Többszabadságfokú rendszerek mechanikai rezgései

Szabadrezgés

Többszabadságfokú, lineárisan rugalmas, csillapítatlan rendszer mozgásegyenlete

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{q}(t)$$

$\underset{N\times 1}{\underline{x}}(t)$: szabadságfokok elmozdulásainak vektora (elmozdulásvektor)

$\underset{N\times 1}{\underline{\ddot{x}}}(t)$: szabadságfokok gyorsulásainak vektora (gyorsulásvektor)

$\underset{N\times N}{\underline{\underline{M}}}$: tömegmátrix (egyelőre diagonálmátrix a szabadságfokok tömegével/tehetetlenségével)

$\underset{N\times N}{\underline{\underline{K}}}$: merevségi mátrix

oszlop fizikai jelentése: egyetlen szf. egységnyi elmozdításához szükséges erők

$\underset{N\times 1}{\underline{q}}(t)$: szabadságfokokra ható külső erők vektora

$$\underline{x}(t)=?$$

kezdeti feltételek:

$$\underline{x}(0)=\underline{x}_0,\ \underline{\dot{x}}(0)=\underline{v}_0$$

Többszabadságfokú, lineárisan rugalmas, csillapítatlan rendszer mozgásegyenlete

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{q}(t)$$

szabadrezgés:

$\underline{q}(t)\equiv\underline{0}$

$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$

homogén mátrix-differenciálegyenlet

gerjesztett rezgés:

$\underline{q}(t)\neq\underline{0}$

$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{q}(t)$

inhomogén mátrix-differenciálegyenlet

Többszabadságfokú, lineárisan rugalmas, csillapítatlan rendszer mozgásegyenlete

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{q}(t)$$

Megoldás:

$$\underline{x}(t)=\underline{x}_g(t)+\underline{x}_h(t)$$

$x_g(t)$: az $\underline{M}\,\ddot{x}(t)+\underline{K}\,x(t)=q(t)$ egy partikuláris megoldása

$x_h(t)$: az $\underline{M}\,\ddot{x}(t)+\underline{K}\,x(t)=\underline{0}$ kiegészítő differenciál-egyenlet általános megoldása

↑

szabad paraméterek

↑

kezdeti feltételek

Többszabadságfokú rendszerek mechanikai rezgései

Szabadrezgés

Szabadrezgés általános megoldása

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$$

Keressük a megoldást $\underline{x}_h(t)=\underline{v}\cdot h(t)$ alakban!

$h(t)$ harmonikus függvény ω_0 körfrekvenciával:

$$h(t)=a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)$$

$\underline{v}$: időfüggetlen vektor

a szabadságfokok elmozdulásainak egymáshoz képesti arányát írja le

Triviális megoldás: $\underline{x}_h(t)\equiv 0$ → nem érdekel minket
akár azért, mert $\underline{v}=\underline{0}$, akár azért, mert $a=b=0$.

Szabadrezgés általános megoldása

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$$

Keressük a megoldást $\underline{x}_h(t)=\underline{v}\cdot h(t)$ alakban!

$h(t)$ harmonikus függvény ω_0 körfrekvenciával:

$$h(t)=a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)$$

$\underline{v}$: időfüggetlen vektor

a szabadságfokok elmozdulásainak egymáshoz képesti arányát írja le

$$\underline{x}_h(t)=\underline{v}\cdot\left(a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)\right)$$

Szabadrezgés általános megoldása

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$$

$$\underline{x}_h(t)=\underline{v}\cdot\left(a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)\right)=\underline{v}\cdot h(t)$$

sebességvektor:

$$\underline{\dot{x}}_h(t)=\underline{v}\cdot\omega_0\left(-a\sin(\omega_0 t)+b\cos(\omega_0 t)\right)$$

gyorsulásvektor:

$$\underline{\ddot{x}}_h(t)=\underline{v}\cdot(-\omega_0^2)\left(a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)\right)$$

$$\underline{\ddot{x}}_h(t)=\underline{v}\cdot(-\omega_0^2)\cdot h(t)$$

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{v}(-\omega_0^2)h(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{v}\,h(t)=\underline{0}$$

