Vetülettan - 4. előadás vázlata

1 VETÜLETEK ÁLTALÁNOS ELMÉLETE

Két – matematikailag meghatározott – felület paraméteres egyenletei legyenek a következők:

$x = f_1(u, v)$,

$y = f_2(u, v)$, I. felület (pl. u,v paraméter lehet φ,λ)

$z = f_3(u, v)$.

$\xi = g_1(U, V)$,

$\eta = g_2(U, V)$, II. felület (pl. U,V paraméter lehet Y_{EOV}, X_{EOV})

$\zeta = g_3(U. V)$.

Ha a két felület paraméteres egyenletei között fennáll az

$U = F_1(u, v)$ és $V = F_2(u, v)$ (pl. $Y = F_1(\varphi, \lambda)$; $X = F_2(\varphi, \lambda)$)

függvénykapcsolat, akkor a két felület között olyan kapcsolat áll fenn, amely szerint az egyik felület minden pontjának van megfelelője a másik felületen. Ha ugyanis az I. felület egyenleteit behelyettesítjük a II. jelzésű egyenletrendszerbe, akkor a

$\xi = G_1(u, v)$,

$\eta = G_2(u, v)$, II.

$\zeta = G_3(u, v)$.

paraméteres egyenletekhez jutunk.

Ha az egyik felületet *alapfelületnek*, a másikat *képfelületnek* tekintjük, akkor a paraméterek között felállított matematikai összefüggések a vetület törvényszerűségét meghatározó *vetületi egyenletek*.

A paraméterek között végtelen sok matematikai összefüggés állítható fel, ezek mindegyike azonban nem alkalmas térképi ábrázolás céljából végzett vetítésre. A vetületi egyenletekkel (a paraméterek közötti összefüggésekkel) szemben az ábrázolás céljától függően a következő követelményeket támasztjuk:

1. az alapfelület és a képfelület minden egyes pontjának *egy és csakis egy* pont feleljen meg a másik felületen (**egyértelműség követelménye**);
2. a vetületi egyenletek *folytonos és differenciálható* függvények legyenek, és ezen kívül a *differenciálhányadosaik is folytonos függvények* legyenek (**matematikai kezelhetőség követelménye**);

3. a ***vetületi torzulások* bizonyos megadott értéket ne lépjenek túl.** A vetítés ugyanis mindig torzulásokkal jár, hiszen egy görbe felület nem préselhető egy másik görbe felületbe vagy síkba gyűrődés vagy szakadás nélkül.) A torzulásokra megadott határ különösen a geodéziai célokra szolgáló vetületeken erősen korlátozott.

2 VETÜLETI TORZULÁSOK

2.1 A VETÜLETEK CSOPORTOSÍTÁSA TORZULÁSOK SZERINT

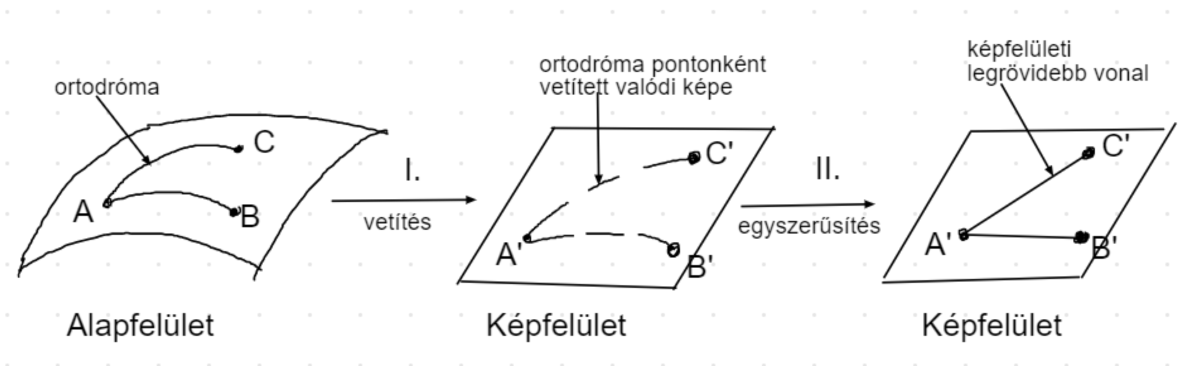
A vetületeket a torzulások szempontjából három csoportba soroljuk:

1. az ***általános torzulású vetületek*** csoportjába, ahol a szögek, a hosszak és a területek is torzulnak;
2. a ***szögtartó (szöghű, konform) vetületek*** csoportjába, ahol ha a képfelületen az alapfelületi vonalak valódi képét állítjuk elő, a szögek változatlanok maradnak. (A vonalak valódi képét általában úgy kapnánk meg, ha az alapfelületi vonalakat pontonként, vagyis a pontsor minden egyes pontját külön-külön vetítenénk. A későbbiekben látni fogjuk, hogy minden vetületen vannak olyan vonalrendszerek, amelyek valódi képét, pontonkénti vetítés nélkül is elő tudjuk állítani.);
3. a ***területtartó (területhű, ekvivalens) vetületek*** csoportjába, amelyen a területek változatlanok maradnak, ha a képfelületen az alapfelületi vonalak valódi képét állítjuk elő.

Megjegyzés: Hossztartó vetület nem létezik, mert azon a szögek és a területek is változatlanok maradnának, tehát vetítésről sem beszélhetnénk.

Valamely elem (szög, hossz, terület) változatlansága a többi elem erősebb torzulását eredményezi.

2.2 MIKOR LÉPNEK FEL TORZULÁSOK?



I. Vetítéssel járó torzulások: az alapfelületi legrövidebb vonalak (ortodrómák) pontonként vetített úgynevezett valódi vagy valós képe többnyire görbe vonal. Ezeket a torzulásokat egy adott pont elemi kis környezetében vizsgáljuk.

II. Képfelületi egyszerűsítések: Geodéziában többnyire véges nagyságú idomokkal (pl. háromszög hálózat oldalai) dolgozunk, ezeknek a töréspontjait egyenesekkel kötjük össze (képfelületi legrövidebb vonal).

2.3 Vetítéssel járó torzulások

Alapfelület és képfelület között. Torzulások elemi kis környezetben. Különböző modulusokkal, redukciókkal jellemezzük őket.

