Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

2. ZH: Többszabadságfokú rendszerek mechanika rezgései

¤ modell felvétele
¤ mozgás differenciálegyenlete - felírás
- osztályozás
¤ megoldás

Mit tanultunk eddig?

Többszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:
- modell
- mátrixok (tömeg-, merevségi, hajlékonysági)

Mozgás mátrix-differenciálegyenlete

Szabadrezgés:
- sajátkörfrekvenciák
- sajátvektorok

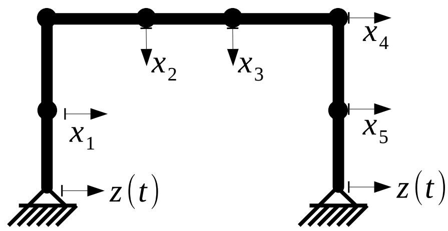
Mi következik?

Gerjesztett rezgések
- harmonikus gerjesztőerő
- általános gerjesztőerő
- támaszrezgés
- földrengésvizsgálat

Támaszrezgés – elmozdulások I.

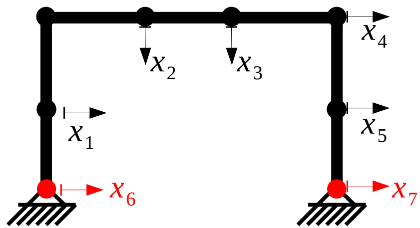
Egyszabadságfokú rendszereknél láttuk, hogy a támaszrezgés is egy gerjesztésként kezelhető.

Azt is láttuk, hogy külön diff.egyenletet írhatunk:
- -az elmozdulásokra (+sebességek, gyorsulások)
- -az alakváltozásokra (+igénybevételek)



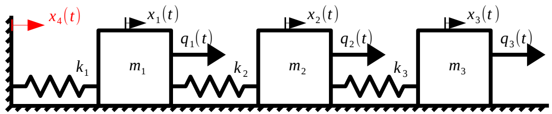
Hogyan számítható a tehervektor a támasz mozgásából?

Eddig elhanyagolhattuk a diszkretizálás miatt a támaszokba kerülő tömegeket, mert a föld úgysem mozog. És mégis. ➜ *Külső* szabadságfokok.



A kiegészített rendszer mozgásegyenletének sémája:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{bb} & \boldsymbol{M}_{bk} \\ \boldsymbol{M}_{kb} & \boldsymbol{M}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_b \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{bb} & \boldsymbol{K}_{bk} \\ \boldsymbol{K}_{kb} & \boldsymbol{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_b \\ \boldsymbol{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_b \\ \boldsymbol{q}_k \end{bmatrix}$$



Az $\boldsymbol{x}$ és $\ddot{\boldsymbol{x}}$ vektorok előírt értékűek.

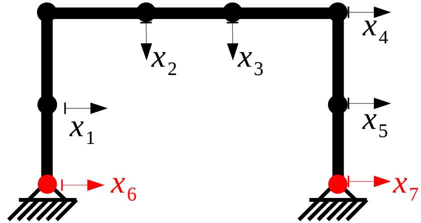
A $\boldsymbol{q}_k$ vektorban az ismeretlen reakciók is szerepelnek:

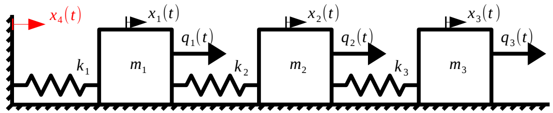
$$\boldsymbol{q}_k = \boldsymbol{q}_k^{teher} + \boldsymbol{r}_k$$

Támaszrezgés – elmozdulások II.

Hogyan számítható a tehervektor a támasz mozgásából?

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bk} \\ \mathbf{M}_{kb} & \mathbf{M}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_b \\ \ddot{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bk} \\ \mathbf{K}_{kb} & \mathbf{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix}$$





Bontsuk szét az egyenletrendszert a külső és a belső szf.-ok egyenleteire:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{kb} & \mathbf{M}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_b \\ \ddot{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{kb} & \mathbf{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} = \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k^{teher} + \mathbf{r}_k$$

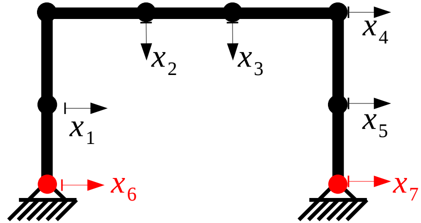
← ebből tudunk reakciókat számolni ha már ismerjük az $\mathbf{x}_b$-t és az $\ddot{\mathbf{x}}_b$-t.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_b \\ \ddot{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} = \mathbf{q}_b$$

← vigyük át az ismert mennyiségeket a jobb oldalra ($\mathbf{x}_k$ és $\ddot{\mathbf{x}}_k$).

Támaszrezgés – elmozdulások II.

Hogyan számítható a tehervektor a támasz mozgásából?



$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{bb} & \boldsymbol{M}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_b \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{bb} & \boldsymbol{K}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_b \\ \boldsymbol{x}_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{q}_b$$

← vigyük át az ismert mennyiségeket a jobb oldalra ($\boldsymbol{x}_k$ és $\ddot{\boldsymbol{x}}_k$).

$$\boldsymbol{M}_{bb} \ddot{\boldsymbol{x}}_b + \boldsymbol{K}_{bb} \boldsymbol{x}_b = \boldsymbol{q}_b - \boldsymbol{M}_{bk} \ddot{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{K}_{bk} \boldsymbol{x}_k$$

Az eredmény formailag egy $\boldsymbol{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$ egyenletrendszer.

