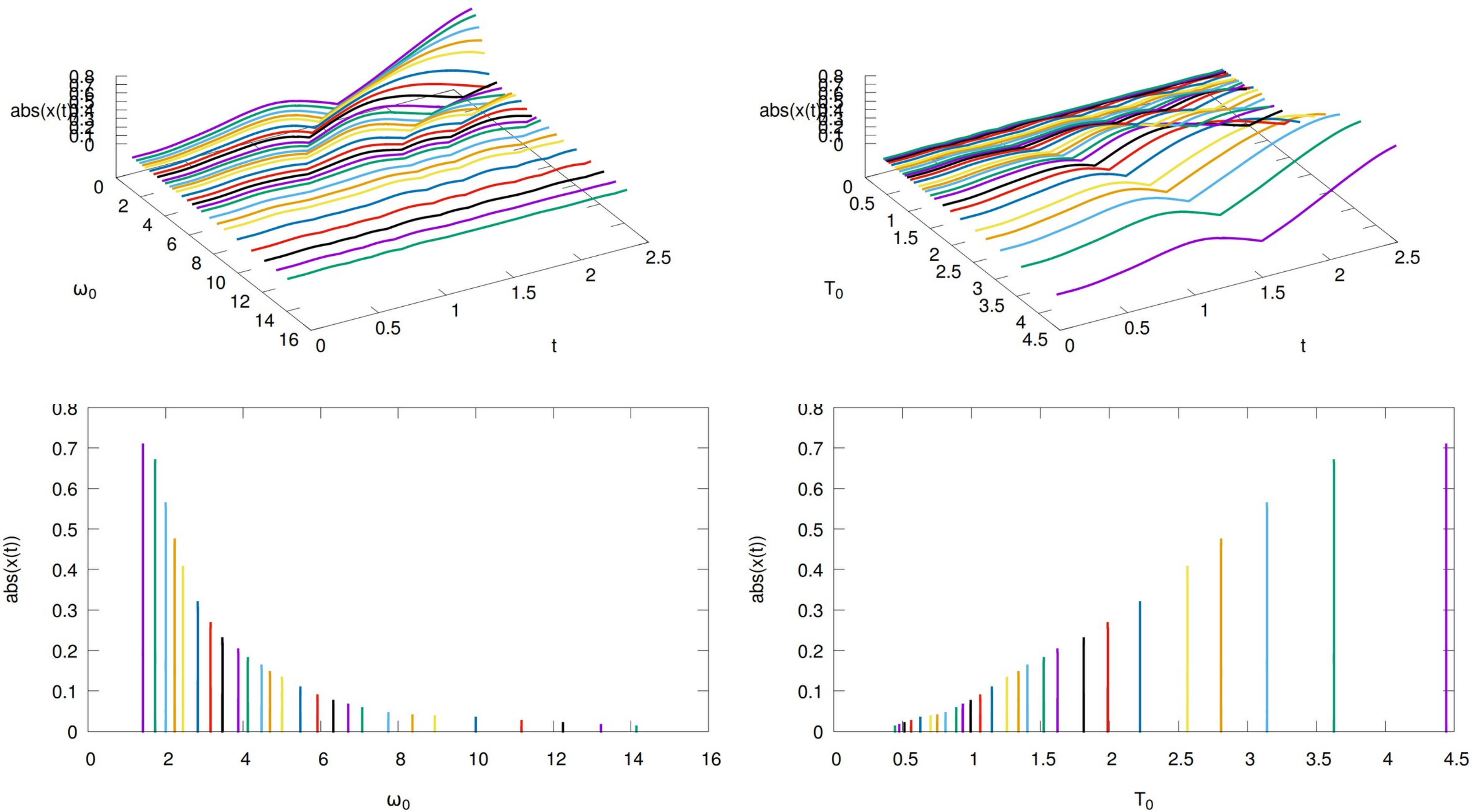
Ábrázoljuk ezeket a maximumokat a periódusidő, illetve a sajátkörfrekvencia függvényében:



