Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

2. ZH: Többszabadságfokú rendszerek mechanika rezgései

¤ modell felvétele
¤ mozgás differenciálegyenlete - felírás
- osztályozás

¤ megoldás

Mit tanultunk eddig?

Többszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:
- modell
- mátrixok (tömeg-, merevségi, hajlékonysági)

Mozgás mátrix-differenciálegyenlete

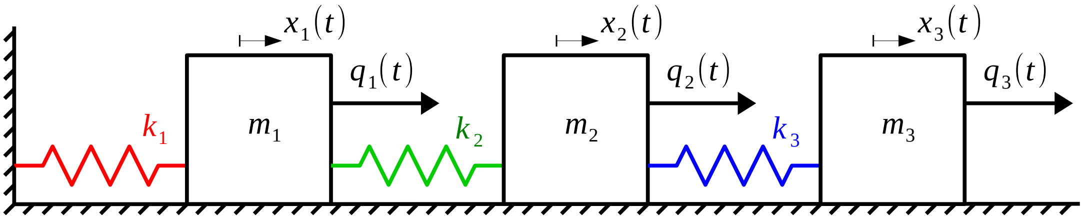
Szabadrezgés:
- sajátkörfrekvenciák
- sajátvektorok

Mi következik?

Gerjesztett rezgések
- harmonikus gerjesztőerő
- általános gerjesztőerő
- támaszrezgés
- földrengésvizsgálat

Többszabadságfokú rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet

Modell



Mátrix-differenciálegyenlet: $\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$

Ha a tehervektor valamennyi eleme azonos harmonikus függvény szerint írható fel, pl.:

$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix} q_{1,0}\cos(\omega t) \\ q_{2,0}\cos(\omega t) \\ \vdots \\ q_{N,0}\cos(\omega t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{1,0} \\ q_{2,0} \\ \vdots \\ q_{N,0} \end{bmatrix}\cos(\omega t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

Akkor a mozgásegyenlet egyszerűsödik: $$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

Megyjegyzések:

A terheletlen szf. esetén $q_{i,0}=0$, azaz harmonikusnak tekinthető bármilyen időfüggéssel.

A harmonikus függvény szokás szerint lehet bármi: $\sin(\omega t), \cos(\omega t), \cos(\omega t-\phi_0)$, stb., de mindegyik szabadságfok esetén ugyanaz.

Harmonikus erővel gerjesztett többszabadságfokú rendszer– direkt megoldás I.

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer

Keressük a megoldást harmonikus alakban:

$$\boldsymbol{x}_g(t)=\boldsymbol{x}_{g0}\cos(\omega t)$$

A feltételezett megoldás második deriváltja: $\ddot{\boldsymbol{x}}_g(t)=\boldsymbol{x}_{g0}(-\omega^2)\cos(\omega t)$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{x}_{g0}(-\omega^2)\cos(\omega t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_{g0}\cos(\omega t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{x}_{g0}(-\omega^2)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_{g0}=\boldsymbol{q}_0$$

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{x}_{g0}=\boldsymbol{q}_0$$

inhomogén lineáris egyenletrendszer

dinamikus merevségi mátrix

A lineáris egyenletrendszer megoldása:

- ha létezik az együtthatómátrix inverze, akkor szorozzunk be vele balról:

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{x}_{g0}=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0 \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{x}_{g0}=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0$$

Mikor létezik az inverz?

$$\left.\begin{array}{l}\text{nem szinguláris}\\ \text{determinánsa nem 0}\\ \text{sorai lin. függetlenek}\end{array}\right\}\rightarrow \omega \text{ nem a rendszer sajárkörfrekvenciája}$$

Harmonikus erővel gerjesztett többszabadságfokú rendszer– direkt megoldás II.

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{x}_{g0}=\boldsymbol{q}_0 \qquad \text{Ha } \omega\neq\omega_{0,i}: \quad \rightarrow \qquad \boldsymbol{x}_{g0}=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0$$

Mi van akkor, ha $\omega=\omega_{i,0}$?

