Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

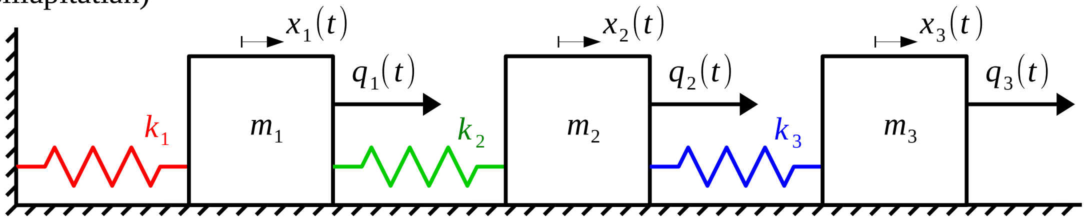
Többszabadságfokú rendszerek mechanika rezgései

¤ modell felvétele
¤ mozgás differenciálegyenlete - felírás
- osztályozás

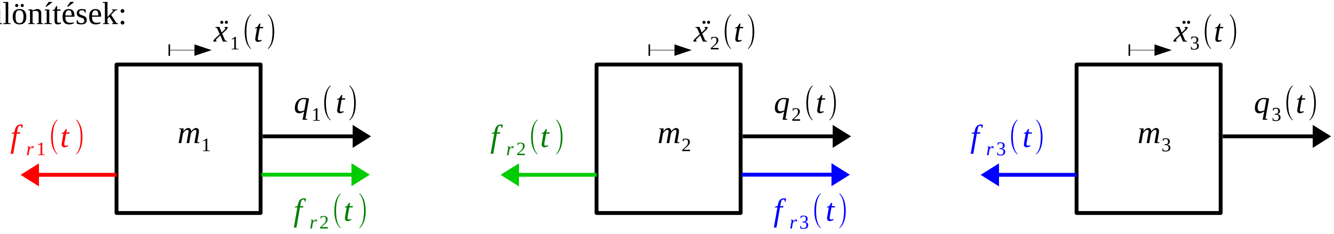
¤ megoldás

Többszabadságfokú rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet

Modell (csillapítatlan)



Elkülönítések:



$$m_1 \cdot \ddot{x}_1(t) = q_1(t) - f_{r1}(t) + f_{r2}(t) \qquad m_2 \cdot \ddot{x}_2(t) = q_2(t) - f_{r2}(t) + f_{r3}(t) \qquad m_3 \cdot \ddot{x}_3(t) = q_3(t) - f_{r3}(t)$$

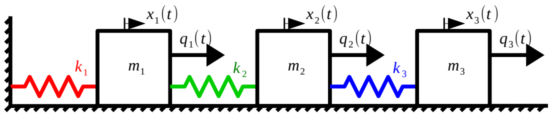
Lineáris rugók:

$$f_{r1}(t) = k_1 \cdot \Delta l_1 \quad = k_1 \cdot x_1(t)$$
$$f_{r2}(t) = k_2 \cdot \Delta l_2 \quad = k_2 \cdot (x_2(t) - x_1(t))$$
$$f_{r3}(t) = k_3 \cdot \Delta l_3 \quad = k_3 \cdot (x_3(t) - x_2(t))$$

A három egyenletbe behelyettesítve:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{x}_1(t) &+ k_1 \cdot x_1(t) - k_2 \cdot (x_2(t) - x_1(t)) & &= q_1(t) \\
m_2 \ddot{x}_2(t) &+ k_2 \cdot (x_2(t) - x_1(t)) - k_3 \cdot (x_3(t) - x_2(t)) & &= q_2(t) \\
m_3 \ddot{x}_3(t) &+ k_3 \cdot (x_3(t) - x_2(t)) & &= q_3(t)
\end{aligned}$$

Többszabadságfokú rendszer rezgése – mozgásegyenlet



A három egyenletbe behelyettesítve:

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1(t) &+ k_1\cdot x_1(t) - k_2\cdot(x_2(t)-x_1(t)) &&= q_1(t)\\
m_2\ddot{x}_2(t) &+ k_2\cdot(x_2(t)-x_1(t)) - k_3\cdot(x_3(t)-x_2(t)) &&= q_2(t)\\
m_3\ddot{x}_3(t) &+ k_3\cdot(x_3(t)-x_2(t)) &&= q_3(t)
\end{aligned}$$