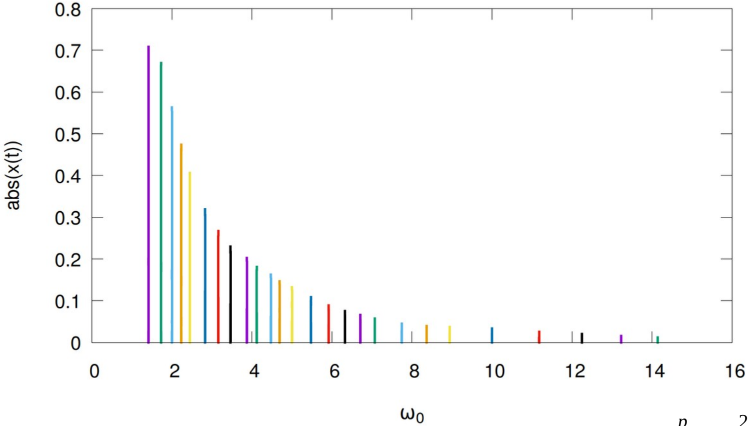


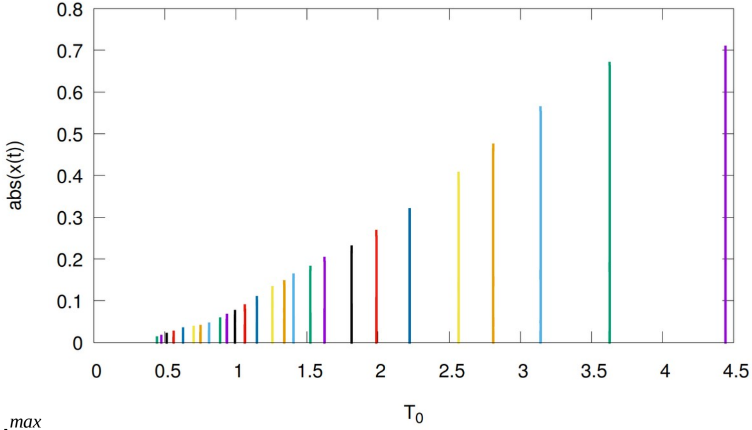
Az így kapott függvény az adott teher *elmozdulás-válaszspektruma*.

Válaszspektrum számításának lépései – elmozdulás válaszspektrum

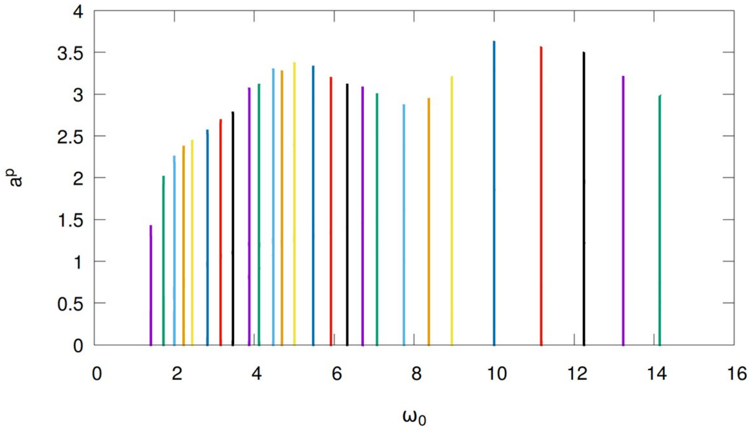


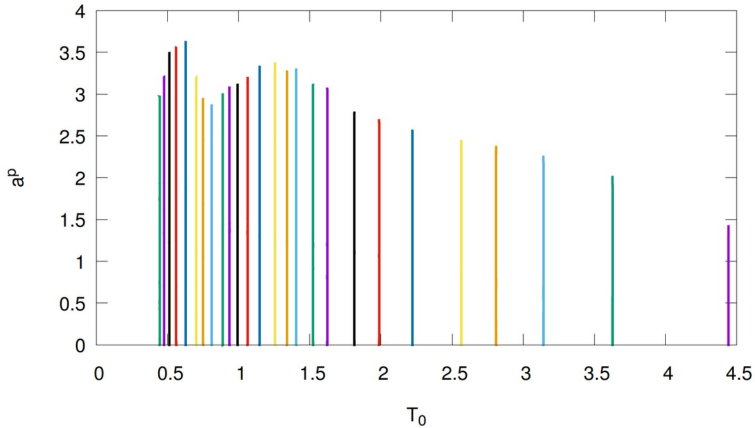
Válaszspektrum számításának lépései – pszeudogyorsulás válaszspektrum