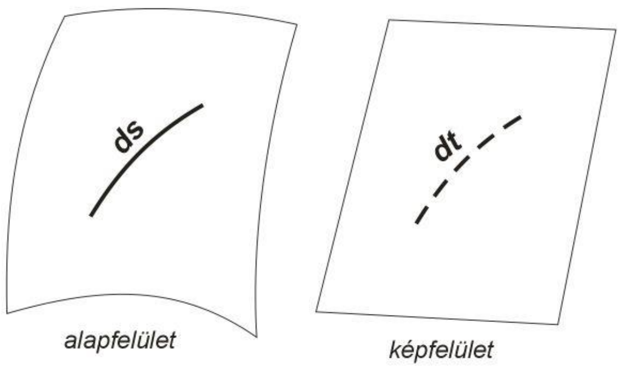
Jellemzők:

- Hossztorzulás: lineármodulus (l)
- Irány és szögtorzulás:
  - iránymodulus (i)
  - első irányredukció ($\overline{\Delta}$)
  - első szögredukció ($\overline{\Delta}_{sz}$)
- területi torzulás: területi modulus (τ)

2.4 Lineármodulus

A *lineármodulus* az alapfelület valamely pontjánál levő elemi hosszúságú vonaldarab *ds* hosszának és képfelületi megfelelője *dt* hosszának viszonya:

$$l = \frac{dt}{ds}$$



Elemi vonaldarab és képe

(A számlálóban a képfelületi hossz áll.) A hossztorzulás általában pontonként és irányonként is változik, ezért *a lineármodulus általában a helytől és az iránytól is függ*.

$$l = f_1(\varphi, \lambda, \alpha) \qquad \text{vagy} \qquad l = f_2(x, y, \delta)$$

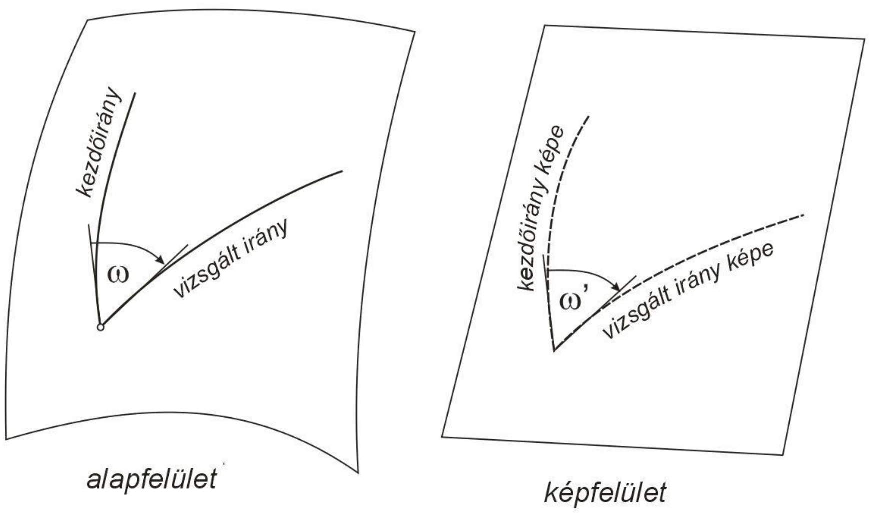
Az az irány, amelyben a vizsgált ponton a lineármodulus a legnagyobb az *első vetületi főirány*.

2.5 IRÁNYMODULUS, IRÁNYRDUKCIÓK

Ha valamely irány az alapfelületen egy kezdőiránnyal ω, a képfelületen levő megfelelője a kezdőirány megfelelőjével ω' szöget zár be, akkor az <u>*iránymodulust*</u> az

$$i = \frac{\tan\omega'}{\tan\omega}, \tag{4.5}$$

hányados fejezi ki. (Itt is a képfelületi érték áll a számlálóban!) Ha kezdőiránynak azt az irányt választjuk, amelyben a vizsgált ponton a lineármodulus a legnagyobb (*első vetületi főirány*), akkor az iránymodulus egy-egy pontban állandó, de pontonként általában változó.



Az irányhajlás szemléltetése

Az (ω' - ω) értéket $\bar{\Delta}$-sal jelöljük és <u>*első irányredukciónak*</u> nevezzük ($\bar{\Delta}$).

Valamely szögérték két irányérték különbségéből adódik, ennek megfelelően a *szögredukció* is két irányredukció különbségeként számítható. Ha az *Sz* szög két szára l_1 és l_2 irány, vagyis

$$Sz = l_2 - l_1,$$

akkor az <u>*első szögredukció*</u>:

$$\bar{\Delta}_{sz} = \bar{\Delta}_2 - \bar{\Delta}_1,$$

azaz a szög szárait alkotó irányok első irányredukcióinak különbsége.

<u>*Szögtartó vetítésnél*</u>, mivel a szögek nem változnak ($\omega = \omega'$), az iránymodulus minden pontban az egységgel egyenlő. Ez csak akkor lehet igaz, ha az alapfelületi elemi nagyságú idom és annak képfelületi megfelelője hasonlóak, vagyis az oldalak arányosan torzulnak. Ebből következik, hogy *szögtartó vetületen a lineármodulus értéke egy-egy pontban állandó, tehát csupán a helynek függvénye, de az iránynak nem*.

2.6 TERÜLETI MODULUS (τ)

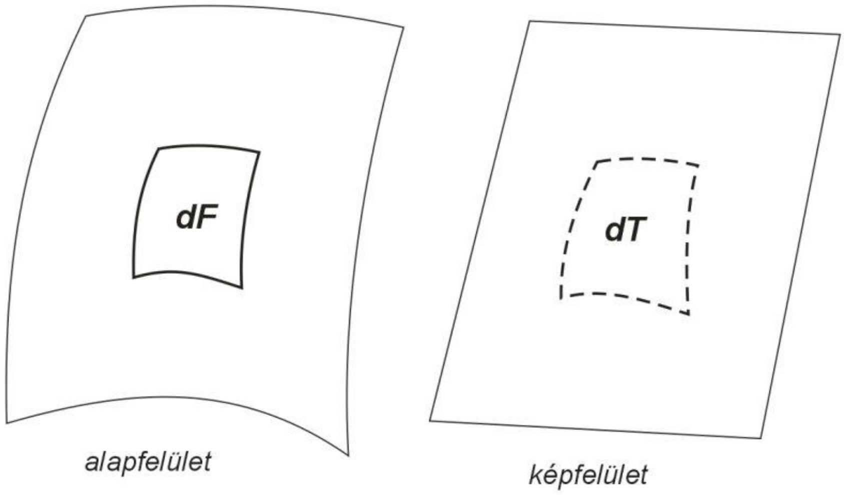
A *területi modulus* az elemi nagyságú alapfelületi *dF* terület és képfelületi *dT* megfelelőjének

$$\tau = \frac{dT}{dF} \tag{4.6}$$

hányadosa. (A képfelületi mennyiség itt is a számlálóban áll!)

Csak helytől függ, iránytól nem!

$\tau = f_1(\varphi, \lambda)$ vagy $\tau = f_2(x, y)$



Elemi nagyságú alapfelületi idom és képe

<u>Területtartó vetületen</u> a területi modulus minden pontban az egységgel egyenlő, mert *dF* = *dT*. A lineármodulus általában irányonként változik, kell tehát, hogy egyes pontoknál általában hossznövekedés és hosszrövidülés is legyen, mert a hosszak és a szögek torzulása mellett a terület másképpen nem maradhatna változatlan.