A bal oldali $\boldsymbol{M}_{bb}$ és $\boldsymbol{K}_{bb}$ mátrixok azonosak a korábban használtakkal:

-ezekkel kell megoldani az általánosított sajátértékfeladatot,

-ezektől függenek a sajátkörfrekvenciák, rezgésalakok,

-a teher ezt nem befolyásolja.

A jobb oldalon a szabadságfokokra redukált külső terhek vektorát módosítani kell.

A reakciók az elmozdulások ismeretében lesznek számíthatók.

Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

2. ZH: Többszabadságfokú rendszerek mechanika rezgései

¤ modell felvétele
¤ mozgás differenciálegyenlete - felírás
- osztályozás
¤ megoldás

Mit tanultunk eddig?

Többszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:
- modell
- mátrixok (tömeg-, merevségi, hajlékonysági)

Mozgás mátrix-differenciálegyenlete

Szabadrezgés:
- sajátkörfrekvenciák
- sajátvektorok

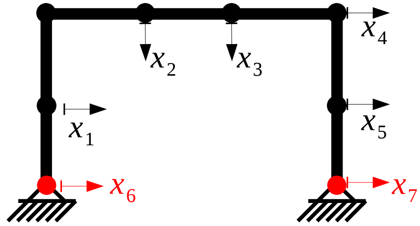
Mi következik?

Gerjesztett rezgések
- harmonikus gerjesztőerő
- általános gerjesztőerő
- támaszrezgés
- földrengésvizsgálat

Támaszrezgés – alakváltozás I.

Tegyük fel, hogy az összes támasz azonos irányba mozog az azonos $z(t)$ függvény szerint, és más teher nincs.

Hogyan kaphatjuk meg a tehervektort, ha az alakváltozásokat keressük?



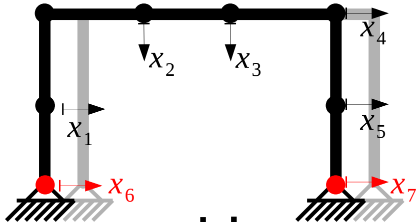
Most is egészítsük ki a rendszert a külső szf.-okkal!

Legyen $\boldsymbol{u}(t)$ az alakváltozásokat okozó elmozdulások vektora.
Alakváltozás: a támaszokhoz képesti elmozdulás.

Az elmozdulások vektora két részből tevődik össze:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_m(t)+\boldsymbol{u}(t)$$

ahol: $\boldsymbol{x}_m(t)$: a merevtest-szerű elmozdulás



A merevtest-szerű elmozdulást állítsuk elő $\boldsymbol{x}_m(t)=z(t)\boldsymbol{i}$ alakban, ahol az $\boldsymbol{i}$ mutató vektor azt jelzi, hogy a támaszok egységnyi statikus elmozdítása a támaszmozgás irányába mekkora elmozdulást okoz az egyes szabadságfokokban.

A fenti példában: $\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

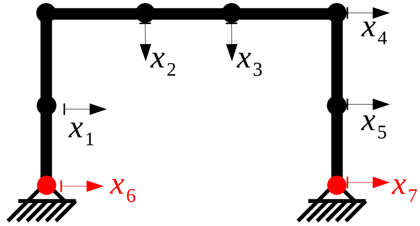
Ezzel: $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{i}\,z(t)+\boldsymbol{u}(t)$

A mutató vektor időfüggetlen, így: $\ddot{\boldsymbol{x}}_m(t)=\ddot{z}(t)\boldsymbol{i}$ és $\ddot{\boldsymbol{x}}(t)=\ddot{z}(t)\boldsymbol{i}+\ddot{\boldsymbol{u}}(t)$

Támaszrezgés – alakváltozás II.

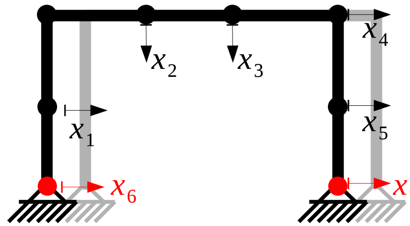
A kiegészített rendszer mozgásegyenletének sémája:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bk} \\ \mathbf{M}_{kb} & \mathbf{M}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_b \\ \ddot{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bk} \\ \mathbf{K}_{kb} & \mathbf{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix}$$



Behelyettesítve az elmozdulásokat és a nulla külső terhet:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bk} \\ \mathbf{M}_{kb} & \mathbf{M}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{mb} + \ddot{\mathbf{u}}_b \\ \ddot{\mathbf{x}}_{mk} + \ddot{\mathbf{u}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bk} \\ \mathbf{K}_{kb} & \mathbf{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{mb} + \mathbf{u}_b \\ \mathbf{x}_{mk} + \mathbf{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_k \end{bmatrix}$$



Vigyük át a merev test szerű mozgást a jobb oldalra:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bk} \\ \mathbf{M}_{kb} & \mathbf{M}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_b \\ \ddot{\mathbf{u}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bk} \\ \mathbf{K}_{kb} & \mathbf{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bk} \\ \mathbf{M}_{kb} & \mathbf{M}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{mb} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{mk} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bk} \\ \mathbf{K}_{kb} & \mathbf{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{mb} \\ \mathbf{x}_{mk} \end{bmatrix}$$