Nincs megoldás, ha: $\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{q}_0\neq 0$

(ilyenkor *rezonancia* alakul ki az i-edik alakkal)

A megoldás létének feltétele: $\varrho\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)=\varrho\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}|\boldsymbol{q}_0\right)$ (az együtthatómátrix rangja a teherverktorral kiegészítve nem változik.)

Van megoldás, ha: $\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{q}_0=0$

A tehervektor nem befolyásolja a rezonáns rezgésalakot.

A kialakuló rezgés ortogonális erre az alakra.

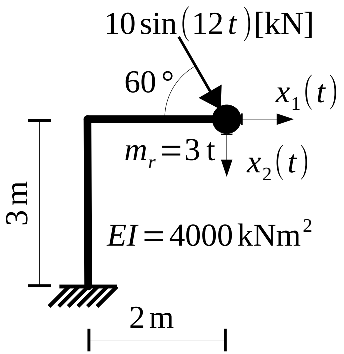
Tipikus esetben a megoldás: $\boldsymbol{x}_g(t)=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$

A teljes megoldáshoz most is hozzájönne még a homogén egyenlet általános megoldása:

$$\boldsymbol{x}(t)=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\left(a_i\cos(\omega_{0,i}t)+b_i\sin(\omega_{0,i}t)\right)$$

A szabadrezgéses rész idővel lecsillapodna, a maradék $\boldsymbol{x}_g(t)$ az állandósult rezgésrész.

Direkt megoldás – példa I.



$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{F}=\frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 14{,}67 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 1150 & -705{,}9 \\ -705{,}9 & 705{,}9 \end{bmatrix}\mathrm{kN/m},$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\mathrm{t}, \boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix} 10\cdot\cos 60°\cdot\sin(12t) \\ 10\cdot\sin 60°\cdot\sin(12t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 8{,}660 \end{bmatrix}\sin(12t)=\boldsymbol{q}_0\sin(\omega t)$$

$$\boldsymbol{x}_{g0}=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x}_g(t)=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0\sin(\omega t)$$

Din. mer. mát.:

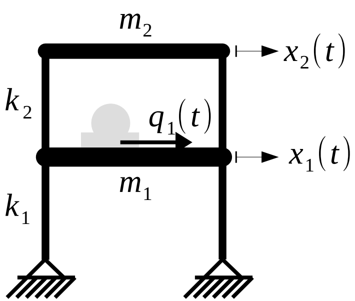
$$\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 1150-12^2 3 & -705{,}9 \\ -705{,}9 & 705{,}9-12^2 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 718{,}3 & -705{,}9 \\ -705{,}9 & 273{,}9 \end{bmatrix}$$

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}=\frac{1}{718{,}3\cdot 273{,}9-(-705{,}9)\cdot(-705{,}9)}\begin{bmatrix} 273{,}9 & 705{,}9 \\ 705{,}9 & 718{,}3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0{,}9083 & 2{,}341 \\ 2{,}341 & -2{,}382 \end{bmatrix}\cdot 10^{-3}$$

$$x_{g0}=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}q_0=10^{-3}\cdot\begin{bmatrix} -0{,}9083 & 2{,}341 \\ 2{,}341 & -2{,}382 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 8{,}660 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -24{,}82 \\ -32{,}34 \end{bmatrix}\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$x_g(t)=\begin{bmatrix} -24{,}82 \\ -32{,}34 \end{bmatrix}\cdot\sin(12t)\,\mathrm{mm}$$

Direkt megoldás – példa II.