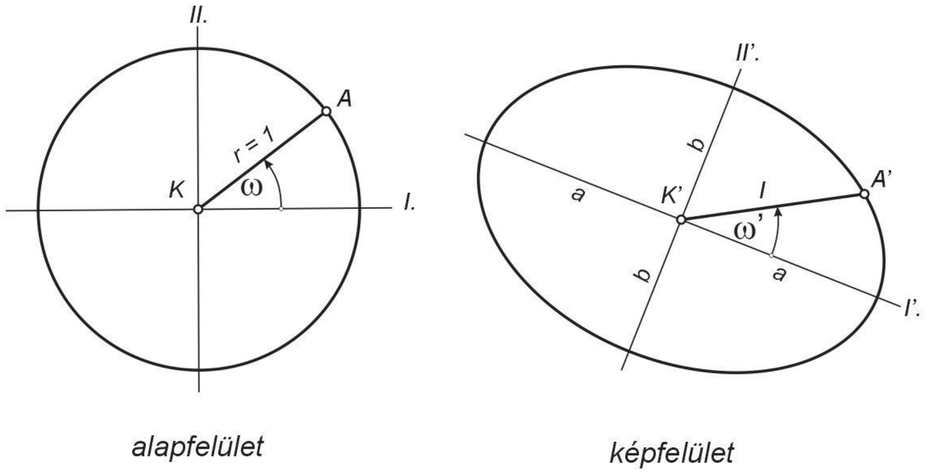
2.7 TORZULÁSOK NAGYSÁGA, MEGENGEDETT TORZULÁSOK

A vetületeken általában egy pont vagy egy vonal, ahol nincsen semmilyen torzulás, tehát mindegyik modulus az egységgel egyenlő. Ettől a helytől távolodva a torzulások nőnek. A megengedett torzulás értékek határt szabnak a vetületi rendszer alkalmazási területének, mert *a vetületi rendszer csak azon a területen belül használható, amelyen a torzulások a megengedett értéket nem lépik túl.* Nagyobb terület ábrázolásánál több vetületi rendszerre vagy süllyesztett (redukált) képfelületre lehet szükség aszerint, hogy szabunk-e határt a vetületi torzulásokkal szemben, és ha igen, milyen mértékűt.

3 TISSOT-FÉLE TORZULÁSI ELLIPSZIS

N. A. Tissot (1824-1895) francia matematikus szerint *az alapfelület elemi nagyságú körének képe a képfelületen általában elemi nagyságú ellipszis lesz* és a kör középpontjának a képe az ellipszis középpontja. Ezek szerint minden vetület helyettesíthető végtelen sok, elemi nagyságú felületelem derékszögű (ortogonális) vetületével úgy, hogy mindegyik ilyen derékszögű vetületnek más a méretaránya. Valamely véges idom vetületi képe tehát felületelemekből mozaikszerűen rakható össze.

Ha az alapfelületi elemi nagyságú kör sugarát egységnyinek tekintjük (r = 1), akkor a képfelületi ellipszis rádiuszvektorai adják a lineármodulusok értékét a megfelelő irányokban. A felvett elemi nagyságú kör képét *Tissot-féle torzulási ellipszisnek* vagy *Tissot-féle indikatrixnak* nevezzük. Ebből lehet leolvasni a vetületi torzulások törvényeit.



A lineármodulus függése az iránytól

Az első vetületi főiránynak megfelelő l_{max} adja az ellipszis fél nagytengelyét, a másik vetületi főiránynak megfelelő l_{min} pedig az ellipszis fél kistengelyét:

$$a = l_{max} , \qquad b = l_{min} .$$

(A vetületi főirányokat az ábrán I és II-vel, illetve I' és II'-vel jelöltük.) *Első vetületi főiránynak* azt az alapfelületi irányt nevezzük, amelyben a lineármodulus értéke a legnagyobb. A második vetületi főirányban a lineármodulus a legkisebb értéket éri el.

Bármely pontban van tehát két főirány (a vetületi főirányok), *amelyek az alapfelületen és megfelelőik a képfelületen is merőlegesek egymásra, és a szögtartó vetületek kivételével ez az iránypár az egyetlen, amely mind a két felületen merőleges egymásra*.

Az alapfelület különböző helyein felvett – azonos méretű – elemi nagyságú körök képe általában más és más alakú és méretű ellipszis lesz, és más és más lesz az ellipszis tengelyeinek elhelyezkedése a meridián képéhez viszonyítva. *A torzulási ellipszis, illetve annak hely szerinti változása tehát a vetület jellemzőjének tekinthető.*

3.1 Torzulási viszonyok meghatározása a torzulási ellipszis alapján

Lineármodulus

Az ellipszis rádiuszvektorai adják a lineármodulusok értékét.

$$a = l_{max}\,, \qquad b = l_{min}\,.$$

$$l = \frac{dt}{ds} = \frac{l}{r} = \frac{l}{1} = l$$

Területi modulus

Az alapfelületi elemi nagyságú kör képe a torzulási ellipszis. A *területi modulust* tehát az ellipszis és az alapfelületi kör területének hányadosa adja:

$$\tau = \frac{dT}{dF} = \frac{a\,b\,\pi}{1^2 \cdot \pi} = a\,b.$$

A *területi modulus* tehát a *torzulási ellipszis féltengelyeinek szorzatával egyenlő*.

Iránymodulus

Hosszabb levezetés után, ha kezdőiránynak a torzulási ellipszis nagytengelyét (az első vetületi főirányt) választjuk, akkor az *iránymodulus*:

$$i = \frac{\tan\omega'}{\tan\omega} = \frac{b}{a} = \text{konstans.}$$

4 Torzulási viszonyok szögtartó vetületen

Az **iránymodulus**

$$i = \frac{\tan\omega'}{\tan\omega} = \frac{b}{a} = 1,$$

tehát

$$\boldsymbol{a = b,}$$

vagyis *a torzulási ellipszis körré fajul*. Így a vetületi főirányok helyzete határozatlanná válik (el is veszítik jelentőségüket) és *a lineármodulus minden irányban azonos értékű lesz*.

Szögtartó vetületen az ***első irányredukció***, valamint az ***első szögredukció mindig zérus***

$$\bar{\Delta} = \omega' - \omega = 0, \qquad \bar{\Delta}_{sz} = \bar{\Delta}_2 - \bar{\Delta}_1 = 0, \quad \Theta = 0,$$

a lineármodulus minden irányban

$$l = a$$

A **területi modulus** pedig

$$\tau = a^2.$$

5 TORZULÁSI VISZONYOK TERÜLETTARTÓ VETÜLETEN

Területtartó vetületen a területi modulus:

$$\tau = \mathbf{a\ b = 1},$$

vagyis

$$a = \frac{1}{b}, \qquad b = \frac{1}{a}.$$

Ha tehát valamely vetületről azt állapítjuk meg, hogy *a két vetületi főirányban a lineármodulusok egymásnak reciprokjai, akkor a vetület területtartó*.