Szabadrezgés általános megoldása

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$$

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{v}\left(-\omega_0^2\right)h(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{v}\,h(t)=\underline{0}$$

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{v}\left(-\omega_0^2\right)+\underline{\underline{K}}\,\underline{v}=\underline{0}$$

$$\left(-\omega_0^2\right)\underline{\underline{M}}\,\underline{v}+\underline{\underline{K}}\,\underline{v}=\underline{0}$$

$\underline{v}$ sajátvektor

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{v}-\omega_0^2\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}=\underline{0}$$

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_0^2\,\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}=\underline{0} \qquad \underline{\underline{K}}\,\underline{v}=\omega_0^2\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}$$

Általánosított sajátértékfeladat

ω_0^2: sajátérték

Szokásos sajátértékfeladat:

$$\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\, \underline{\underline{I}}\right) \underline{v} = \underline{0} \qquad \underline{\underline{A}}\, \underline{v} = \lambda\, \underline{v}$$

Általánosított sajátértékfeladat

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega_0^2\, \underline{\underline{M}}\right) \underline{v} = \underline{0} \qquad \underline{\underline{K}}\, \underline{v} = \omega_0^2\, \underline{\underline{M}}\, \underline{v}$$

Szabadrezgés általános megoldása

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$$

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_0^2\,\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}=\underline{0}$$

Nemtriviális megoldás akkor létezik, ha:

az együtthatómátrix sorai, oszlopai lineárisan nem függetlenek

az együtthatómátrix szinguláris

az együtthatómátrix determinánsa nulla

$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_0^2\,\underline{\underline{M}}\right)$ főátlójában N -szer fordul elő ω_0^2.

$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_0^2\,\underline{\underline{M}}\right)$ determinánsa ω_0^2-ben N -edfokú polinom lesz.

A $\det\left(\underline{\underline{K}}-\omega_0^2\,\underline{\underline{M}}\right)=0$ egyenletnek tipikusan N megoldása lesz ω_0^2-re. (Stabil szerkezetnél mindegyik pozitív.)

Rendezzük ezeket a gyököket nagyság szerint sorba:

$$0\le\omega_{01}^2\le\omega_{02}^2\le\ldots\,\omega_{0N}^2$$

Szabadrezgés általános megoldása

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$$

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_0^2\,\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}=\underline{0}$$

Rendezzük ezeket a gyököket nagyság szerint sorba:

$$0\le\omega_{01}^2\le\omega_{02}^2\le\ldots\le\omega_{0N}^2$$

A megoldások pozitív négyzetgyökeit nevezzük a szerkezet sajátkörfrekvenciáinak:

$$0\le\omega_{01}\le\omega_{02}\le\ldots\le\omega_{0N}$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy nincsenek köztük többszörös gyökök:

$$0<\omega_{01}<\omega_{02}<\ldots<\omega_{0N}$$

Tanulság: többszabadságfokú szerkezetnek annyi sajátkörfrekvenciája van, ahány szabadságfoka.

Mindegyik ω_{0j} sajátkörfrekvenciához más $\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0j}^2\,\underline{\underline{M}}\right)$ együtthatómátrix $(j=1,\ldots,N)$, tehát más v_j sajátvektor tartozik.

Többszabadságfokú rendszerek mechanikai rezgései

Szabadrezgés

Szabadrezgés általános megoldása

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$$

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_0^2\,\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}=\underline{0}$$

Rendezzük ezeket a gyököket nagyság szerint sorba:

$$\omega_{01}^2\le\omega_{02}^2\le\ldots\le\omega_{0N}^2$$

A megoldások pozitív négyzetgyökeit nevezzük a szerkezet sajátkörfrekvenciáinak:

$$0\le\omega_{01}\le\omega_{02}\le\ldots\le\omega_{0N}$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy nincsenek köztük többszörös gyökök:

$$0<\omega_{01}<\omega_{02}<\ldots<\omega_{0N}$$

Tanulság: többszabadságfokú szerkezetnek annyi sajátkörfrekvenciája van, ahány szabadságfoka.