Támaszrezgés – alakváltozás III.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bk} \\ \mathbf{M}_{kb} & \mathbf{M}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{b} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bk} \\ \mathbf{K}_{kb} & \mathbf{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{b} \\ \mathbf{u}_{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_{k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bk} \\ \mathbf{M}_{kb} & \mathbf{M}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{mb} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{mk} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bk} \\ \mathbf{K}_{kb} & \mathbf{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{mb} \\ \mathbf{x}_{mk} \end{bmatrix}$$

Az "utolsó" (zöld) sorokból a reakciókat számolhatjuk (majd).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{b} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{b} \\ \mathbf{u}_{k} \end{bmatrix} = \mathbf{0} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{mb} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{mk} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{mb} \\ \mathbf{x}_{mk} \end{bmatrix}$$

A támaszok támaszokhoz képesti elmozdulása és gyorsulása 0: $\mathbf{u}_{k} = \mathbf{0}$ és $\ddot{\mathbf{u}}_{k} = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{M}_{bb} \ddot{\mathbf{u}}_{b} + \mathbf{K}_{bb} \mathbf{u}_{b} = \mathbf{0} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{mb} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{mk} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{mb} \\ \mathbf{x}_{mk} \end{bmatrix}$$

Támaszrezgés – alakváltozás IV.

$$\boldsymbol{M}_{bb}\,\ddot{\boldsymbol{u}}_b + \boldsymbol{K}_{bb}\,\boldsymbol{u}_b = \boldsymbol{0} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{bb} & \boldsymbol{M}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_{mb} \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_{mk} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{bb} & \boldsymbol{K}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{mb} \\ \boldsymbol{x}_{mk} \end{bmatrix}$$

Az $\boldsymbol{x}_m$ merev test szerű elmozdulás nem okoz deformációt, így abból nem származnak a szabadságfokokra ható erők.

Ezeket az erőket a $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_m$ szorzat eredményezi, az tehát $\boldsymbol{0}$, így:

$$\boldsymbol{M}_{bb}\,\ddot{\boldsymbol{u}}_b + \boldsymbol{K}_{bb}\,\boldsymbol{u}_b = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{bb} & \boldsymbol{M}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_{mb} \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_{mk} \end{bmatrix}$$

A bal oldalon az $\boldsymbol{M}$ és $\boldsymbol{K}$ mátrixoknak csak a belső csomópontokhoz tartozó elemei szerepelnek.

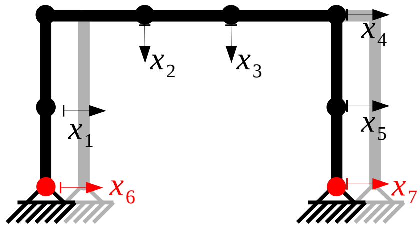
A jobb oldal: $-\boldsymbol{M}_b \ddot{\boldsymbol{x}}_m = -\boldsymbol{M}_b \boldsymbol{i}\,\ddot{z}(t)$

Vezessük be a szabadságfokonként a támaszmozgás irányába mozgó tömegek vektorát: $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}_b \boldsymbol{i}$

Így a mozgás mátrix-differenciálegyenlete: $\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$

(Az egyszerűség kedvéért a beslő csomópontra utalást elhagyjuk a végén.)

Támaszrezgés – harmonikus támaszmozgás



Támaszrezgés esetén az alakváltozásokra vonatkozó differenciálegyenlet:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$$

Ahol $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{M}_b\,\boldsymbol{i}$, (a tömegmátrixot sorait kiegészítjük a *külső* szabadságfokokkal is) és az $\boldsymbol{i}$ mutatóvektor adja meg a támaszok egységnyi mozgása esetén az összes szf. merevtestszerű elmozdulását.

Ha pl. a támaszok azonos mozgása azonos *harmonikus* függvény szerinti: $z(t)=z_0\cos(\omega t)$

akkor az egyenlet jobb oldala: $\boldsymbol{m}\,\omega^2 z_0\cos(\omega t)$

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{m}\,\omega^2 z_0\cos(\omega t)$$

A modálanalízises megoldás szerint:

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,\boldsymbol{v}_i^T\,\boldsymbol{m}\,\omega^2 z_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$$

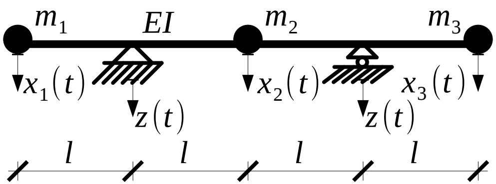
$$\boldsymbol{x}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,\boldsymbol{v}_i^T\,\boldsymbol{q}_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$$

A direkt megoldással:

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{m}\,\omega^2 z_0\cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{x}_g(t)=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

Támaszrezgés – harmonikus támaszmozgás példa I.