6 ÁLTALÁNOS TORZULÁSÚ VETÜLETEK

Kimondhatjuk tehát, *ha valamely vetületen a két vetületi főirányhoz tartozó lineármodulus nem egyenlő egymással, de egymásnak nem is reciprokai, akkor a vetület általános torzulású*.

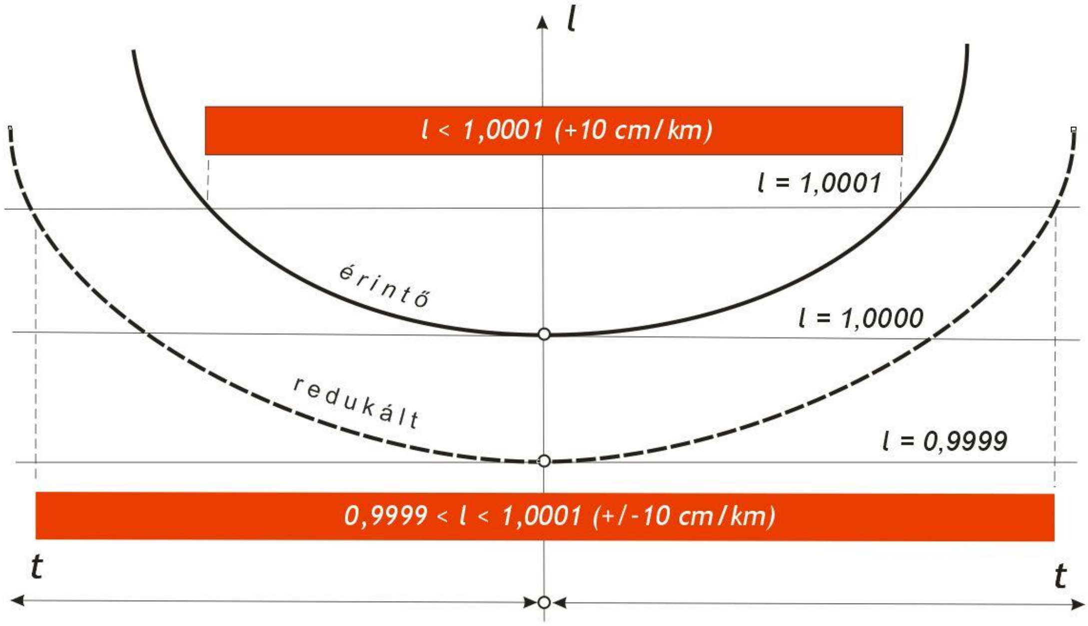
Későbbiekben az $a = b$ egyenlőséget szögtartó, az $\mathbf{a\ b = 1}$, illetve az $a = \frac{1}{b}$ egyenlőséget pedig területtartó vetületek vetületi egyenleteinek levezetésére fogjuk felhasználni.

7 VETÜLETI MÉRETARÁNY-TÉNYEZŐ

A geodéziai ábrázolással kapcsolatban meg kell még említenünk az ún. ***vetületi méretarány-tényezőt*** is. Vetítéseinknél feltételként szabjuk, hogy a torzulások bizonyos megadott értéket ne lépjenek túl. Ez elsősorban a hossztorzulásokra vonatkozik, és erre különösen a geodéziai vetületeken meglehetősen szűk a határ. A hossztorzulásnak ez a megkötöttsége azt eredményezi, hogy az egyes geodéziai vetületi rendszerek felhasználási területe erősen korlátozódik, mert valamely vetületi rendszer a kezdőpontjától (vagy kezdővonalától) csak olyan távolságig használható, ameddig a lineármodulus nem nagyobb a megengedettnél. Minden vetületen van egy pont (kezdőpont), vagy egy vonal (kezdővonal), amelyen nincs hossztorzulás.

A vetületi rendszer felhasználhatósági területét úgy növelhetjük, hogy a vetület *y* és *x* vetületi egyenletét megszorozzuk egy olyan m_0 számmal (a vetületi méretarány-tényezővel), amely az egységnél valamivel kisebb. Ez lényegileg azt jelenti, hogy a vetületi egyenletekkel meghatározott összes képfelületi koordinátát megszorozzuk m_0-lal és így az ábrázolás méretarányát megváltoztatjuk, mégpedig a képfelületi hosszakat m_0-szorosukra rövidítjük.

A méretarány megváltoztatásának következménye az, hogy azon a helyen, ahol eredetileg nem volt hossztorzulás (l = 1), a hosszak rövidülnek, és a hossztorzulástól mentes hely másik vonalon jelentkezik. Az m_0 szám megválasztásánál arra kell vigyázni, nehogy a hossztorzulás most valahol ellenkező értelemben lépje túl a megengedett értéket (*5.10. ábra*).



Vetületi méretarány-tényező alkalmazása

Szögtartó vetületeken, amelyeken az m_0 tényező bevezetése nélkül a vetületi hosszak – a torzulásmentes helytől eltekintve – mindig nagyobbak, mint az alapfelületi hosszak, az m_0 tényező bevezetésével hosszrövidülések is fellépnek, és így a hossztorzulás egyes helyeken hossznövekedésben, máshol pedig hosszrövidülésben jelentkezik. A hossztorzulások előjelének ez a változása az m_0 tényező bevezetése szempontjából hátránynak tekinthető. Ez volt az oka annak, hogy a korábbi geodéziai vetületeinknél nem éltek a használhatósági terület ilyenfajta növelésének lehetőségével. A legutóbb (1975) bevezetett egységes országos vetületi rendszerünknél (EOV) annak érdekében, hogy az ország területét egyetlen vetületi rendszerrel le lehessen fedni, m_0 = 0,99993 vetületi méretarány-tényezőt alkalmazunk.

A képfelületi szögjellegű mennyiségek (irányredukció, irányszög, vetületi meridiánkonvergencia) az m_0 tényezővel való szorzás után nem változnak meg, mert a méretarány-változás nincs hatással a szögekre.

8 A KÜLÖNBÖZŐ CÉLÚ VETÜLETEK ÉS A TÉRKÉPI MÉRETARÁNY

Az ábrázolás célja, illetve a torzulások megengedett mértéke szerint a továbbiakban megkülönböztetést teszünk ***geodéziai, topográfiai és földrajzi (geográfiai) vetületek*** között. A **geodéziai vetületek** szabatos geodéziai mérések alapján készülő *nagyméretarányú* (általában 1:500 – 1:10 000 méretarányig) térképezéshez szolgálnak. Ezeken a térképeken az ábrázolás mérethelyesen történik. ***Topográfiai***

vetületeken értjük az 1:10 000 méretaránytól az 1: 200 000 méretarányig terjedő kisméretarányú térképezéshez szolgáló vetületeket. A topográfiai térképeken az ábrázolás részben mérethelyesen, részben jelkulcs segítségével történik. ***Földrajzi vetületeken*** értjük az előbbieknél kisebb méretarányú térképek vetületeit. Ezeken már mindent jelkulcs szerint ábrázolnak.