Mindegyik ω_{0j} sajátkörfrekvenciához más $\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0j}^2\,\underline{\underline{M}}\right)$ együtthatómátrix $(j=1,\ldots,N)$, tehát más v_j sajátvektor tartozik.

Szabadrezgés általános megoldása

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$$

Minden $j=1,\ldots,N$ -re meg kell határozni egy $\underline{v}_j$ sajátvektort:

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0\,j}^2\,\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}_j=\underline{0}$$

Ennek az egyenletrendszernek létezik nemtriviális megoldása,
hiszen $\omega_{0\,j}$ -t úgy határoztuk meg, hogy az együttható mátrix szinguláris legyen.

Viszont éppen emiatt van végtelen sok megoldása,
mert egy $\underline{v}_j$ sajátvektor bármilyen skalárszorosa is sajátvektor:

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0\,j}^2\,\underline{\underline{M}}\right)\left(\alpha\,\underline{v}_j\right)=\alpha\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0\,j}^2\,\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}_j=\alpha\,\underline{0}=\underline{0}$$

Kézi számítás:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \; & \; & \; & \; & \; \\ \hline \; & & & & \\ \hline \; & & & & \\ \hline \; & & & & \\ \hline \; & & & & \\ \hline \end{array}\;\begin{array}{|c|}\hline v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline v_3 \\ \hline v_4 \\ \hline v_5 \\ \hline \end{array}\;=\;\begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Szabadrezgés általános megoldása

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$$

Minden $j=1,\ldots,N$ -re meg kell határozni egy $\underline{v}_j$ sajátvektort:

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0\,j}^2\,\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}_j=\underline{0}$$

Ennek az egyenletrendszernek létezik nemtriviális megoldása,
hiszen $\omega_{0\,j}$ -t úgy határoztuk meg, hogy az együttható mátrix szinguláris legyen.

Viszont éppen emiatt van végtelen sok megoldása,
mert egy $\underline{v}_j$ sajátvektor bármilyen skalárszorosa is sajátvektor:

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0\,j}^2\,\underline{\underline{M}}\right)(\alpha\,\underline{v}_j)=\alpha\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0\,j}^2\,\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}_j=\alpha\,\underline{0}=\underline{0}$$

Kézi számítás:

$$\begin{bmatrix} \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ 1 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vegyük fel az egyik elemet
egy tetszőleges értékre!

Szabadrezgés általános megoldása

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$$

Minden $j=1,\dots,N$ -re meg kell határozni egy $\underline{v}_j$ sajátvektort:

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0j}^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}_j=\underline{0}$$

Ennek az egyenletrendszernek létezik nemtriviális megoldása,
hiszen ω_{0j} -t úgy határoztuk meg, hogy az együttható mátrix szinguláris legyen.

Viszont éppen emiatt van végtelen sok megoldása,
mert egy $\underline{v}_j$ sajátvektor bármilyen skalárszorosa is sajátvektor:

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0j}^2\underline{\underline{M}}\right)\left(\alpha\underline{v}_j\right)=\alpha\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0j}^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}_j=\alpha\underline{0}=\underline{0}$$

Kézi számítás:

$$\begin{bmatrix} \ & \ & \ & \ & \ \\ \ & \ & \ & \ & \ \\ \ & \ & \ & \ & \ \\ \ & \ & \ & \ & \ \\ \ & \ & \ & \ & \ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ 1 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$N-1$ egyenletből számítsuk ki a hiányzó elemeket!