$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix} q_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{1,0}\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix}\cos(\omega t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{x}_{g0}=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x}_g(t)=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{x}_{g0}=\begin{bmatrix} k_1+k_2-\omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-\omega^2 m_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} q_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{(k_1+k_2-\omega^2 m_1)(k_2-\omega^2 m_2)-k_2^2}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} k_2-\omega^2 m_2 \\ k_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} k_2 \\ k_1+k_2-\omega^2 m_1 \end{matrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boxed{q_{1,0}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_{g0}=\frac{q_{0,1}}{k_1 k_2-(k_1 m_2+k_2 m_2+k_2 m_1)\omega^2+m_1 m_2\omega^4}\begin{bmatrix} (k_2-\omega^2 m_2) \\ k_2 \end{bmatrix}$$

A nevező nullává válik, ha:

$$\omega=\frac{(k_1 m_2+k_2 m_2+k_2 m_1)\pm\sqrt{(k_1 m_2+k_2 m_2+k_2 m_1)^2-4k_1 k_2 m_1 m_2}}{2m_1 m_2}$$

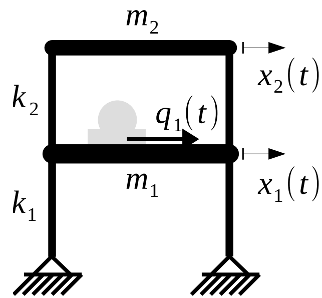
ez a két sajátkörfrekvencia: $\omega_{0,1}, \omega_{0,2}$

Direkt megoldás – példa III.

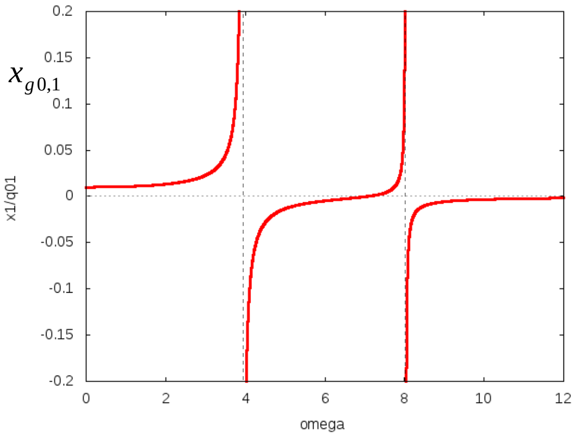
$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},$$

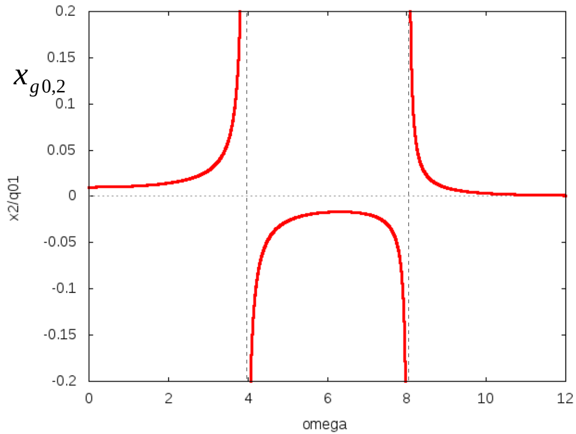
$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix} q_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{1,0}\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix}\cos(\omega t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{x}_{g0}=\frac{q_{0,1}}{k_1 k_2-(k_1 m_2+k_2 m_2+k_2 m_1)\omega^2+m_1 m_2\omega^4}\begin{bmatrix} (k_2-\omega^2 m_2) \\ k_2 \end{bmatrix}$$



Pl.: $k_1=100, k_2=50, m_1=5, m_2=1, \omega_{0.1}=3{,}938\ \mathrm{rad/s}, \omega_{0.2}=8{,}031\ \mathrm{rad/s}$





A rezonancia frekvenciájánál végtelen amplitúdók.

Ha $\omega=\sqrt{k_2/m_2}$, akkor az első szabadságfok amplitúdója 0.