Az ***országos (geodéziai) felmérésekben*** csaknem kizárólag **szögtartó vetületeket** használnak, azzal a megkötéssel, hogy a hossztorzulás sehol se haladjon meg egy még elviselhető értéket. Korábban ragaszkodtak a **kilométerenként legfeljebb 10 cm**-es hossztorzuláshoz. Abból a célból, hogy kevesebb (esetleg egyetlen) vetületi rendszert lehessen alkalmazni, **újabban az 1:10 000 megengedett értékkel szemben 1: 5000-es határral is megelégszünk**.

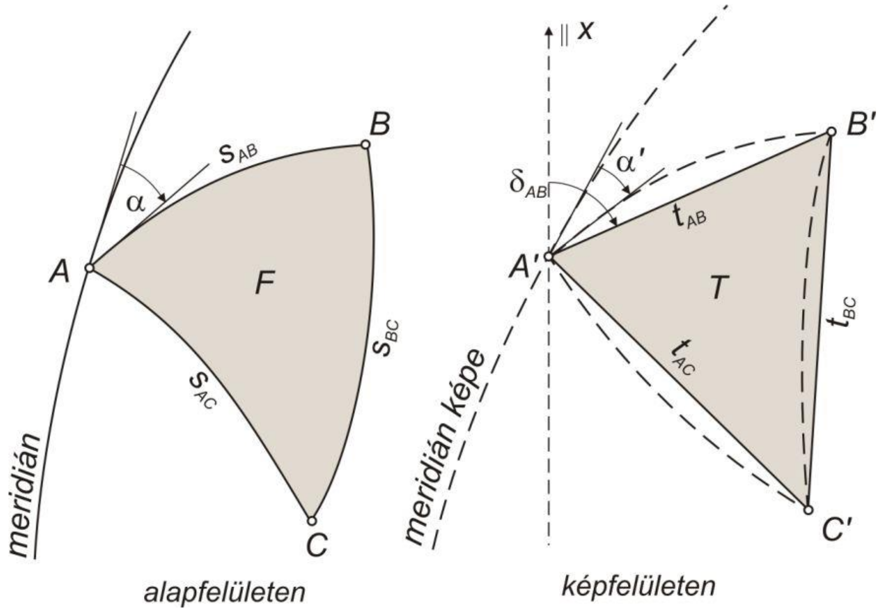
Korábban *területtartó vetületeket* is alkalmaztak geodéziai célokra. Ezeken a vetületeken az idomok **alakilag erősen torzulnak**, ami geodéziai és topográfiai szempontból egyaránt kedvezőtlen, ezért olyan feladatokhoz alkalmasak, ahol a területek nagyság szerinti összehasonlítása fontosabb, mint az alakhűség; például földrajzi ábrázoláshoz.

Az előbbiekben szóba került a ***térképi méretarány*** fogalma. A méretarányt, ha annak ellenkezőjét külön nem említjük, általában a térkép egészére adjuk meg (például azt mondjuk, hogy a térkép méretaránya 1:10 000). Ilyen értelemben a méretarány a térképi hosszak és a térkép vetületi rendszerében az azoknak megfelelő távolságok arányát jelenti, vagyis a

$$\textit{méretarány} = \frac{\textit{térképi hossz}}{\textit{vetületi hossz}},$$

ellentétben a köztudatban és a szakirodalomban is gyakran mutatkozó tévedéssel, amely szerint a térképeken szokásosan alkalmazott méretarány-megjelölés a térképi hosszak és az azoknak megfelelő terepi távolságok, helyesebben ellipszoidi vagy gömbi távolságok arányát jelöli. Az ilyen téves értelmezés szerint a térképi méretarány pontról pontra változna. Kisebb mértékben változna azokban az esetekben, amikor a hossztorzulás maximumára szűk határt szabunk, mert akkor az alapfelületi és a vetületi hosszak közötti eltéréseket gyakorlatilag elhanyagolhatjuk (például a geodéziában használatos vetületeknél). Nagyobb mértékben változna a méretarány az olyan térképeken, amelyeken a hossztorzulásnak nem szabunk határt, mert a vetületi hosszak többszörösei is lehetnek az alapfelületi hosszaknak (például a földrajzi vetületeknél).

9 VÉGES NAGYSÁGÚ IDOMOK GEODÉZIAI ÁBRÁZOLÁSA

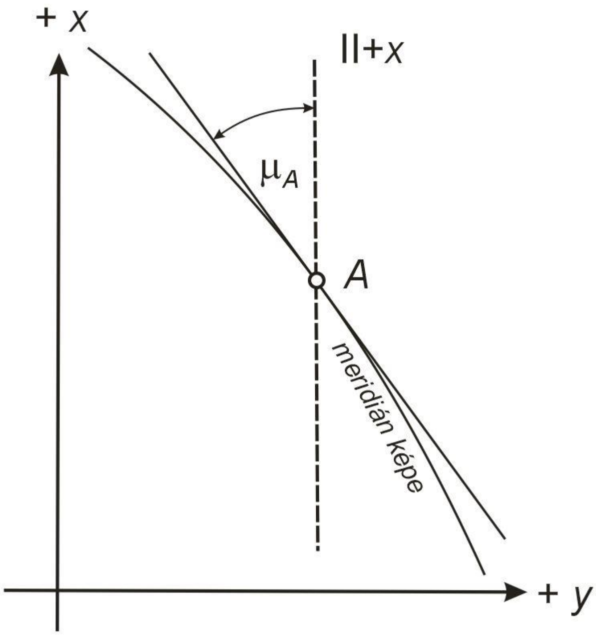


A geodéziai ábrázolás

Az alapfelületre vonatkozó mérési eredményekből a háromszögelési alappontok képfelületi koordinátáit úgy számítjuk ki, hogy számszerűen figyelembe vesszük a vetítésből adódó korrekciókat. A háromszögelési hálózat oldalai az alapfelületen geodéziai vonalak (ortodrómák) a vetületi síkon (képfelületen) pedig egyenesek. A térképen egyenesekkel kötjük össze a térképi idomok határvonalainak töréspontjait is. A gömbön, mint képfelületen a töréspontokat legnagyobb gombi körökkel kötjük össze. Az alapfelület legrövidebb vonalának valódi képe általában nem esik egybe a képfelületi legrövidebb vonallal. Mivel a geodéziai ábrázolásnál nagy pontosságra törekszünk számításba kell vennünk a két vonal különbözősége által okozott irány-, hossz- és területi eltéréseket.