Számítsuk ki a maximális igénybevételeket az önsúlyból és az állandósult rezgésből, ha
$z(t)=2\cdot\cos(20t)$[cm], és
$EI=5600\,\text{kNm}^2, l=2{,}4\,\text{m}$,
$m_1=m_3=2{,}5\,\text{t}, m_2=2m_1$

A tömegmátrix:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2{,}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 2{,}5\end{bmatrix}\text{t}$$

A merevségi mátrix:

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}651 & 1042 & 43{,}4\\ 1042 & 5556 & 1042\\ 43{,}4 & 1042 & 651\end{bmatrix}\text{kN/m}$$

A sajátkörfrekvenciák:

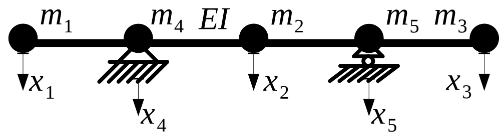
$\omega_{0,1}=10{,}26\,\text{rad/s}, \omega_{0,2}=15{,}59\,\text{rad/s}, \omega_{0,3}=35{,}83\,\text{rad/s}$

A tömegmátrixra normált sajátvektorok:

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-0{,}413\\ 0{,}171\\ -0{,}413\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-0{,}447\\ 0{,}000\\ 0{,}447\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}0{,}171\\ 0{,}413\\ 0{,}171\end{bmatrix}$$

A tehervektor: $\boldsymbol{q}(t)=-\boldsymbol{M}_b\,\boldsymbol{i}\,\ddot{z}(t)$

A külső szabadságfokokkal kiegészített szerkzet:



A tömegmátrix figyelembe veendő sorai:

$$\boldsymbol{M}_b=\begin{bmatrix}2{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2{,}5 & 0 & 0\end{bmatrix}\text{t}$$

A mutatóvektor: $\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

A támaszrezgés irányába mozgó tömegekből a szabadságfokok terhe:

$$\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix}2{,}5\\ 5\\ 2{,}5\end{bmatrix}\text{t}$$

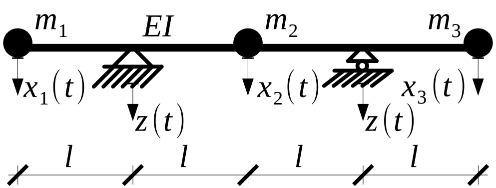
A direkt megoldásból:

$$\boldsymbol{u}_{g0}=\begin{bmatrix}651-20^2\,2{,}5 & 1042 & 43{,}4\\ 1042 & 5556-20^2\,5 & 1042\\ 43{,}4 & 1042 & 651-20^2\,2{,}5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2{,}5\\ 5\\ 2{,}5\end{bmatrix}\cdot 20^2\cdot 0{,}02$$

$$\boldsymbol{u}_{g0}=\begin{bmatrix}-0{,}00904\\ 0{,}0165\\ -0{,}00904\end{bmatrix}$$

HF: $\boldsymbol{u}_g(t)$ modálanalízissel

Támaszrezgés – harmonikus támaszmozgás példa II.



Számítsuk ki a maximális igénybevételeket az önsúlyból és az állandósult rezgésből, ha

$z(t)=2\cdot\cos(20t)$[cm], és

$EI=5600\,\mathrm{kNm}^2, l=2{,}4\,\mathrm{m}$,

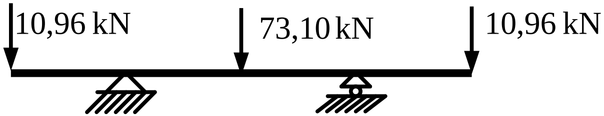
$m_1=m_3=2{,}5\,\mathrm{t}, m_2=2m_1$

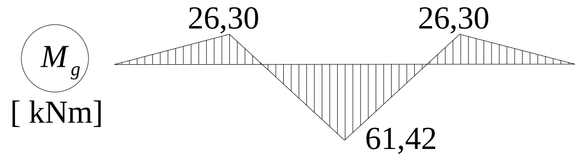
$$\boldsymbol{u}_g(t)=\boldsymbol{u}_{g0}\cos(\omega t)=\begin{bmatrix}-0{,}00904\\0{,}0165\\-0{,}00904\end{bmatrix}\cos(20t)$$

Hogyan lesz az elmozdulásból igénybevétel?

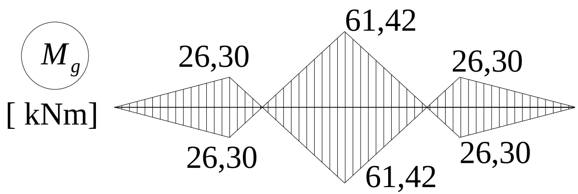
Az $\boldsymbol{u}_{g0}$ amplitúdót létrehozó statikus erők:

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_{g0}=\begin{bmatrix}10{,}96\\73{,}10\\10{,}96\end{bmatrix}\mathrm{kN}$$

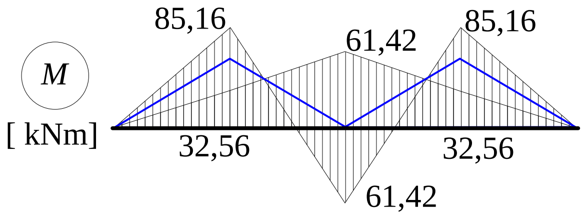




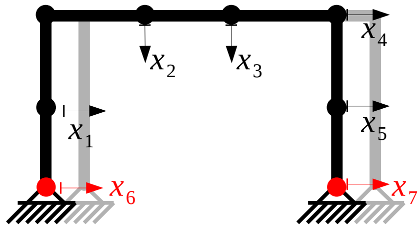
Az állandósult rezgés $\cos(20t)$ tagja miatt ez $+1$-gyel és -1-gyel is szorzódhat:



Az $m_i g$ önsúlyok miatti nyomatéki ábrához hozzáadva:



Támaszrezgés – általános támaszmozgás I.