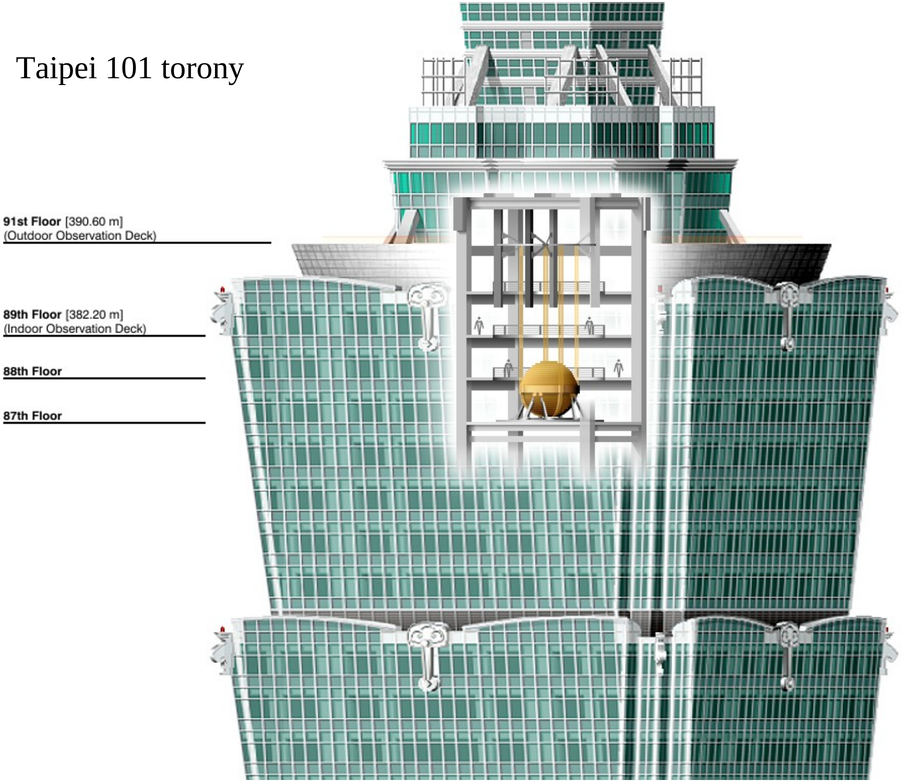
Ez k_2, ill. m_2 hangolásával érhető el, neve *dinamikus rezgéscsillapítás*.

Ha az m_2 tömeg viszonylag kicsi → kicsi k_2, viszonylag nagy amplitúdó

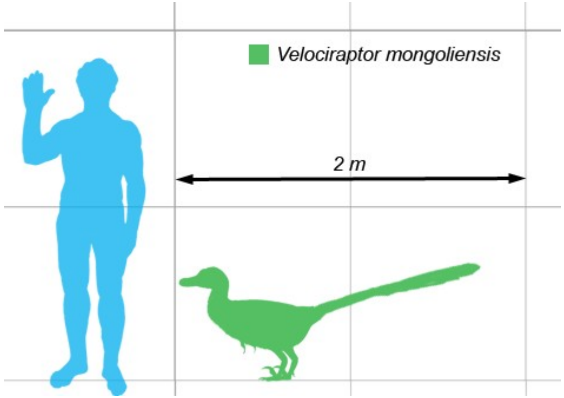
Ha az m_2 tömeg nagyobb → nagyobb k_2, kisebb amplitúdó, de nagyobb önsúly!

Dinamikus rezgéscsillapítás - példák

Taipei 101 torony



Futó állatok



Forrás:
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Taipei_101_Tuned_Mass_Damper.png
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gepardjagt1_(Acinonyx_jubatus).jpg
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Vraptor-scale.png

Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

2. ZH: Többszabadságfokú rendszerek mechanika rezgései

¤ modell felvétele
¤ mozgás differenciálegyenlete - felírás
- osztályozás
¤ megoldás

Mit tanultunk eddig?

Többszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:
- modell
- mátrixok (tömeg-, merevségi, hajlékonysági)

Mozgás mátrix-differenciálegyenlete

Szabadrezgés:
- sajátkörfrekvenciák
- sajátvektorok

Mi következik?

Gerjesztett rezgések
- harmonikus gerjesztőerő
- általános gerjesztőerő
- támaszrezgés
- földrengésvizsgálat

Harmonikus erővel gerjesztett többszabadságfokú rendszer– modálanalízis I.