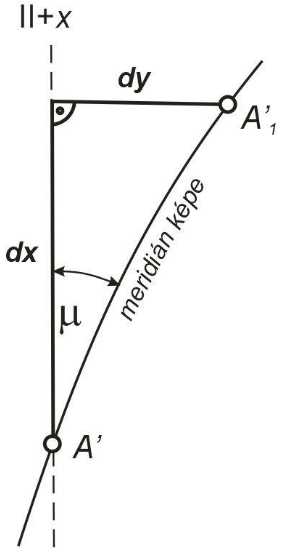
9.1 VETÜLETI MERIDIÁNKONVERGENCIA

Az alapfelületi meridián pontonként vetített képe általában görbe vonal. Valamely pontban értelmezett vetületi meridiánkonvergencián azt a hegyesszöget értjük, amelyet a meridián valódi képének a pontbeli érintője a vetületi kezdőmeridián egyenesként jelentkező képével (általában az *x* tengely) bezár *A vetületi meridiánkonvergenciát* μ *–vel jelöljük, és akkor tekintjük pozitívnak, amikor a meridiánkép érintőjét az óramutató járásával egyezően tudjuk rövidebb úton a kezdőmeridián képével párhuzamos helyzetbe forgatni*. Az *ábrán* a μ előjele pozitív.



A vetületi meridiánkonvergencia

Mozdítsuk el meridiánján az A pontot elemi ds távolságra az A_1 pontba. A képfelületen az A pont az x tengellyel párhuzamos egyenessel a vetületi meridiánkonvergenciát, vagyis a μ szöget bezáró pályán mozgott. Az A' és az A_1'ponthelyek síkkoordinátái közötti különbség, tekintettel arra, hogy csak a φ földrajzi koordináta változott (*5.7. ábra*):



A vetületi meridiánkonvergencia meghatározása

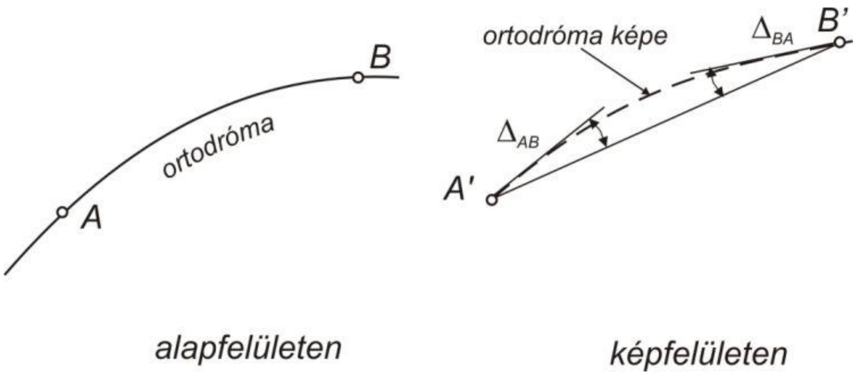
$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi , \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi .$$

Ezek szerint:

$$\tan\mu = -\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}}{\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}} . \qquad (5.3)$$

Utóbbi képletben az előjelet azért kellett megváltoztatni, hogy a meridiánkonvergencia előjele megállapodásunk szerint alakuljon.

9.2 MÁSODIK IRÁNYREDUKCIÓ



Második irányredukció

Az ábra bal oldali része mutatja az alapfelületen az *A* és *B* pontok közötti ortodróma ívét. A jobb oldali ábrarészen a szaggatott vonal az *AB* ortodróma pontonként vetített valódi képét mutatja a síkon. Ez a kép általában valamilyen görbe vonal. Az *A*' és B_2' pontképeket a síkon a képfelületi legrövidebb vonallal (egyenes) kötjük össze.

Azokat a szögeket, amelyeket az ortodróma valódi képéhez az A_1' és *B*' pontokban húzott érintők a képfelületi legrövidebb vonallal zárnak be, *második irányredukciónak* nevezzük. *Előjelét úgy értelmezzük, hogy az irányredukciót a valódi kép érintőjének irányértékével előjelhelyesen összevonva a képfelületi legrövidebb vonal irányértékét kapjuk*. Vagyis a második irányredukció akkor pozitív, ha a valódi kép érintőjét az óramutató járásával megegyezően tudjuk a képfelületi legrövidebb vonal irányába beforgatni. Ellentétes értelmű forgatásnál az előjel negatív. Az *ábrán* a Δ_{AB} előjele pozitív, a Δ_{BA} előjele pedig negatív.

Az irányredukció előjelhelyes számítására szolgáló összefüggés különböző vetületeken más és más alakú. A képletekbe mindig a szakasz két végpontjának síkkoordinátáit (*y, x*) kell behelyettesíteni. Az irányredukció előjelét szemlélet alapján úgy ellenőrizhetjük, hogy a pontokat koordinátáik (vagy közelítő koordinátáik) alapján a térképre felrakjuk, és a geodéziai vonal valódi képét a vetület fajtájától függően ábrázoljuk. Az előjel nem függ a képfelületi koordináta-rendszer tájékozásától.

A második irányredukciót nem szabad összetéveszteni az első irányredukcióval. Az első irányredukció ugyanis az alapfelületi legrövidebb vonal és annak a képfelületre pontonként vetített, valódi képe között ad kapcsolatot. Ezzel szemben a második irányredukció a képfelületre pontonként vetített valódi kép és a képfelületi legrövidebb vonal közötti vonatkozást mutatja, vagyis tisztán képfelületi mennyiség.

A második irányredukciót élesen meg kell különböztetni az iránymodulustól is. Míg az iránymodulus elemi hosszúságú vonaldarabra vonatkozik, addig a második irányredukció véges hosszúságú vonaldarabokhoz tartozik, és míg az iránymodulus az elemi kis vonaldarabnak az első vetületi főiránytól mért irányhajlását a valódi képnek az első főirány megfelelőjétől számított irányhajlásával hasonlítja össze (illetve tangensük viszonyát mutatja), addig a második irányredukció a véges hosszúságú vonaldarab valódi képe és a képfelületi legrövidebb vonal iránya közötti különbséget jelenti.

Általános torzulású és területtartó vetületen, tehát *minden vetületen, amely nem szögtartó, az irányokat, illetve a szögeket általában két redukcióval kell ellátni*. Az egyik az első irányredukció, vagyis a $\bar{\Delta} = (\omega' - \omega)$ különbség, amely abból adódik, hogy a vonalaknak pontonkénti valódi vetítésekor is áll elő szögtorzulás. A második pedig a második irányredukció, amely abból származik, hogy *a képfelületen az idomok sarokpontjait nem pontonkénti vetítéssel kapott vonalakkal, hanem a képfelületi legrövidebb vonalakkal kötjük össze*. Az előbbiekből magától értetődik, hogy szögtartó vetületeken a szögtartóság csupán a pontonként vetített valódi képekre vonatkozik.