Szabadrezgés általános megoldása

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$$

Minden $j=1,\ldots,N$ -re meg kell határozni egy $\underline{v}_j$ sajátvektort:

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0j}^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}_j=\underline{0}$$

Ennek az egyenletrendszernek létezik nemtriviális megoldása,
hiszen ω_{0j}-t úgy határoztuk meg, hogy az együttható mátrix szinguláris legyen.

Viszont éppen emiatt van végtelen sok megoldása,
mert egy $\underline{v}_j$ sajátvektor bármilyen skalárszorosa is sajátvektor:

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0j}^2\underline{\underline{M}}\right)\left(\alpha\underline{v}_j\right)=\alpha\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0j}^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}_j=\alpha\underline{0}=\underline{0}$$

Kézi számítás:

$$\begin{bmatrix} \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \\ \; & \; & \; & \; & \; \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ 1 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az N -edik egyenlettel ellenőrizhetjük
az eddigi számítást. $\left(\omega_{0j}\text{-t is!}\right)$

Szabadrezgés általános megoldása

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$$

Minden $j=1,\ldots,N$ -re meg kell határozni egy $\underline{v}_j$ sajátvektort:

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0\,j}^2\,\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}_j=\underline{0}$$

Ennek az egyenletrendszernek létezik nemtriviális megoldása,
hiszen $\omega_{0\,j}$ -t úgy határoztuk meg, hogy az együttható mátrix szinguláris legyen.

Viszont éppen emiatt van végtelen sok megoldása,
mert egy $\underline{v}_j$ sajátvektor bármilyen skalárszorosa is sajátvektor:

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0\,j}^2\,\underline{\underline{M}}\right)\left(\alpha\,\underline{v}_j\right)=\alpha\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0\,j}^2\,\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}_j=\alpha\,\underline{0}=\underline{0}$$

Kézi számítás:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\quad\;\;\quad\;\;\quad\;\;\quad\;\;\quad} \\ \boxed{\quad\;\;\quad\;\;\quad\;\;\quad\;\;\quad} \\ \boxed{\quad\;\;\quad\;\;\quad\;\;\quad\;\;\quad} \\ \quad\;\;\quad\;\;\quad\;\;\quad\;\;\quad \\ \boxed{\quad\;\;\quad\;\;\quad\;\;\quad\;\;\quad} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 1 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ha baj van (nullával kellene osztani), akkor
a kiválasztott elem 0 lenne és helyette
másikat kell választani.

Szabadrezgés általános megoldása

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$$

Minden $j=1,\ldots,N$ -re meg kell határozni egy $\underline{v}_j$ sajátvektort:

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0\,j}^2\,\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}_j=\underline{0}$$

A számolt $\underline{v}_j$ nem egyértelmű (nem *egy*).

Tegyük egyértelművé: normáljuk a tömegmátrixra!

Def.: Tömegmátrixra normált sajátvektor azt jelenti, hogy $\underline{v}_j$-t úgy skálázzuk, hogy $\underline{v}_j^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j=1$ legyen.

Egy kézi számításból kapott $\underline{v}_{j,\kappa}$ esetén a skálázás:

$$\underline{v}_j=\frac{1}{\sqrt{\underline{v}_{j,\kappa}^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_{j,\kappa}}}\,\underline{v}_{j,\kappa}$$

Biz.: $\underline{v}_j^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j=\left(\frac{1}{\sqrt{\underline{v}_{j,\kappa}^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_{j,\kappa}}}\,\underline{v}_{j,\kappa}^T\right)\underline{\underline{M}}\left(\frac{1}{\sqrt{\underline{v}_{j,\kappa}^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_{j,\kappa}}}\,\underline{v}_{j,\kappa}\right)=\frac{1}{\underline{v}_{j,\kappa}^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_{j,\kappa}}\,\underline{v}_{j,\kappa}^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_{j,\kappa}=1$

Szabadrezgés általános megoldása

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$$

Minden $j=1,\ldots,N$ -re meg kell határozni egy $\underline{v}_j$ sajátvektort:

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega_{0\,j}^2\,\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}_j=\underline{0}$$

A számolt $\underline{v}_j$ nem egyértelmű (nem *egy*).