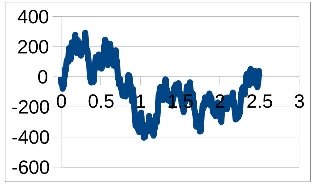


$$a^p = \omega_0^2 \cdot x^{max}$$

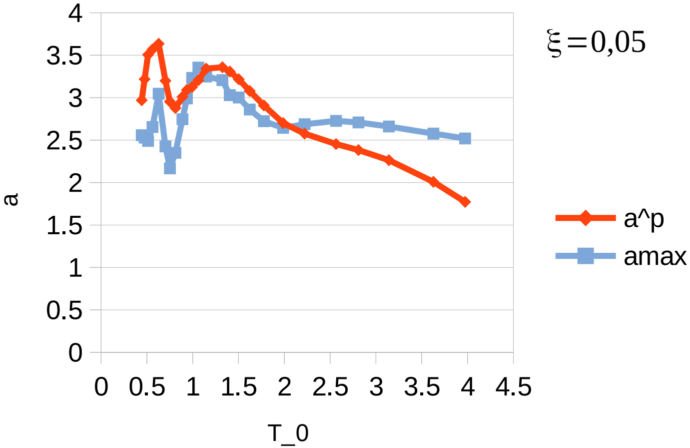




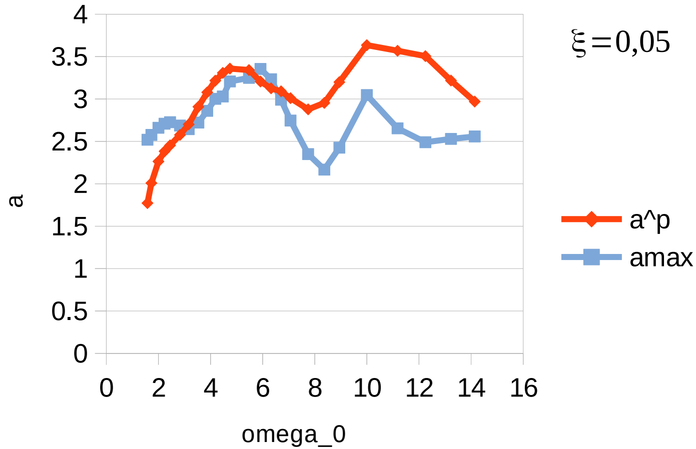
Mozgásegyenlet megoldása – válaszspektrum II.



Egy rögzített teherhez nem csak elmozdulás-válaszspektrum számítható.
Lehet még gyorsulási, pszeudogyorsulási, sebesség és pszeudosebesség válaszspektrum.



$\xi = 0{,}05$



$\xi = 0{,}05$

Használata :
A (ξ csillapítású) szerkezet periódusidejéhez (vagy sajátkörfrekvenciájához) tartozó pszeudogyorsulást leolvassuk az ábrából: $S_{ap}(T_{0,}\xi)$
Az ehhez tartozó (legnagyobb) alakváltozást létrehozó statikus erő:

$$q_s^{max} = m \cdot S_{ap}(T_{0,}\xi)$$

Ezzel terhelve a szerkezetet megkaphatók a legnagyobb igénybevételek.