Támaszrezgés esetén az alakváltozásokra vonatkozó differenciálegyenlet:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$$

Megoldás modálanalízissel:

Már megoldottuk az általánosított sajátértékfeladatot, azaz ismertek a sajátkörfrekvenciák $(\omega_{0,i})$ és a tömegmátrixra normált sajátvektorok $(\boldsymbol{v}_i)$.

Keressük az $\boldsymbol{u}_g(t)$ megoldást a sajátvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,y_{g,i}(t)=\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}_g(t)$$

ahol $y_{g,i}(t)$ az i-edik modális koordináta (gerjesztés miatti)

Mivel a sajátvektorok időfüggetlenek, így az idő szerinti második derivált:

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,\ddot{y}_{g,i}(t)=\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)$$

Behelyettesítve a mátrix-differenciálegyenletbe: $\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}_g(t)=-\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$

Szorozzuk be mindkét oldalt balról $\boldsymbol{V}^T$-vel: $\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)+\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}_g(t)=-\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$

A sajátvektorok ortogonalitása és normálása miatt: $\boldsymbol{E}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)+\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{y}_g(t)=-\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$

Támaszrezgés – általános támaszmozgás II.

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$$

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,y_{g,i}(t)=\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}_g(t)$$

$$\boldsymbol{E}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)+\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{y}_g(t)=-\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$$

Ennek az i-edik sorában: $\ddot{y}_{g,i}(t)+\omega_{0,i}^2\,y_{g,i}(t)=f_i(t)$

ahol $f_i=-\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$
a teher vetülete a rezgésalakra

A differenciálegyenlet-rendszer *szétesik*
N darab közönséges differenciálegyenletté.

$\Gamma_i=\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}$ a tömeg vetülete a rezgésalakra.
(modális részvétel}

Egy egységnyi tömegű $(m=1)$, $\omega_{0,i}^2$ merevségű $\left(k=\omega_{0,i}^2\right)$ egyszabadságfokú rendszer differenciálegyenlete, amit az $f_i(t)$ erő gerjeszt.

Duhamel-integrál:

$$x(t)=\int_0^t\frac{q(\tau)}{m\cdot\omega_0}\cdot\sin\left(\omega_0(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau$$

Az egyszabadságfokú rendszereknél tanultak szerint:

$$y_{g,i}(t)=\int_0^t\frac{-\Gamma_i\,\ddot{z}(\tau)}{\omega_{0,i}}\sin\left(\omega_{0,i}(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau=-\Gamma_i\int_0^t\frac{\ddot{z}(\tau)}{\omega_{0,i}}\sin\left(\omega_{0,i}(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau$$

Így a teljes megoldás:

$$\boldsymbol{u}_g(t)=-\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,\Gamma_i\int_0^t\frac{\ddot{z}(\tau)}{\omega_{0,i}}\sin\left(\omega_{0,i}(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau$$

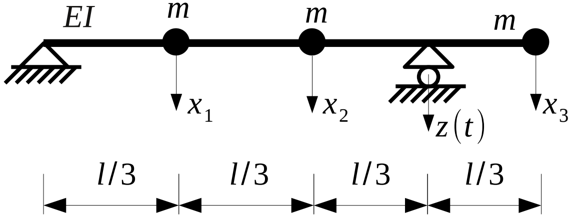
Másodlagos mennyiségek szintén időfüggően számíthatók.

Támaszrezgés – példa I.

Kéttámaszú gerenda, túlnyúló konzollal.

Számítsuk ki a konzolvég rezgésének amplitúdóját, ha $z(t)=0{,}04\cos(20t)$ [cm]!

$l=6$ m támaszköz, $EI=5000\,\mathrm{kNm}^2$ hajlítómerevség, $m=2$ t redukált tömegek.



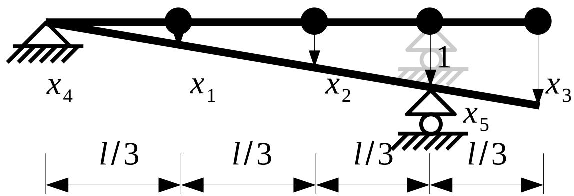
$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}6161 & -5893 & -401{,}8\\ -5893 & 8571 & 1607\\ -401{,}8 & 1607 & 1004\end{bmatrix}\mathrm{kN/m}\qquad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}\mathrm{t}$$

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}0{,}270 & 0{,}483 & 0{,}440\\ 0{,}306 & 0{,}327 & -0{,}547\\ -0{,}577 & 0{,}399 & -0{,}084\end{bmatrix}$$

$\omega_{0,1}=13{,}05\,\mathrm{rad/s}$, $\omega_{0,2}=30{,}30\,\mathrm{rad/s}$, $\omega_{0,3}=82{,}34\,\mathrm{rad/s}$

Modálanalízissel megoldva:

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}\,\omega^2 z_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$$

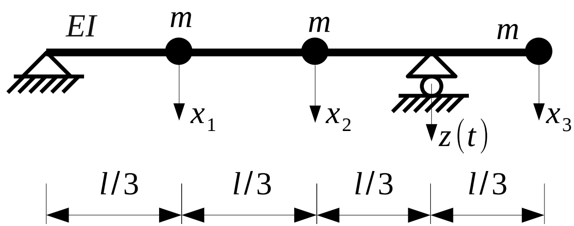


Az $\boldsymbol{m}$ vektorhoz a kiegészített merevségi mátrixot kell szorozni a mutató vektorral:

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{M}_b\,\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & \color{red}{0} & \color{red}{0}\\ 0 & 2 & 0 & \color{red}{0} & \color{red}{0}\\ 0 & 0 & 2 & \color{red}{0} & \color{red}{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3\\ 2/3\\ 4/3\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/3\\ 4/3\\ 8/3\end{bmatrix}$$

Támaszrezgés – példa II.