Mivel a *szögtartó vetületeken az első irányredukció mindig zérus, ezeknél csak második irányredukcióval kell számolnunk*.

Egy szögérték két irányérték különbségeként adódik; ennek megfelelően a szögredukció is két irányredukció különbségeként számítható. Ha az *Sz* szög két szára I_1 és I_2 irány, vagyis

$Sz = I_2 - I_1$,

Akkor az első szögredukció:

$\bar{\Delta}_{sz} = \bar{\Delta}_2 - \bar{\Delta}_1$,

ugyanúgy a második szögredukció a

$\Delta_{sz} = \Delta_2 - \Delta_1$

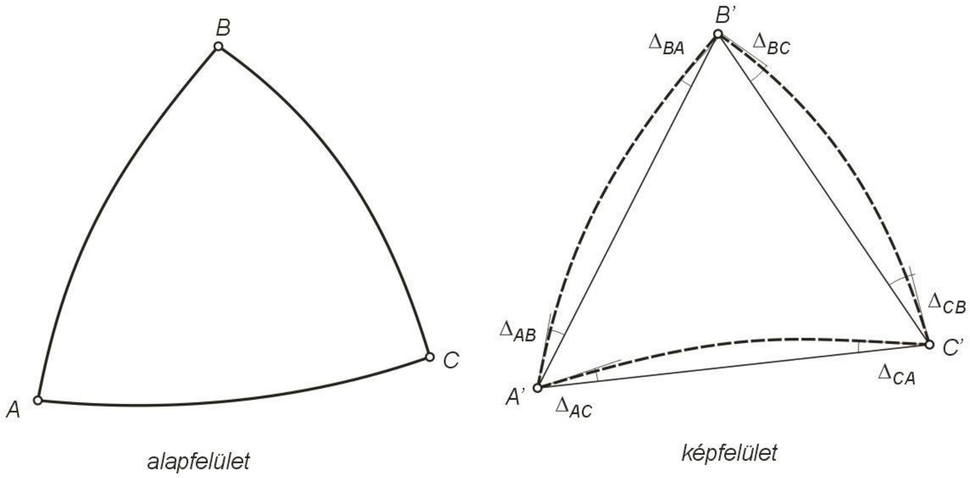
képletből adódik. A teljes szögtorzulás pedig

$\bar{\Delta}_{sz} + \Delta_{sz}$;

szögtartó vetületen

$\bar{\Delta}_{sz} = 0$.

A továbbiakban, tekintve azt, hogy a geodéziai célokra alkalmazott vetületek szögtartók, ha röviden irányredukciót és szögredukciót említünk, mindig a második irányredukcióra, illetve a második szögredukcióra gondolunk.



Összefüggés a szögfelesleg és az irányredukciók között

Az irányredukció egyszerű kapcsolatban van az ε gömbi, illetve ellipszoidi szögfelesleggel. A gömbháromszög belső szögeinek összege: $180^o + \varepsilon_{\text{gömb}}$, a síkháromszögé 180^o. Kell tehát, hogy a háromszög oldalainál levő összesen hat irányredukció a szögfelesleggel legyen egyenlő (*5.4. ábra*):

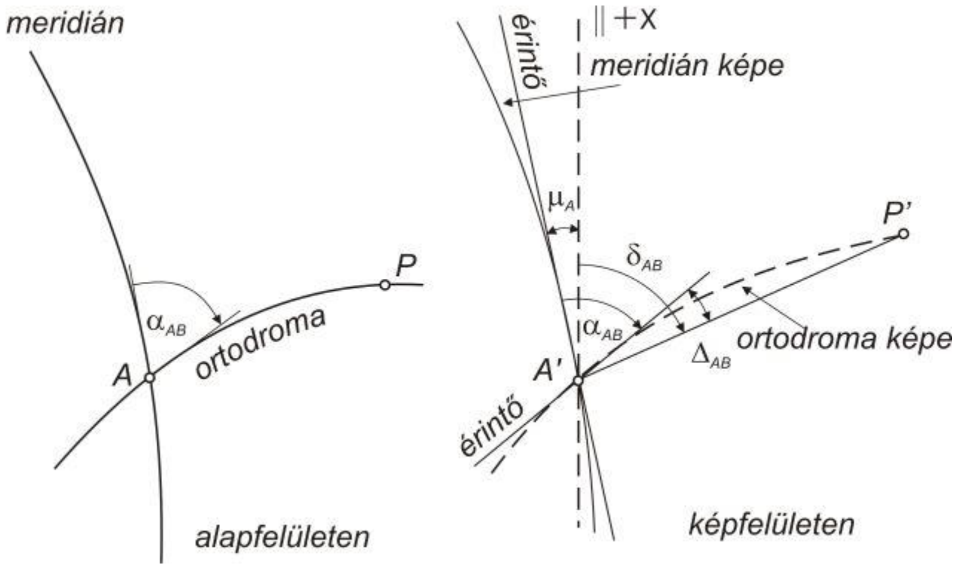
$$\Sigma \mid \Delta \mid = \varepsilon_{\text{gömb.}} \tag{5.1}$$

Ellipszoidról síkra vetítve az előbbihez hasonlóan:

$$\Sigma \mid \Delta \mid = \varepsilon_{\text{ellipszoid}}. \tag{5.2}$$

A továbbiakban a szögfelesleg és az irányredukció közötti egyszerű összefüggést fogjuk felhasználni az egyes szögtartó vetületeknél az irányredukciók meghatározására.

9.3 ÁTSZÁMÍTÁS AZIMUT ÉS IRÁNYSZÖG KÖZÖTT



Az azimut és az irányszög összefüggése

A vetületi meridiánkonvergencia ismeretére például akkor van szükségünk, amikor az alapfelület két pontján átmenő legrövidebb vonal azimutjából ki akarjuk számítani a két pont képfelületi megfelelőjét összekötő egyenes irányszögét, vagy ha a fordított műveletet kívánjuk elvégezni. A μ számítására szolgáló összefüggések vetületi fajtánként különbözőek. A geodéziai vetületekre levezettek olyan összefüggéseket, amelyekbe a kérdéses pont alapfelületi (Φ vagy Λ, illetve φ vagy λ) és olyanokat is, amelyekbe a pont vetületi (*y, x*) koordinátáit kell behelyettesíteni. Az előbbi képleteket akkor használjuk, amikor azimutból (α) akarunk irányszöget (δ) számítani, pl. giroteodolitos mérésnél. Az utóbbi képletekre akkor van szükségünk, amikor a síkkoordinátákat ismerjük és az azokból számított irányszögből akarunk azimutot meghatározni (pl. parabolaantennák tájékozásakor).

Az *ábra* alapján szögtartó vetítést feltételezve:

$$\delta_{AP} = \alpha_{AP} - \mu_A + \Delta_{AP},$$

$$\alpha_{AP} = \delta_{AP} + \mu_A - \Delta_{AP},$$

ahol Δ_{AP} a második irányredukció az *A* pontban.