Az egyenletekben a változók együtthatóit kigyűjtve:

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1(t) &+ (k_1+k_2)\cdot x_1(t) - k_2\cdot x_2(t) + 0\cdot x_3(t) &&= q_1(t)\\
m_2\ddot{x}_2(t) &- k_2\cdot x_1(t) + (k_2+k_3)\cdot x_2(t) - k_3\cdot x_3(t) &&= q_2(t)\\
m_3\ddot{x}_3(t) &+ 0\cdot x_1(t) - k_3\cdot x_2(t) + k_3\cdot x_3(t) &&= q_3(t)
\end{aligned}$$

Az egyenletek mátrixos alakban is felírhatók:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0\\ 0 & 0 & m_3\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}}\underbrace{\begin{bmatrix}\ddot{x}_1(t)\\ \ddot{x}_2(t)\\ \ddot{x}_3(t)\end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{x}}(t)}+\underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0\\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3\\ 0 & -k_3 & k_3\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(t)}=\underbrace{\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\\ q_3(t)\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{q}(t)}$$

Ahol:

- $\boldsymbol{x}(t)$: A szf.-ok elmozdulásvektora
- $\ddot{\boldsymbol{x}}(t)$: A szf.-ok gyorsulásvektora
- $\boldsymbol{M}$ Tömegmátrix
- $\boldsymbol{K}$ Merevségi mátrix (szimmetrikus!!!)

A csillapítatlan rendszer mátrix-differenciálegyenlete:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$$

Kézírással: $\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{q}(t)$

N szabadságfok esetén:

$\boldsymbol{x}(t), \ddot{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{q}(t)$ N elemű vektor

$\boldsymbol{M}, \boldsymbol{K}$ $N\times N$ méretű mátrix

Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Többszabadságfokú rendszerek mechanika rezgései

¤ modell felvétele
¤ mozgás differenciálegyenlete - felírás
- osztályozás
¤ megoldás

Többszabadságfokú rendszer rezgése – tömeg- és merevségi mátrix

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$$

$\boldsymbol{M}$ tömegmátrix: e tárgyban diagonálmátrix lesz,
a szabadságfok pontjába redukált tömeg.

$\boldsymbol{K}$ merevségi mátrix: meghatározható szabadságfokok mozgásegyenlete, ← ezt csináltuk előbb
merevség jelentése,
ellentett jelentése alapján.

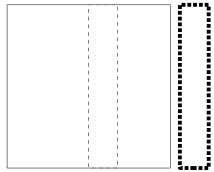
Merevségi mátrix számítása a merevség jelentése alapján

Ha a teherfüggvény egy statikus $\boldsymbol{q}$ teher, akkor a mozgásegyenletnek is létezik statikus $\boldsymbol{x}_s$ megoldása.
Mivel ekkor a gyorsulások nullák, ezért a mozgásegyenletből egyensúlyi egyenlet lesz:

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{0}+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{q}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}0\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{array}}$$

Ha az $\boldsymbol{x}_s$ elmozdulásvektor a j-edik egységvektor $(\boldsymbol{e}_j)$, akkor a bal oldali művelet elvégzése után a $\boldsymbol{K}$ mátrix j-edik oszlopát kapjuk. (Jelöljük ezt $\boldsymbol{k}_j$-vel.)



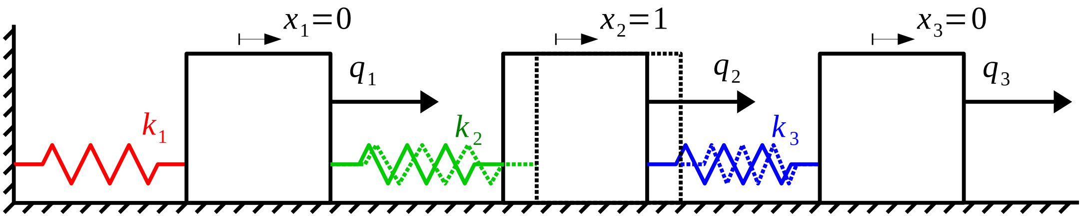
A $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{k}_j=\boldsymbol{q}$ egyensúlyi feltétel alapján ha a $\boldsymbol{k}_j$ vektor egyes elemei hatnak az egyes szabadságfokokra *egyszerre*, akkor az összes szabadsági fok elmozdulása nulla lesz, kivéve a j-edik szabadsági fokét, amelyik pedig éppen 1 lesz.