Tartók dinamikája BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

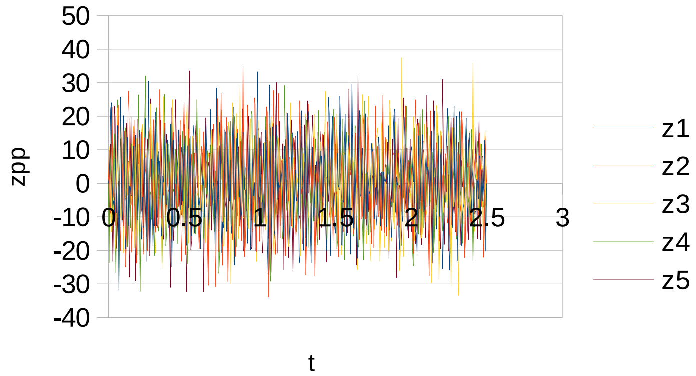
Földrengés-vizsgálat

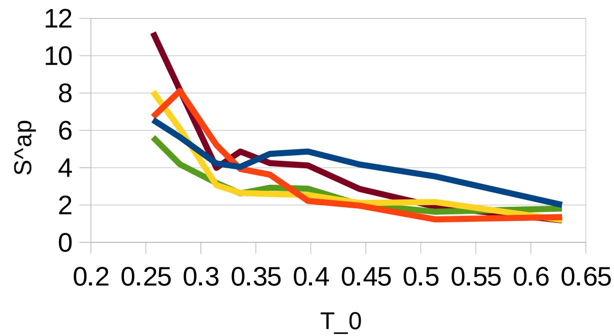
A támasz rezeg $z(t)$ függvény szerint, tehát a mozgás DE-e:

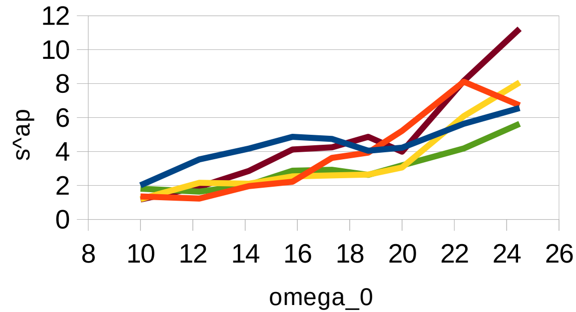
$$m\cdot\ddot{u}(t)+c\cdot\dot{u}(t)+k\cdot u(t)=-m\cdot\ddot{z}(t) \quad \rightarrow \quad \ddot{u}(t)+2\xi\omega_0\dot{u}(t)+\omega_0^2\cdot u(t)=-\ddot{z}(t)$$

- Csakhogy $z(t)$ ismeretlen (igazából azt sem tudjuk, mikor lesz)

+ Léteznek viszont korábbi rengések adatai, amikhez számolhatók a válaszspektrumok:

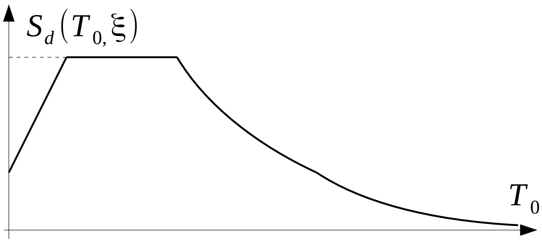






Az eltérő erősségek és a periódusidő-függő ugrásokat kisimítva egyfajta felső burkolóként kapható a *tervezési válaszspektrum*.

Pl. EC8:

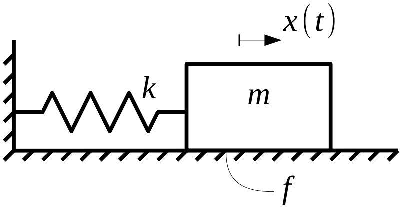


Tartók dinamikája BMEEOTMAS43

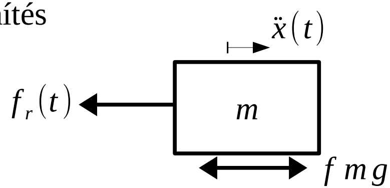
Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Súrlódással csillapítatott szabadrezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás I.

Modell



Elkülönítés



N2: $m\cdot\ddot{x}(t)=\pm f_s - f_r(t)$

lineáris rugó: $f_r(t)=k\cdot x(t)$

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)\pm f\,m\,g + k\cdot x(t)=0}$$

Keressük $x(t)$-t, ha $x(t_0)=x_0$, és $\dot{x}(t_0)=v_0$.