Ha a síkon a koordináta-rendszer *x* tengelyének pozitív ága dél felé mutat (délnyugati rendszer) akkor az előbbi egyenletek jobb oldalához 180°-ot hozzá kell adni.

Nem szögtartó vetületen nem csak a második, hanem az első irányredukciót is figyelembe kell venni, tehát Δ_{AP} helyett $(\overline{\Delta_{AP}} + \Delta_{AP})$-vel kell számolnunk.

Nézzük meg, hogyan alakulna az átszámítás nem szögtartó, DNy-i tájolású koordináta rendszer esetén!

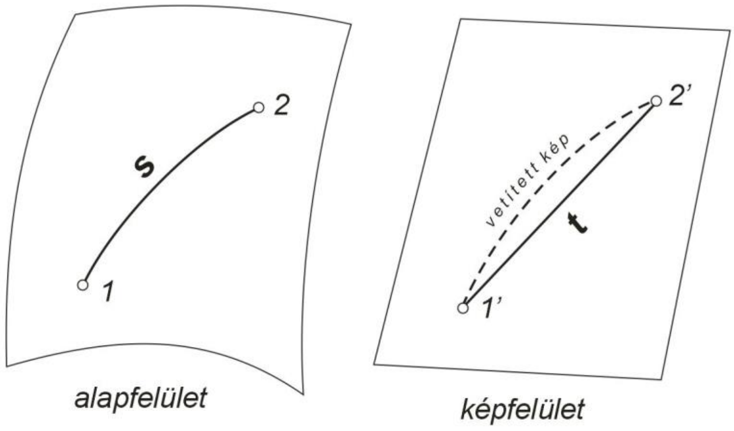
$$\delta_{AP} = \propto_{AP} - \mu_A + \overline{\Delta_{AP}} + \Delta_{AP} \pm 180°$$

9.4 Hossztorzulási tényező

Az alapfelület két pontjának a képfelületre vetített képét összekötő legrövidebb vonal *t* hosszának és a két pontot az alapfelületen összekötő legrövidebb vonal *s* hosszának viszonyát *hossztorzulási tényezőnek* nevezzük, és *m*-mel jelöljük (*5.8. ábra*):

$$m = \frac{t}{s}. \qquad (5.4)$$

A hossztorzulási tényezőt élesen meg kell különböztetni a lineármodulustól. A lineármodulus elemi kis távolságra, a hossztorzulási tényező viszont véges távolságra vonatkozik, és míg a lineármodulus az elemi vonaldarab és annak valódi képe között állapít meg arányt, addig a hossztorzulási tényező két véges távolságú alapfelületi pont, illetve képfelületi megfelelőik között húzott legrövidebb vonalak hosszának arányát fejezi ki.



Alap- és képfelületi legrövidebb vonal

A hossztorzulási tényező számítására szolgáló összefüggések a vetület fajtájától függően különbözőek. Általában a végpontok *y, x* síkkoordinátáit kell a képletekbe behelyettesíteni. A leggyakrabban előforduló geodéziai vetületekhez ezek az összefüggések rendelkezésre állnak.

A Föld méreteihez viszonyítva egy néhány km-es távolságot elemi hossznak lehet tekinteni, ezért általában 5 km távolságig:

$$m \approx l_k \,,$$

ahol l_k a vonaldarab közepéhez tartozó lineármodulus.

15 km távolságig:

$$m \approx \frac{l_1 + l_2}{2} \,,$$

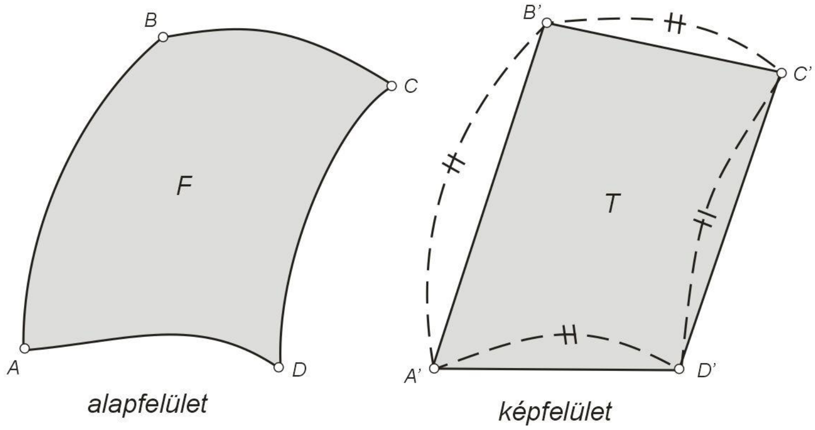
ahol l_1 és l_2 a vonaldarab végpontjaihoz tartozó lineármodulusok. Nagyobb távolságokra pedig, mintegy 100 km-ig:

$$m \approx \frac{1}{6}\left(l_1 + 4l_k + l_2\right).$$

Területtorzulási tényező és területredukció

Valamely véges nagyságú alapfelületi idom (legrövidebb vonalak által határolt) képfelületi területének és alapfelületi felületének (területének) arányát *területtorzulási tényezőnek*, a kép területének és az eredeti felületnek a különbségét pedig *területredukciónak* nevezzük. Ha az alapfelületi területet *F*-fel, a képi területet *T*-vel, a területtorzulási tényezőt *f*-fel, a területredukciót pedig ΔT-vel jelöljük, akkor

$$f = \frac{T}{F} \quad \text{és} \quad \Delta T = T - F. \tag{5.5}$$



Alapfelületi idom képfelületi megfelelője

A területtorzulási tényezőt két okból élesen meg kell különböztetni a területi modulustól. A területi modulus az alapfelületi elemi nagyságú terület és annak valódi képfelületi területe között létesít kapcsolatot, a területtorzulási tényező viszont az alapfelületi véges nagyságú idom területe és az annak megfelelő képfelületi legrövidebb vonalakkal határolt idom területének viszonyát fejezi ki (*5.9. ábra*)

A geodéziai gyakorlatban legtöbbször előforduló kisebb idomokra nézve a területtorzulási tényező általában helyettesíthető a területi modulussal, mert kisebb környezetben:

$$f \approx \tau \,. \tag{5.6}$$

Így gyakorlatilag helyesen járunk el, ha a nagyobb területű idomot a pontossági követelményektől függően több részre osztjuk, és a területtorzulást idomrészenként számítjuk. Ha az egyes részek megfelelően kicsik, a területtorzulási tényezőt mindegyikre közel egyenlőnek vehetjük az ott érvényes területi modulussal.

A területtorzulási tényező konkrét képlete mindegyik vetületen más és más alakú. Mindig az elhatároló pontok síkkoordinátáit kell a képletekbe behelyettesíteni.