Megfordítva használjuk:
Legyen a j-edik szabadságfok elmozdulása 1, miközben az összes többi szabadságfok elmozdulása legyen 0.
Az egyensúly biztosításához a l-edik szabadsági fokra működtetendő q_l erő lesz a $\boldsymbol{k}_j$ vektor l-edik eleme azaz a merevségi mátrix k_{lj} eleme (l-edik sor, j-edik oszlop).

Többszabadságfokú rendszer rezgése – merevségi mátrix I.

Megfordítva használjuk:
Legyen a j-edik szabadságfok elmozdulása 1, miközben az összes többi szabadságfok elmozdulása legyen 0.
Az egyensúly biztosításához a l-edik szabadsági fokra működtetendő q_l erő lesz a $\boldsymbol{k}_j$ vektor l-edik eleme
azaz a merevségi mátrix k_{lj} eleme (l-edik sor, j-edik oszlop).

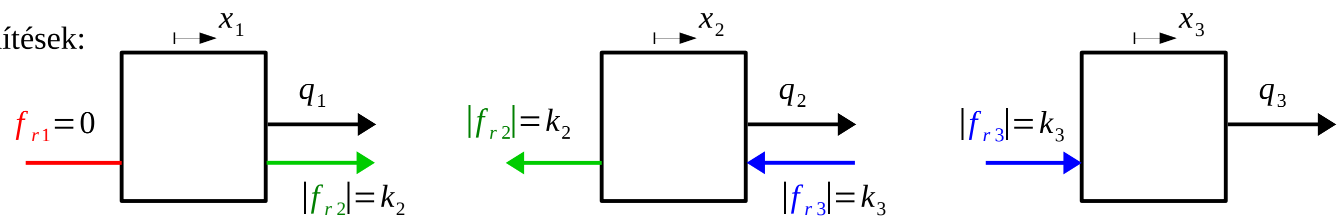
Példa: merevségi mátrix második oszlopának számítása



A rugók megnyúlásai: $\Delta l_1=0$, $\Delta l_2=1$, $\Delta l_3=-1$

A rugóerők: $f_{r1}=0$, $f_{r2}=k_2(\textit{húzerő})$, $f_{r3}=-k_3(\textit{nyomóerő})$

Elkülönítések:



Egyensúlyi egyenletek:

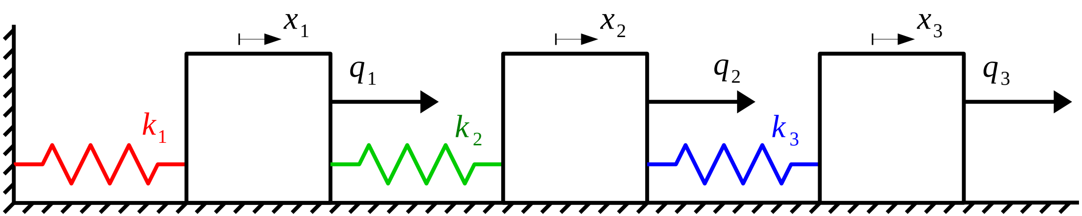
$$0=q_1+k_2 \rightarrow q_1=-k_2$$
$$0=q_2-k_2-k_3 \rightarrow q_2=k_2+k_3$$
$$0=q_3+k_3 \rightarrow q_3=-k_3$$

$$\boldsymbol{k}_2=\begin{bmatrix} -k_2 \\ k_2+k_3 \\ -k_3 \end{bmatrix}$$

HF: a másik két oszlop

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

Többszabadságfokú rendszer rezgése – merevségi mátrix II.



$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{q}$$

A merevségi mátrix *statikus* használata alapján :az l-edik sor j-edik oszlopát a j-edik szabadságfok elmozdulása miatt az l-edik szabadságfokra ható belső erő számítására használjuk.