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

Tegyük fel, hogy már megoldottuk az általánosított sajátértékfeladatot, azaz ismertek a sajátkörfrekvenciák $(\omega_{0,i})$ és a tömegmátrixra normált sajátvektorok $(\boldsymbol{v}_i)$.

Keressük az $\boldsymbol{x}_g(t)$ megoldást a sajátvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\boldsymbol{x}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,y_{g,i}(t)=\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}_g(t)$$

ahol $y_{g,i}(t)$ az i-edik modális koordináta (gerjesztés miatti)

Mivel a sajátvektorok időfüggetlenek, így az idő szerinti második derivált:

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,\ddot{y}_{g,i}(t)=\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)$$

Behelyettesítve a mátrix-differenciálegyenletbe: $\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}_g(t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$

Szorozzuk be mindkét oldalt balról $\boldsymbol{V}^T$-vel: $\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)+\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}_g(t)=\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$

A sajátvektorok ortogonalitása és normálása miatt: $\boldsymbol{E}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)+\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{y}_g(t)=\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$

Ennek az i-edik sorában: $\ddot{y}_{g,i}(t)+\omega_{0,i}^2\,y_{g,i}(t)=f_i\cos(\omega t)$

ahol $f_i=\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{q}_0$ a tehervektor vetülete a rezgésalakra

A differenciálegyenlet-rendszer *szétesik* N darab közönséges differenciálegyenletté.

Harmonikus erővel gerjesztett többszabadságfokú rendszer– modálanalízis II.

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

Az i-edik közönséges differenciálegynlet: $\ddot{y}_{g,i}(t)+\omega_{0,i}^2\,y_{g,i}(t)=f_i\cos(\omega t)$

$$\boldsymbol{x}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,y_{g,i}(t)$$

Egy egységnyi tömegű $(m=1)$, $\omega_{0,i}^2$ merevségű $(k=\omega_{0,i}^2)$ egyszabadságfokú rendszer differenciálegyenlete, amit az f_i amplitúdójú harmonikus erő gerjeszt.

$$m\,\ddot{x}(t)+k\,x(t)=q_0\cos(\omega t)$$

$$x_g(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)$$

A harmonikus erővel gerjesztett egyszabadságfokú rendszereknél tanultak szerint:

Az i-edik modális amplitúdó: $y_{g0,i}=\dfrac{f_i}{\omega_{0,i}^2}\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}$ ➜ $y_{g,i}(t)=f_i\dfrac{1}{\omega_{0,i}^2}\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$

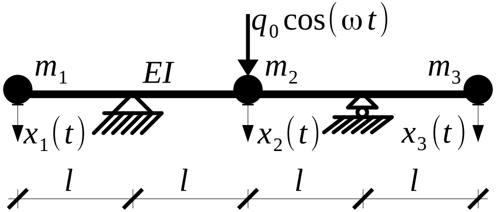
A gerjesztés miatti harmonikus válasz: $\boldsymbol{x}_g(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,\boldsymbol{v}_i^T\,\boldsymbol{q}_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$

Mindegyik $\boldsymbol{v}_i$ rezgésalakot szorozni kell:

- a tehervektor vetületével $(\boldsymbol{v}_i^T\,\boldsymbol{q}_0)$
- a sajátkörfrekvenciának megfelelő előjeles rezonanciatényező-szerű taggal
- a közös harmonikus taggal
- a sajátkörfrekvencia négyzetének reciprokával ➜ a magasabb módok hatása általában kisebb lesz

Megoldás modálanalízissel – példa

$$\boldsymbol{x}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{q}_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$$



Számítsuk ki $\boldsymbol{x}_{g0}$-t, ha

$EI=5600\,\mathrm{kNm}^2,\, l=2{,}4\,\mathrm{m}$,

$m_1=m_3=2{,}5\,\mathrm{t},\, m_2=2\,m_1$

$q_0=15\,\mathrm{kN/m},\, \omega=15{,}59\,\mathrm{rad/s}$

A tömegmátrix:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2{,}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 2{,}5\end{bmatrix}\mathrm{t}$$