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} 0{,}270 & 0{,}483 & 0{,}440 \\ 0{,}306 & 0{,}327 & -0{,}547 \\ -0{,}577 & 0{,}399 & -0{,}084 \end{bmatrix}$$



i	$\Gamma_i=\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}$	$\dfrac{1}{\omega_{0,i}^2}\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}$	$\Gamma_i\omega^2 z_0\dfrac{1}{\omega_{0,i}^2}\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}$
1	$-0{,}9517$	$-4{,}352\cdot 10^{-3}$	$0{,}06627$
2	$1{,}824$	$1{,}931\cdot 10^{-3}$	$0{,}05635$
3	$-0{,}6601$	$0{,}157\cdot 10^{-3}$	$-0{,}00166$

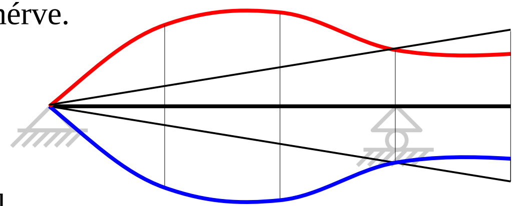
$$\omega_{0,1}=13{,}05\,\text{rad/s}\,,\ \omega_{0,2}=30{,}30\,\text{rad/s}\,,\ \omega_{0,3}=82{,}34\,\text{rad/s}$$

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}\,\omega^2 z_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\left(0{,}06627\cdot\begin{bmatrix}0{,}270\\0{,}306\\-0{,}577\end{bmatrix}+0{,}05635\cdot\begin{bmatrix}0{,}483\\0{,}327\\0{,}399\end{bmatrix}-0{,}00166\cdot\begin{bmatrix}0{,}440\\-0{,}547\\-0{,}084\end{bmatrix}\right)\cos(20t)=\begin{bmatrix}0{,}0444\\0{,}0396\\-0{,}0156\end{bmatrix}\cos(20t)$$

Ez a rugalmas alakváltozások vektora a merevtestszerű mozgáshoz képest mérve.
A mozdulatlan koordinátarendszerben:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{i}\,z(t)+\boldsymbol{u}_g(t)$$



$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}1/3\\2/3\\4/3\end{bmatrix}0{,}04\cos(20t)+\begin{bmatrix}0{,}0444\\0{,}0396\\-0{,}0156\end{bmatrix}\cos(20t)=\begin{bmatrix}0{,}0577\\0{,}0663\\0{,}0377\end{bmatrix}\cos(\omega t)[\text{cm}]$$

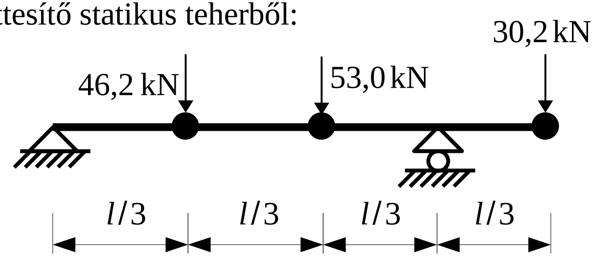
Támaszrezgés – példa III.

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}0{,}270 & 0{,}483 & 0{,}440\\ 0{,}306 & 0{,}327 & -0{,}547\\ -0{,}577 & 0{,}399 & -0{,}084\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{u}_{g0}=\begin{bmatrix}0{,}0444\\ 0{,}0396\\ -0{,}0156\end{bmatrix}$$

Igénybevételek számítása

¤ A legnagyobb elmozdulásokkal azonos elmozdulást okozó helyettesítő statikus teherből:

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_{g0}=\begin{bmatrix}6161 & -5893 & -401{,}8\\ -5893 & 8571 & 1607\\ -401{,}8 & 1607 & 1004\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}0444\\ 0{,}0396\\ -0{,}0156\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46{,}2\\ 53{,}0\\ 30{,}2\end{bmatrix}\text{kN}$$



¤ A rezgésalakok igénybevételeiből az összegzésnek megfelelő tényezőkkel képzett kombinációban:

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}\,\omega^2 z_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}91{,}9\\ 104{,}2\\ -196{,}6\end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}887\\ 601\\ 733\end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}5970\\ -7420\\ -1140\end{bmatrix}$$

i	$\Gamma_i=\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}$	$\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}$	$\Gamma_i\omega^2 z_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}$
1	$-0{,}9517$	$-4{,}352\cdot10^{-3}$	0,06627
2	1,824	$1{,}931\cdot10^{-3}$	0,05635
3	$-0{,}6601$	$0{,}157\cdot10^{-3}$	$-0{,}00166$

Pl.: a jobb oldali támasz fölötti hajlítónyomaték az egyes módokból:

$M_1=-2\cdot(-196{,}6)=393$

$M_2=-2\cdot(733)=-1470$

$M_3=-2\cdot(-1140)=+2280$

A kombináció: $393\cdot0{,}06627-1470\cdot0{,}05635+2280\cdot(-0{,}00166)=-60{,}6\,\text{kNm}$,

de lehet $60{,}6\,\text{kNm}$, ha $\cos(\omega t)=-1$

Tehát itt nem az abszolútértékek összege!

Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

2. ZH: Többszabadságfokú rendszerek mechanika rezgései

¤ modell felvétele
¤ mozgás differenciálegyenlete - felírás
- osztályozás
¤ megoldás

Mit tanultunk eddig?

Többszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:
- modell
- mátrixok (tömeg-, merevségi, hajlékonysági)

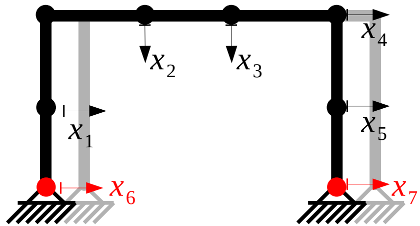
Mozgás mátrix-differenciálegyenlete

Szabadrezgés:
- sajátkörfrekvenciák
- sajátvektorok

Mi következik?

Gerjesztett rezgések
- harmonikus gerjesztőerő
- általános gerjesztőerő
- támaszrezgés
- földrengésvizsgálat

Támaszrezgés – általános támaszmozgás ismétlés



Támaszrezgés esetén az alakváltozásokra vonatkozó differenciálegyenlet:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$$

Megoldás modálanalízissel:

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,y_{g,i}(t)=\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}_g(t)$$

ahol $y_{g,i}(t)$ az i-edik modális koordináta (gerjesztés miatti)

A DE-be behelyettesítés, balról $\boldsymbol{V}^T$-vel szorzás után a sv.-ok tulajdonságai miatt:

$$\boldsymbol{E}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)+\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{y}_g(t)=-\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$$

Ennek az i-edik sorában: $\ddot{y}_{g,i}(t)+\omega_{0,i}^2\,y_{g,i}(t)=f_i(t)$

Egy egységnyi tömegű $(m=1)$, $\omega_{0,i}^2$ merevségű $(k=\omega_{0,i}^2)$ egyszabadságfokú rendszer differenciálegyenlete, amit az $f_i(t)$ erő gerjeszt.

ahol $f_i=-\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)=-\Gamma_i^T\,\ddot{z}(t)$ a teher vetülete a rezgésalakra

$\Gamma_i=\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}$ a tömeg vetülete a rezgésalakra. (modális részvétel}

Az egyszabadságfokú rendszereknél tanultak szerint:

$$y_{g,i}(t)=\int_0^t\frac{-\Gamma_i\,\ddot{z}(\tau)}{\omega_{0,i}}\sin\left(\omega_{0,i}(t-\tau)\right)d\tau=-\Gamma_i\int_0^t\frac{\ddot{z}(\tau)}{\omega_{0,i}}\sin\left(\omega_{0,i}(t-\tau)\right)d\tau$$

Így a teljes megoldás:

$$\boldsymbol{u}_g(t)=-\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,\Gamma_i\int_0^t\frac{\ddot{z}(\tau)}{\omega_{0,i}}\sin\left(\omega_{0,i}(t-\tau)\right)d\tau$$

Támaszrezgés – általános támaszmozgás, válaszspektrum I.

Az i -edik sajátrezgésmód válasza: $y_{g,i}(t) = -\Gamma_i \int_0^t \frac{\ddot{z}(\tau)}{\omega_{0,i}} \sin\left(\omega_{0,i}(t-\tau)\right) \mathrm{d}\,\tau$

A szélsőértéket az integrálkifejezés maximuma befolyásolja.
Egy előírt $z(t)$ esetén ez a sajátkörfrekvencia-függő szélsőérték a válaszspektrum.

Ha a támaszmozgás nem ismert $z(t)$-ként, hanem tervezési válaszspektrumként van megadva (pl. $S_d(T_{0,i})$ pszeudo-gyorsulás tervezési válaszspektrumként),
akkor az i -edik mód maximális kitérése:

$$y_{g,i}^{max} = \Gamma_i \frac{S_d(T_{0,i})}{\omega_{0,i}^2}$$

Az S_d pszeudogyorsulásból elmozdulás válaszspektrumot kell számolunk, ezért osztunk ω_{0i}^2-tel.

Az előjelre $\pm$-ként kell majd a végén gondolnunk.

Az i -edik módból származó legnagyobb elmozdulások:

$$\boldsymbol{u}_g^{i,max} = \boldsymbol{v}_i \Gamma_i \frac{S_d(T_{0,i})}{\omega_{0,i}^2}$$

Az ekkora elmozdulást okozó
helyettesítő statikus erők a szabadságfokokon:

$$\boldsymbol{f}_g^{i,max} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_g^{i,max} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_i \Gamma_i \frac{S_d(T_{0,i})}{\omega_{0,i}^2}$$

Támaszrezgés – általános támaszmozgás, válaszspektrum II.