Nézzük csak a k_3 rugó hatását.

A rugó a 2. és 3. szabadságfokot köti össze, ezért

¤ csak akkor keletkezik benne erő, ha a 2., vagy a 3. szabadságfok elmozdul
a többbi szabadságfok elmozdulása *nem* befolyásolja az erejét ➜ azokra az oszlopokra nincs hatása

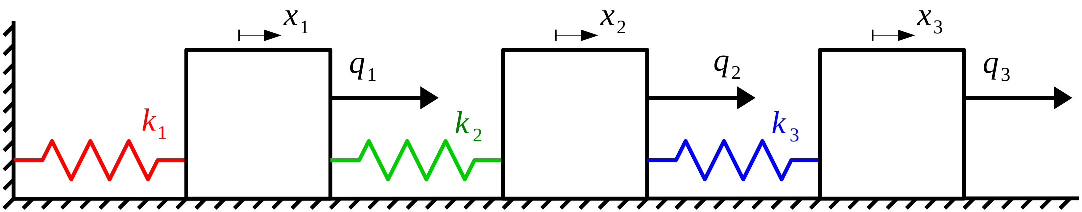
¤ csak a 2. és a 3. szabadságfokra hat a rugóereje
a többbi szabadságfokra nem hat az ereje ➜ azokra a sorokra nincs hatása

Valóban, csak a $k_{22}, k_{23}, k_{32}, k_{33}$ elemeket befolyásolja k_3.

Ez felhasználható a merevségi mátrix rugalmas elemenkénti összeállítása (*kompilálása*) során.
Egy kezdetben nulla elemeket tartalmazó mátrixhoz elemenként/rugónként hozzáadjuk azok hatását:
a főátlóban levő addigi értékhez mindig hozzáadjuk a rugómerevséget,
a főátlón kívüli elemekből pedig levonjuk a rugómerevséget.

egymással szembe mutató szabadságfokok esetén a főátlón kívül is hozzáadni kellene a merevséget

Többszabadságfokú rendszer rezgése – merevségi mátrix III. (kompilálás)



A kezdeti mátrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az első rugó csak az első szabadságfokra hat, így az 1,1 elemhez adjuk a merevségét:

$$\begin{bmatrix} 0+k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A második rugó az eslő és a második szabadságfokra hat, így az 1,1 és a 2,2 elemekhez hozzáadjuk a merevségét, az 1,2 és 2,1 elemekből pedig kivonjuk:

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & 0-k_2 & 0 \\ 0-k_2 & 0+k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & +k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

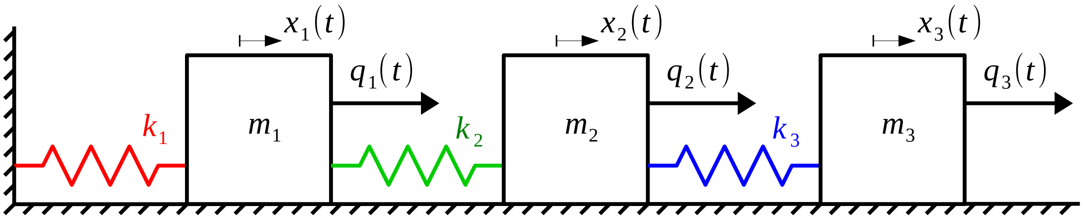
A harmadik rugó a második és a harmadik szabadságfokra hat, így a 2,2 és a 3,3 elemekhez hozzáadjuk a merevségét, a 2,3 és 3,2 elemekből pedig kivonjuk:

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & +k_2+k_3 & 0-k_3 \\ 0 & 0-k_3 & 0+k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & +k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

Nincs több elem, így az utolsó mátrix a merevségi mátrix: $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & +k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$

Többszabadságfokú rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet

Modell



Mátrix-differenciálegyenlet: $$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$$

Ha a teherfüggvény egy statikus $\boldsymbol{q}$ teher, akkor a mozgásegyenletnek is létezik statikus $\boldsymbol{x}_s$ megoldása.
Mivel ekkor a gyorsulások nullák, ezért a mozgásegyenletből egyensúlyi egyenlet lesz:

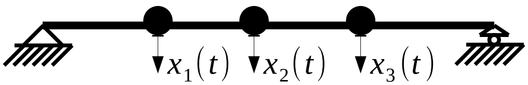
$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{0}+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{q}$$

Ha az $\boldsymbol{x}_s$ elmozdulásvektor a j-edik egységvektor $(\boldsymbol{e}_j)$, akkor a bal oldali művelet elvégzése után a $\boldsymbol{K}$ mátrix j-edik oszlopát kapjuk. (Jelöljük ezt $\boldsymbol{k}_j$-vel.)