A hajlékonysági mátrix:

$$\boldsymbol{F}=\frac{l^3}{EI}\begin{bmatrix}1 & -1/4 & 1/3\\ -1/4 & 1/6 & -1/4\\ 1/3 & -1/4 & 1\end{bmatrix}$$

A tehervektor amplitúdója:

$$\boldsymbol{q}_0=\begin{bmatrix}0\\ 15\\ 0\end{bmatrix}\mathrm{kN}$$

A merevségi mátrix:

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}651 & 1042 & 43{,}4\\ 1042 & 5556 & 1042\\ 43{,}4 & 1042 & 651\end{bmatrix}\mathrm{kN/m}$$

A sajátkörfrekvenciák:

$\omega_{0,1}=10{,}26\,\mathrm{rad/s},\, \omega_{0,2}=15{,}59\,\mathrm{rad/s},\, \omega_{0,3}=35{,}83\,\mathrm{rad/s}$

A tömegmátrixra normált sajátvektorok:

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-0{,}413\\ 0{,}171\\ -0{,}413\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-0{,}447\\ 0{,}000\\ 0{,}447\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}0{,}171\\ 0{,}413\\ 0{,}171\end{bmatrix}$$

A tehervektor vetülete a rezgésalakokra:

$\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{q}_0=2{,}567,\quad \boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{q}_0=0,\quad \boldsymbol{v}_3^T\boldsymbol{q}_0=6{,}198$

(az összegzésben csak $i=1$ és $i=3$ számít)

A modális amplitúdók:

$$y_{g0,1}=2{,}567\frac{1}{10{,}26^2}\frac{1}{1-\dfrac{15{,}59^2}{10{,}26^2}}=-0{,}01863$$

$$y_{g0,3}=6{,}198\frac{1}{35{,}83^2}\frac{1}{1-\dfrac{15{,}59^2}{35{,}83^2}}=0{,}00596$$

$$\boldsymbol{x}_{g0}=\begin{bmatrix}-0{,}413\\ 0{,}171\\ -0{,}413\end{bmatrix}\cdot(-0{,}01863)+\begin{bmatrix}0{,}171\\ 0{,}413\\ 0{,}171\end{bmatrix}\cdot(0{,}00596)=\begin{bmatrix}0{,}00871\\ -0{,}00072\\ 0{,}00871\end{bmatrix}\mathrm{m}$$

Megj.: bár $\omega=\omega_{0,2}$, de a rezonáns alak nem volt gerjesztve.

A kapott eredmény megoldása a $(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{x}_{g0}=\boldsymbol{q}_0$ egyenletnek.

Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

2. ZH: Többszabadságfokú rendszerek mechanika rezgései

¤ modell felvétele
¤ mozgás differenciálegyenlete - felírás
- osztályozás
¤ megoldás

Mit tanultunk eddig?

Többszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:
- modell
- mátrixok (tömeg-, merevségi, hajlékonysági)

Mozgás mátrix-differenciálegyenlete
Szabadrezgés:
- sajátkörfrekvenciák
- sajátvektorok

Mi következik?

Gerjesztett rezgések
- harmonikus gerjesztőerő
- általános gerjesztőerő
- támaszrezgés
- földrengésvizsgálat

Rezgésalaknak megfelelő erővel való gerjesztés

Mátrix-differenciálegyenlet: $\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$

Legyen a teher eloszlása egy rezgésalaknak megfelelő alakú: $\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j f(t)$

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j f(t)$$

Keressük a megoldást a j-edik sajátalak skalárszorosaként:

$$\boldsymbol{x}_g(t)=\boldsymbol{v}_j\,y_j(t) \quad \rightarrow \quad \ddot{\boldsymbol{x}}_g(t)=\boldsymbol{v}_j\,\ddot{y}_j(t)$$