Úgy is lehetne egyértelmű, hogy a hossza lenne 1:

$$\underline{v}_j^T\,\underline{v}_j=1$$

Úgy is lehetne egyértelmű, hogy a legnagyobb abszolútértékű eleme lenne 1.

De a tömegmátrixra normáltnak lesz később komoly haszna.

Szabadrezgés általános megoldása

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$$

A feltételezett $\underline{x}_h(t)=\underline{v}\cdot h(t)$ alakban nem egyetlen $\underline{v}$ vektor és egyetlen $h(t)$ harmonikus függvény van, hanem N ilyen megoldás lineáris kombinációja lesz:

$$\underline{x}_h(t)=\sum_{j=1}^{N}\underline{v}_j\cdot\left(a_j\cos\left(\omega_{0j}t\right)+b_j\sin\left(\omega_{0j}t\right)\right)$$

A sebességvektor pedig:

$$\underline{\dot{x}}_h(t)=\sum_{j=1}^{N}\underline{v}_j\cdot\omega_{0j}\left(-a_j\sin\left(\omega_{0j}t\right)+b_j\cos\left(\omega_{0j}t\right)\right)$$

Kezdeti feltételek

$$\underline{x}_h(t)=\sum_{j=1}^{N}\underline{v}_j\cdot\left(a_j\cos(\omega_{0j}t)+b_j\sin(\omega_{0j}t)\right)$$

$$\dot{\underline{x}}_h(t)=\sum_{j=1}^{N}\underline{v}_j\cdot\omega_{0j}\left(-a_j\sin(\omega_{0j}t)+b_j\cos(\omega_{0j}t)\right)$$

A $t=0$ pillanatban megadott $\underline{x}_0$ és $\underline{v}_0$ kezdeti kitéréseket és sebességeket az általános megoldással összevetve két lineáris egyenletrendszert kapunk:

$$\underline{x}_0=\sum_{j=1}^{N}\underline{v}_j a_j$$

$$\underline{v}_0=\sum_{j=1}^{N}\underline{v}_j\omega_{0j}b_j$$

A kezdeti feltételek kielégítéséhez ezeket kell megoldani a_j és b_j paraméterekre.

Rezgésalakok, rezgésmódok

$$\underline{x}_h(t)=\sum_{j=1}^{N}\underline{v}_j\cdot\left(a_j\cos(\omega_{0j}t)+b_j\sin(\omega_{0j}t)\right)$$

Ha olyanok a kezdeti feltételek, hogy csak egyetlen j értékhez tartoznak nem zérus a_j, b_j paraméterek, a többihez pedig nullák, azaz

$$\underline{x}_h(t)=\underline{v}_j\cdot\left(a_j\cos(\omega_{0j}t)+b_j\sin(\omega_{0j}t)\right)$$

akkor a mozgás egy ω_{0j} körfrekvenciájú harmonikus rezgés lesz,

melynek során a szerkezet alakját a $\underline{v}_j$ vektor határozza meg a harmonikus függvénnyel skálázva.

Emiatt a $\underline{v}_j$ sajátvektorokra sajátalakként, rezgésalakként, illetve rezgésmódként is hivatkozunk.

A j-edik rezgésmód sajátkörfrekvenciája ω_{0j}, a periódusideje pedig $T_{0j}=\frac{2\pi}{\omega_{0j}}$.

A legnagyobb periódusidő a legkisebb sajátkörfrekvenciához tartozik

$$T_{01}=\frac{2\pi}{\omega_{01}}.$$

Ezt hívjuk a szerkezet alapperiódusának.

Rezgésalakok, rezgésmódok, modálanalízis

Ahogy a sajátvektorok az N -dimenziós tér egy bázisát alkotják, bármely $\underline{x}(t)$ vektor felírható a rezgésmódok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{x}(t)=\sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j \cdot y_j(t)$$

Az erre épülő eljárásokat hívjuk modálanalízisnek. Az $y_j(t)$ függvények az ún. modális koordináták.