A $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{k}_j=\boldsymbol{q}$ egyensúlyi feltétel alapján ha a $\boldsymbol{k}_j$ vektor egyes elemei hatnak az egyes szabadságfokokra *egyszerre*, akkor az összes szabadsági fok elmozdulása nulla lesz, kivéve a j-edik szabadsági fokét, amelyik pedig éppen 1 lesz.

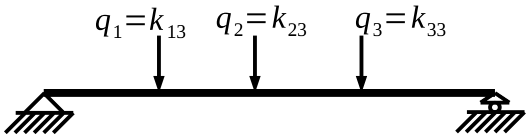
Megfordítva használjuk:
Legyen a j-edik szabadságfok elmozdulása 1, miközben az összes többi szabadságfok elmozdulása legyen 0.
Az egyensúly biztosításához a l-edik szabadsági fokra működtetendő q_l erő lesz a $\boldsymbol{k}_j$ vektor l-edik eleme azaz a merevségi mátrix k_{lj} eleme (l-edik sor, j-edik oszlop).

Többszabadságfokú rendszer rezgése – diszkretizált szerkezet merevségi mátrixa I.

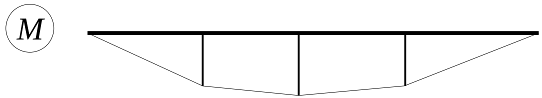


Itt az összes szabadságfok kapcsolódik
→ nem tudunk kompilálni

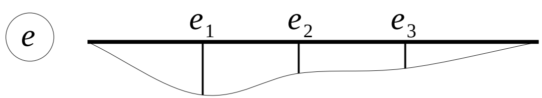
Példa: Számítás a jelentésből kiindulva
a harmadik oszlop elemei, mint erők működtethetők a szabadsági fokokra



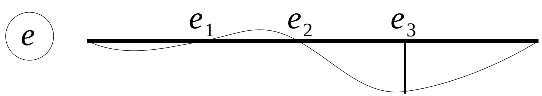
a három paraméter függvényében számítható egy nyomatéki ábra



a három paraméter függvényében számított nyomatéki ábrából számítható a szabadságfokok elmozdulása



a merevségi mátrix oszlopainak jelentése miatt
$e_1=0, e_2=0, e_3=1$



→ *a három lineáris egyenletből* k_{13}, k_{23}, k_{33} *meghatározható*

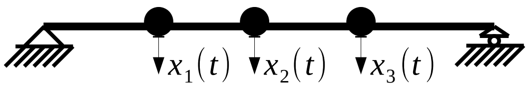
Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Többszabadságfokú rendszerek mechanika rezgései

¤ modell felvétele
¤ mozgás differenciálegyenlete - felírás
- osztályozás
¤ megoldás

Többszabadságfokú rendszer rezgése – diszkretizált szerkezet merevségi mátrixa II.



Paraméteres igénybevételi ábrák helyett:
→ induljunk ki a merevség ellentettjéből

Mátrixszal nem oszthatunk!
Az inverzével (ha van neki) szorozhatunk
a megfelelő oldalról (most balról):
$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{q}\rightarrow\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{q}\rightarrow\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{q}$

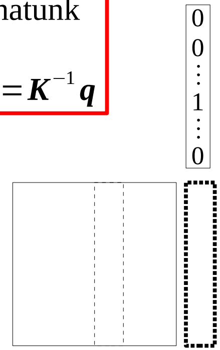
Ha $\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{q}$, akkor azt megoldva $\boldsymbol{x}_s$-re:

$$\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{K}^{-1}\cdot\boldsymbol{q}$$