Megoldás

Válasszuk szét a mozgást három szakaszra:

1. előre mozog a test $(\dot{x}(t)>0)$:

$$m\ddot{x}(t)+f\,m\,g+k\,x(t)=0$$

2. hátra mozog a test $(\dot{x}(t)<0)$:

$$m\ddot{x}(t)-f\,m\,g+k\,x(t)=0$$

3. áll (és többé nem mozdul) a test

$$\dot{x}(t)=0 \text{ és } |k\cdot x(t)|\le f\,m\,g$$

Az első két eset külön-külön lineáris feladat.
Ha az $f\,m\,g$-t átvinnénk a túloldalra, akkor egy gerjesztett rezgés differenciálegyenletét kapnánk.

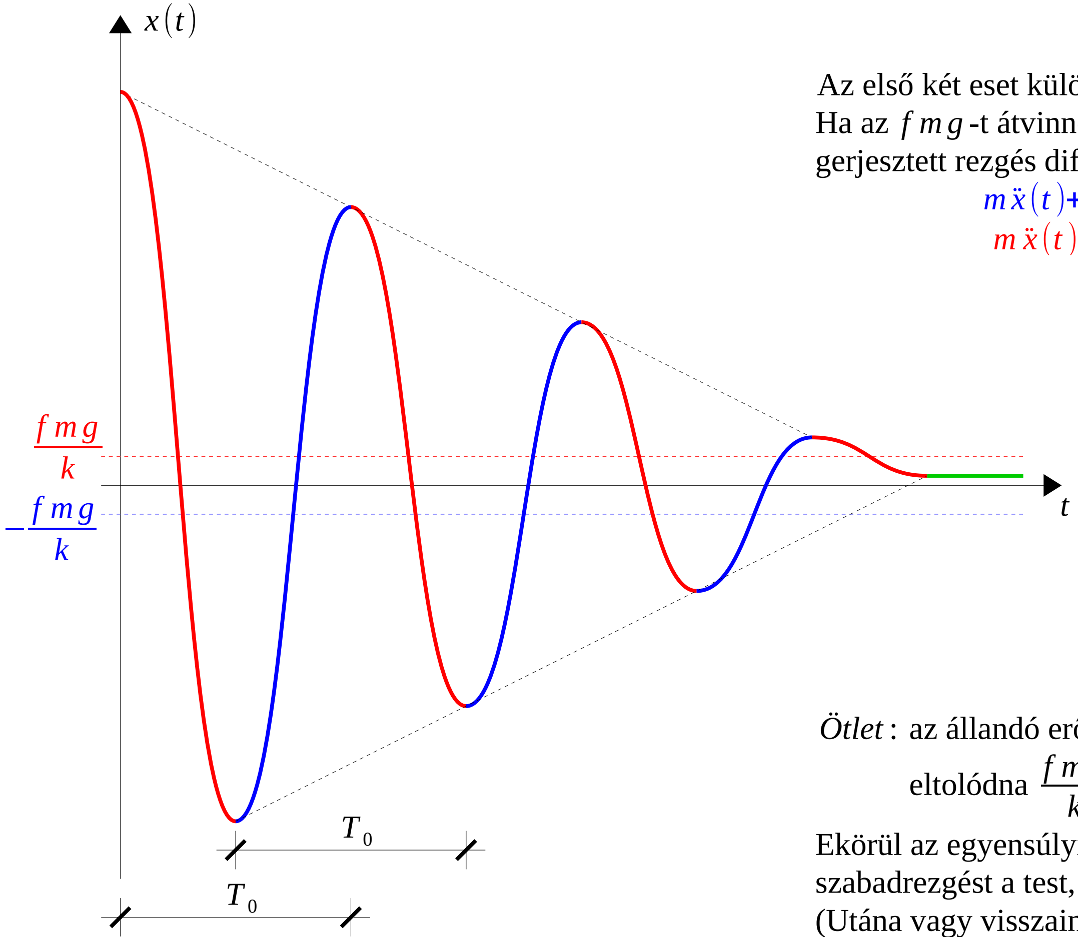
$$m\ddot{x}(t)+k\,x(t)=-f\,m\,g$$

$$m\ddot{x}(t)+k\,x(t)=f\,m\,g$$

Ötlet: az állandó erő miatt az egyensúlyi helyzet eltolódna $\dfrac{f\,m\,g}{k}$-val (hátra ill. előre)

Ekörül az egyensúlyi helyzet körül végez szabadrezgést a test, amíg meg nem áll.
(Utána vagy visszaindul, vagy ottmarad.)