Szokás a sajátvektorokat egy modális mátrixba: $\underline{\underline{V}}=\left[\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \ldots \quad \underline{v}_N\right]$

a modális koordinátákat pedig egy vektorba gyűjteni: $\underline{y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{bmatrix}$

Ezekkel a jelölésekkel modálanalízis esetén:

$$\underline{x}(t)=\underline{\underline{V}}\,\underline{y}(t)$$

Ennek felhasználásához tekintsük át a sajátvektorok három tulajdonságát!

Többszabadságfokú rendszerek mechanikai rezgései

Szabadrezgés

Sajátvektorok tulajdonságai 1.

A $\underline{v}_j$ tömegmátrixra normált sajátvektor az ω_{0j} sajátkörfrekvenciával kielégíti a

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j=\omega_{0j}^2\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j$$

egyenletet.

Szorozzuk be mindkét oldalt balról $\underline{v}_j$ transzponáltjával:

$$\underline{v}_j^T\,\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j=\omega_{0j}^2\,\underline{v}_j^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j$$

A jobb oldalon a $\underline{v}_j^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j$ tag a tömegmátrixra normáltság miatt 1, így:

$$\underline{v}_j^T\,\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j=\omega_{0j}^2$$

Sajátvektorok tulajdonságai 2.

Tekintsünk két eltérő rezgésalakot, j-t és k-t ($j \neq k$)!

A $\underline{v}_j$ tömegmátrixra normált sajátvektor az ω_{0j} sajátkörfrekvenciával kielégíti a

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j = \omega_{0j}^2\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j$$

egyenletet.

A $\underline{v}_k$ tömegmátrixra normált sajátvektor az ω_{0k} sajátkörfrekvenciával kielégíti a

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_k = \omega_{0k}^2\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_k$$

egyenletet.

Szorozzuk be mindkét oldalt balról $\underline{v}_k$ transzponáltjával, illetve $\underline{v}_j$ transzponáltjával:

$$\underline{v}_k^T\,\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j = \omega_{0j}^2\,\underline{v}_k^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j$$

$$\underline{v}_j^T\,\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_k = \omega_{0k}^2\,\underline{v}_j^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_k$$

A $\underline{\underline{K}}$ és $\underline{\underline{M}}$ mátrixok szimmetrikusak, így: $\underline{v}_k^T\,\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j = \underline{v}_j^T\,\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_k$ és $\underline{v}_k^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j = \underline{v}_j^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_k$

amit behelyettesítve: $\underline{v}_k^T\,\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j = \omega_{0k}^2\,\underline{v}_k^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j$

Vonjuk ki a két egyenletet egymásból:

$$0 = \omega_{0j}^2\,\underline{v}_k^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j - \omega_{0k}^2\,\underline{v}_k^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j$$

$$0 = \left(\omega_{0j}^2 - \omega_{0k}^2\right)\underline{v}_k^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j$$

Mivel $j \neq k$, ezért $\omega_{0j} \neq \omega_{0k}$, így a szorzat második tényezőjének kell nullának lennie:

$$\underline{v}_k^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j = 0$$

A rezgésmódok ezen tulajdonságára azt mondjuk, hogy a sajátvektorok ortogonálisak a tömegmátrixra.

Sajátvektorok tulajdonságai 3.

Tekintsünk két eltérő rezgésalakot, j-t és k-t ($j \neq k$)!

Előbb már láttuk, hogy

$$\underline{v}_k^T \underline{\underline{K}}\, \underline{v}_j = \omega_{0\,j}^2\, \underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\, \underline{v}_j$$

továbbá a sajátvektorok tömegmátrixra való ortogonalitása miatt:

$$\underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\, \underline{v}_j = 0$$

Ezt felhasználva az egyenlet jobb oldalán:

$$\underline{v}_k^T \underline{\underline{K}}\, \underline{v}_j = 0$$

A rezgésmódok ezen tulajdonságára azt mondjuk, hogy a sajátvektorok ortogonálisak a merevségi mátrixra.