Az inverz mátrix neve *hajlékonysági mátrix*, jele $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{q}$$

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K}^{-1}\Leftrightarrow\boldsymbol{K}=\boldsymbol{F}^{-1}$$

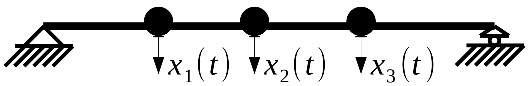


Ha a $\boldsymbol{q}$ tehervektor a j-edik egységvektor, akkor a jobb oldali művelet elvégzése után az $\boldsymbol{F}$ mátrix j-edik oszlopát kapjuk. (Jelöljük ezt $\boldsymbol{f}_j$-vel.)

Az $\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{f}_j$ egyensúlyi feltétel alapján ha csak a j-edik szabadságfokra hat egy egységerő, a többi szabadságfok pedig terheletlen, akkor az egyes szabadságfokok elmozdulását tartalmazó $\boldsymbol{x}_s$ vektor elemei az $\boldsymbol{f}_j$ vektor elemeivel lesznek azonosak.

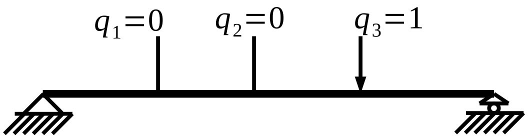
Használata:
A j-edik szabadságfokra működtetett egységerőből tudjuk számolni $\boldsymbol{f}_j$-t.
Az összes szabadságfokon végég haladva megkapjuk az $\boldsymbol{F}$ mátrixot.
A hajlékonysági mátrix *invertálásával* megkapjuk a merevségi mátrixot.

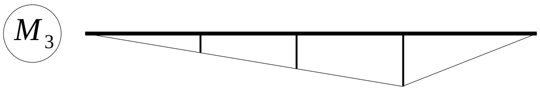
Többszabadságfokú rendszer rezgése – diszkretizált szerkezet hajlékonysági mátrixa

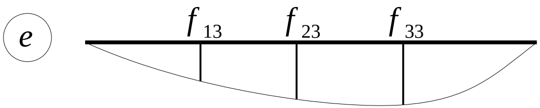


Példa: Számítás a jelentésből kiindulva

a harmadik oszlop elemei

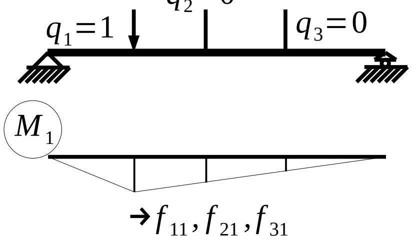


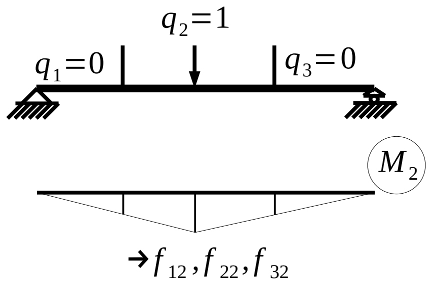




$$\boldsymbol{f}_3=\begin{bmatrix} f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & f_{13} \\ \cdots & \cdots & f_{23} \\ \cdots & \cdots & f_{33} \end{bmatrix}$$

A teljes mátrixhoz kell még a két másik szabadságfoknak megfelelő két eset:





Csak a szabadságfokok elmozdulására van szükség, nem a teljes elmozdult alakra. Egy-egy pont elmozdulását célszerű a *virtuális erők tételével* számolni.

Az ehhez szükséges virtuális erőrendszereket már felvettük.

Így aztán például: $f_{12}=\int_L \frac{M_1 M_2}{EI}\,\mathrm{d}l$

Ebből az előállításból az is látszik, hogy $\boldsymbol{F}$ szimmetrikus lesz, hiszen $f_{lj}=\int_L \frac{M_l M_j}{EI}\,\mathrm{d}l=\int_L \frac{M_j M_l}{EI}\,\mathrm{d}l=f_{jl}$

Végül $\boldsymbol{F}$ ismeretében $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{F}^{-1}$

(és szimmetrikus mátrix inverze szimmetrikus)