Súrlódással csillapítatott szabadrezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás II.



Az első két eset külön-külön lineáris feladat.
Ha az $f\,m\,g$ -t átvinnénk a túloldalra, akkor egy gerjesztett rezgés differenciálegyenletét kapnánk.

$$m\,\ddot{x}(t)+k\,x(t)=-f\,m\,g$$

$$m\,\ddot{x}(t)+k\,x(t)=f\,m\,g$$

Ötlet : az állandó erő miatt az egyensúlyi helyzet eltolódna $\frac{f\,m\,g}{k}$ -val (hátra ill. előre)

Ekörül az egyensúlyi helyzet körül végez szabadrezgést a test, amíg meg nem áll.
(Utána vagy visszaindul, vagy ottmarad.)

Rezgések egyéb ábrázolási módja

A másdorendű differenciálegyenlet átírható két elsőrendű differenciálegyenletté.

Például: $m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$

helyett: $m \cdot \dot{v}(t) + c \cdot v(t) + k \cdot x(t) = 0$ és $v(t) = \dot{x}(t)$

vagy átírva: $\dot{x}(t) = v(t)$

$$\dot{v}(t) = -2\varrho v(t) - \omega_0^2 x(t)$$

Bármilyen $x(t), v(t)$ párosból egyértelműen eldönthető, hogy hogyan fog változni ez a két mennyiség.

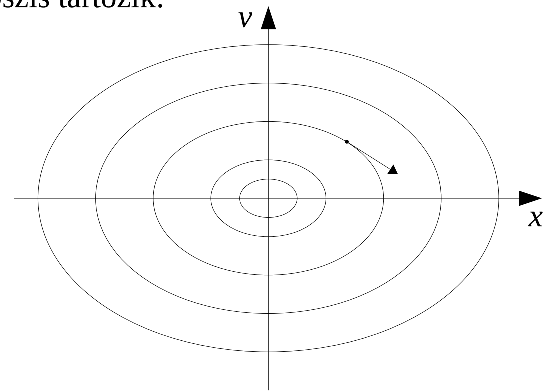
A mozgást akár egy $(x(t), v(t))$ síkon is ábrázolhatjuk.

E sík neve: *fázistér*.

Példa: csillapítatlan szabadrezgés

A fázistérben $\dot{x}(t) = v(t), \dot{v}(t) = -\omega_0^2 x(t)$

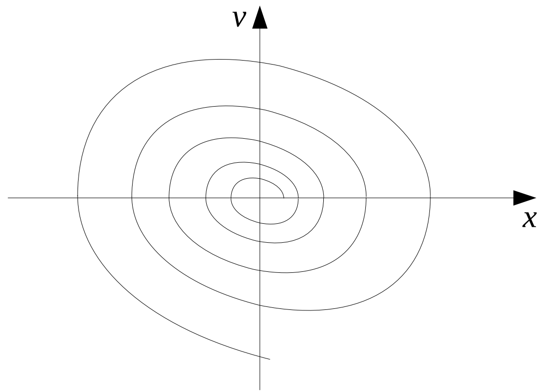
A rezgéshez a kezdeti értékektől függő ellipszis tartozik:



Példa: csillapított szabadrezgés

A fázistérben $\dot{x}(t) = v(t), \dot{v}(t) = -2\varrho v(t) - \omega_0^2 x(t)$

Spirálisan befelé tartó vonal:



Példa: súrlódás

Egymáshoz kapcsolódó félellipszisek sorozata