Sajátvektorok tulajdonságai - összegzés

A tömegmátrixra normáltságot és az előbb megismert három tulajdonságot úgy is írhatjuk, hogy:

$$\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{M}}\, \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{I}} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}\, \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{\Omega}}^2$$

(Hármas mátrixszorzat j,k-eleme:
az első mátrix j-edik sora szorozva a középső mátrixszal, majd az utolsó mátrix k-adik oszlopával.)

$\underline{v}_j^T$ $\underline{v}_k$

$\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{M}}\, \underline{\underline{V}}$: főátlón kívül 0 a tömegmátrixra ortogonális tulajdonság miatt
főátlóban 1 a tömegmátrixra normáltság miatt. → egységmátrix

$\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}\, \underline{\underline{V}}$: főátlón kívül 0 a merevségi mátrixra ortogonális tulajdonság miatt
főátló j-edik eleme ω_{0j}^2 a tömegmátrixra normáltság miatt.

$\underline{\underline{\Omega}}$: spektrálmátrix, a sajátkörfrekvenciákat tartalmazó diagonálmátrix

$\underline{\underline{\Omega}}^2 = \underline{\underline{\Omega}}\, \underline{\underline{\Omega}}$: a sajátkörfrekvenciák négyzeteit tartalmazó diagonálmátrix

Többszabadságfokú rendszerek mechanikai rezgései

Szabadrezgés

Sajátvektorok tulajdonságai - összegzés

A tömegmátrixra normáltságot és az előbb megismert három tulajdonságot úgy is írhatjuk, hogy:

$$\underline{\underline{V}}^T \, \underline{\underline{M}} \, \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{I}} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{V}}^T \, \underline{\underline{K}} \, \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{\Omega}}^2$$

(Hármas mátrixszorzat j,k-eleme:
az első mátrix j-edik sora szorozva a középső mátrixszal, majd az utolsó mátrix k-adik oszlopával.)

$\underline{v}_j^T$ $\underline{v}_k$

$\underline{\underline{V}}^T \, \underline{\underline{M}} \, \underline{\underline{V}}$: főátlón kívül 0 a tömegmátrixra ortogonális tulajdonság miatt
főátlóban 1 a tömegmátrixra normáltság miatt. → egységmátrix

$\underline{\underline{V}}^T \, \underline{\underline{K}} \, \underline{\underline{V}}$: főátlón kívül 0 a merevségi mátrixra ortogonális tulajdonság miatt
főátló j-edik eleme ω_{0j}^2 a tömegmátrixra normáltság miatt.

$\underline{\underline{\Omega}}$: spektrálmátrix, a sajátkörfrekvenciákat tartalmazó diagonálmátrix

$\underline{\underline{\Omega}}^2 = \underline{\underline{\Omega}} \, \underline{\underline{\Omega}}$: a sajátkörfrekvenciák négyzeteit tartalmazó diagonálmátrix

Kezdeti feltételek

A $t=0$ pillanatban megadott $\underline{x}_0$ és $\underline{v}_0$ kezdeti kitéréseket és sebességeket az általános megoldással összevetve két lineáris egyenletrendszert kapunk:

$$\underline{x}_0=\sum_{j=1}^{N}\underline{v}_j\,a_j \qquad\qquad \underline{v}_0=\sum_{j=1}^{N}\underline{v}_j\,\omega_{0\,j}\,b_j$$

A kezdeti feltételek kielégítéséhez ezeket kell megoldani a_j és b_j paraméterekre.
(Ez két N -ismeretlenes egyenletrendszer!)