Behelyettesítés után:

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j\,\ddot{y}_j(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_j\,y_j(t)=\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j f(t)$$

Mivel $\boldsymbol{v}_j$ sajátrezgésalak, ezért $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_j=\omega_{0j}^2\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j$

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j\,\ddot{y}_j(t)+\omega_{0j}^2\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j\,y_j(t)=\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j f(t)$$

Mindhárom tagban az $\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j$ vektor szorzódik egy skalárral, így az egyenlet akkor teljesül, ha:

$$\ddot{y}_j(t)+\omega_{0j}^2\,y_j(t)=f(t)$$

Ami egyenértékű egy egységnyi tömegű, ω_{0j} sajátkörfrekvenciájú, $f(t)$ erővel gerjesztett egyszabadságfokú rendszer differenciálegyenletével. Ennek megoldása:

$$y_j(t)=\int_0^t \frac{f(\tau)}{\omega_{0j}}\sin\left(\omega_{0j}(t-\tau)\right)d\tau \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{x}_g(t)=\boldsymbol{v}_j\int_0^t \frac{f(\tau)}{\omega_{0j}}\sin\left(\omega_{0j}(t-\tau)\right)d\tau$$

Általános erővel való gerjesztés – modálanalízis I.

Mátrix-differenciálegyenlet: $\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$

Az elmozdulásfüggvény a tömegmátrixra normált sajátvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}(t)$$
$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}(t)$$

ahol $\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots\boldsymbol{v}_N]$ a sajátvektorok mátrixa
$\boldsymbol{y}(t)$ az $y_j(t)$ modális koordinátákból képzett vektor

Így a DE: $\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{q}(t)$

Szorozzuk be mindkét oldalt balról $\boldsymbol{V}^T$ -vel:

$$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{q}(t)$$

A sajátvektorok ortogonalitása miatt a hármas mátrixszorzatok diagonálmátrixok és a tömegmátrixra normálás miatt:

$$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}=\boldsymbol{E}\,,\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Omega}^2$$

Amiből a DE átírható

$\boldsymbol{E}\,\ddot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{f}(t)$ ahol $f_j(t)=\boldsymbol{v}_j^T\,\boldsymbol{q}(t)$ a teher modális vetülete

Általános erővel való gerjesztés – modálanalízis I.

Mátrix-differenciálegyenlet: $\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}(t)$$
$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}(t)$$

Amiből a DE átírható

$\boldsymbol{E}\,\ddot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{f}(t)$ ahol $f_j(t)=\boldsymbol{v}_j^T\,\boldsymbol{q}(t)$ a teher modális vetülete

A diagonálmátrixok miatt a differenciálegyenlet-rendszer szétesik, a j-edik sorból:

$$\ddot{y}_j+\omega_{0,j}^2\,y_j(t)=f_j(t)$$

Ez egy $m\,\ddot{x}(t)+k\,x(t)=q(t)$ egyenlet, ahol $m=1, k=\omega_{0,j}^{2,}$...

Az egyszabadságfokú rendszereknél tanultak szerint oldandó meg $y_j(t)$-re.

$$y_j(t)=\int_0^t \frac{f_j(\tau)}{\omega_{0j}}\sin\left(\omega_{0j}(t-\tau)\right)d\tau$$

Végül a modális megoldásokból kapható a gerjesztésre adott válasz: $\boldsymbol{x}(t)=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{v}_j\cdot y_j(t)$

Az ekkora elmozdulásokat létrehozó erőrendszer:

$$\boldsymbol{f}^s(t)=\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_g(t)=\boldsymbol{K}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{v}_j\cdot y_j(t)=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_j\cdot y_j(t)$$

A sajátvektorok az általánosított sajátértékfeladat megoldásai, így:

$$\boldsymbol{f}^s(t)=\sum_{j=1}^{N}\omega_{0j}^2\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j\cdot y_j(t)=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{f}_j\cdot y_j(t)$$

Ezekből az erőkből lehet igénybevételeket számolni.