Szorozzuk be balról a két egyenletet $\underline{v}_k^T\underline{\underline{M}}$ -mel:

$$\underline{v}_k^T\underline{\underline{M}}\,\underline{x}_0=\sum_{j=1}^{N}\underline{v}_k^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j\,a_j \qquad\qquad \underline{v}_k^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_0=\sum_{j=1}^{N}\underline{v}_k^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j\,\omega_{0\,j}\,b_j$$

Az összegzés során $j\neq k$ indexeknél a $\underline{v}_k^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j=0$ szorzójú tagok a sajátvektorok tömegmátrixra ortogonális tulajdonsága miatt kiesnek.

$$\underline{v}_k^T\underline{\underline{M}}\,\underline{x}_0=\underline{v}_k^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_k\,a_k \qquad\qquad \underline{v}_k^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_0=\underline{v}_k^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_k\,\omega_{0k}\,b_k$$

A tömegmátrixra normáltság miatt $\underline{v}_k^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_k=1$,
így a paraméterek egyenletrendszer megoldása nélkül számíthatók:

$$a_k=\underline{v}_k^T\underline{\underline{M}}\,\underline{x}_0 \qquad\qquad b_k=\frac{\underline{v}_k^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_0}{\omega_{0k}}$$

Szabadrezgés kezdeti feltételeket kielégítő megoldása

$$\underline{x}_h(t)=\sum_{j=1}^{N}\underline{v}_j\left(\underline{v}_j^T\,\underline{\underline{\underline{M}}}\,\underline{x}_0\cos(\omega_{0j}t)+\frac{\underline{v}_j^T\,\underline{\underline{\underline{M}}}\,\underline{v}_0}{\omega_{0j}}\sin(\omega_{0j}t)\right)$$

$$\underline{\dot{x}}_h(t)=\sum_{j=1}^{N}\underline{v}_j\left(-\omega_{0j}\underline{v}_j^T\,\underline{\underline{\underline{M}}}\,\underline{x}_0\sin(\omega_{0j}t)+\underline{v}_j^T\,\underline{\underline{\underline{M}}}\,\underline{v}_0\cos(\omega_{0j}t)\right)$$

Igénybevételek számítása rezgés közben

A szabadságfokok elmozdulása: $\underline{x}_h(t)=\sum_{j=1}^{N}\underline{v}_j\left(\underline{v}_j^T\underline{\underline{M}}\,\underline{x}_0\cos(\omega_{0j}t)+\frac{\underline{v}_j^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_0}{\omega_{0j}}\sin(\omega_{0j}t)\right)$

Az ekkora elmozdulásokat létrehozó erőrendszer:

$$\underline{f}(t)=\underline{\underline{K}}\,\underline{x}_h(t)=\underline{\underline{K}}\sum_{j=1}^{N}\underline{v}_j\left(\underline{v}_j^T\underline{\underline{M}}\,\underline{x}_0\cos(\omega_{0j}t)+\frac{\underline{v}_j^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_0}{\omega_{0j}}\sin(\omega_{0j}t)\right)$$

A merevségi mátrixot bevihetjük az összegzésen belülre:

$\underline{f}(t)=\sum_{j=1}^{N}\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j\left(\underline{v}_j^T\underline{\underline{M}}\,\underline{x}_0\cos(\omega_{0j}t)+\frac{\underline{v}_j^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_0}{\omega_{0j}}\sin(\omega_{0j}t)\right)=\sum_{j=1}^{N}\underline{f}_j(t)$, itt $\underline{f}_j(t)$ a j-edik mód helyettesítő statikus terhe.

Mivel $\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j=\omega_{0j}^2\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j$, ezért:

$$\underline{f}(t)=\sum_{j=1}^{N}\omega_{0j}^2\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j\left(\underline{v}_j^T\underline{\underline{M}}\,\underline{x}_0\cos(\omega_{0j}t)+\frac{\underline{v}_j^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_0}{\omega_{0j}}\sin(\omega_{0j}t)\right)$$

$$\underline{f}(t)=\sum_{j=1}^{N}\omega_{0j}^2\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j h_j(t)$$