Az i-edik sajátrezgésmódban a legnagyobb alakváltozásokkal azonos elmozdulást létrehozó statikus erőrendszer::

$$\boldsymbol{f}_g^{i,max} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_g^{i,max} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_i\,\Gamma_i \frac{S_d\left(T_{0,i}\right)}{\omega_{0,i}^2}$$

Vegyük észre, hogy: a $\boldsymbol{v}_i$ vektor sajátvektor, ezért $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_i = \omega_{0i}^2 \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i$

Ezt felhasználva az i-edik alak legnagyobb elmozdulásait okozó erőrendszer:

$$\boldsymbol{f}_g^{i,max} = \omega_{0i}^2 \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i\,\Gamma_i \frac{S_d\left(T_{0,i}\right)}{\omega_{0,i}^2} = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i\,\Gamma_i S_d\left(T_{0,i}\right)$$

Bármely C igénybevétel maximumát az i-edik alakban úgy számolhatunk, hogy az $\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i$ erőrendszerből számolt C_i modális igénybevételt szorozzuk Γ_i-vel és $S_d\left(T_{0,i}\right)$-vel:

$$C^{i,max} = C_i\,\Gamma_i S_d\left(T_{0,i}\right)$$

Ezek a $C^{i,max}$ értékek az egyes módokban:
- pozitív, vagy negatív előjellel is előfordulhatnak.
- eltérő időben léphetnek fel.

Hogyan összegezzük őket?

Támaszrezgés – általános támaszmozgás, válaszspektrum III.

Hogyan összegezhetjük az egyes rezgésmódokban számított maximumokat?
Pár lehetőség:

$ABSSUM -$ Az abszolútértékek összege: $C^{max} = \sum_{i}^{N} |C^{i,max}|$

Felső határ, csak akkor igaz, ha elég hosszú ideig tart a rezgés ahhoz, hogy az *összes* mód maximuma *egyszerre* és *azonos előjellel* lépjen fel. (Ez tipikusan valószínűtlen → nem gazdaságos.)

$SRSS -$ A négyzetösszeg négyzetgyöke: $C^{max} = \sqrt{\sum_{i}^{N} C^{i,max2}}$

A nagyobb igénybevételek hatása nagyobb, de korlátozottan használható, csak egymástól távoli sajátkörfrekvenciák esetén.

$CQC -$ Teljes négyzetes kombináció: $C^{max} = \sqrt{\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{C}}$
A csillapítás hatását is figyelembe veszi.
Csillapítatlan esetben $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{E}$ és azonos $SRSS$-sel.

Többszabadságfokú rendszer szabadrezgése – diszkretizálás hatása III.

Hány szabadságfok elég? (szempontok)

¤ A legmagasabb sajátkörfrekvencia képes legyen *időben követni* a terhet.

¤ Támaszrezgésnél a modális részvételekből elegendő* tömeg jelenjen meg a számításban.

A modális tömeg az i-edik rezgésalakban: $m_i = \Gamma_i^2$

$$m_i = \left(\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{m}\right)^2 = \left(\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{M}_b \boldsymbol{i}\right)^2 = \boldsymbol{i}^T \boldsymbol{M}_b^T \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{M}_b \boldsymbol{i}$$

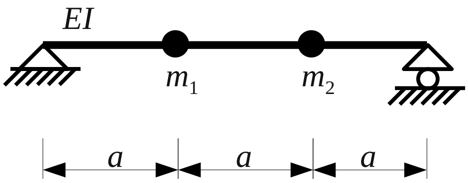
A számításban figyelembe vett *hatékony* tömeg: $m_{eff} = \sum m_i = \boldsymbol{i}^T \boldsymbol{M}_b \boldsymbol{V} \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{M}_b^T \boldsymbol{i}$

Ha elérhető a szükséges hányad kevesebb rezgésalakkal, mint ahány szf. van, akkor elegendő az első *néhány* rezgésalakkal számolni.

$$\underset{N\times n}{\widetilde{\boldsymbol{V}}} = \left[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{v}_n\right] \qquad m_{eff} = \sum m_i = \boldsymbol{i}^T \boldsymbol{M}_b \widetilde{\boldsymbol{V}} \widetilde{\boldsymbol{V}}^T \boldsymbol{M}_b^T \boldsymbol{i}$$

*: a szabványok előírják, hogy a teljes tömeg 90-95%-a

Válaszspektrum – példa



$a=2{,}0\,\mathrm{m}\,,m_1=1{,}2\,\mathrm{t}\,,m_2=2{,}0\,\mathrm{t}\,,EI=1250\,\mathrm{kNm}^2$

$M^b_{max}=?,\ M^j_{max}=?$, ha a teher $S_d=\begin{cases} 1+15\cdot T_0\ [\mathrm{m/s^2}] & \text{ha } T_0<0{,}10\,\mathrm{s} \\ 2{,}5\ [\mathrm{m/s^2}] & \text{ha } 0{,}10\,\mathrm{s}<T_0<0{,}5\,\mathrm{s} \\ \dfrac{1{,}25}{T_0}\ [\mathrm{m/s^2}] & \text{ha } 0{,}5\,\mathrm{s}<T_0<2{,}5\,\mathrm{s} \\ \dfrac{3{,}125}{T_0^2}\ [\mathrm{m/s^2}] & \text{ha } 2{,}5\,\mathrm{s}<T_0 \end{cases}$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1{,}2 & 0\\ 0 & 2{,}0\end{bmatrix}\mathrm{t}\qquad \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}2{,}844\cdot10^{-3} & 2{,}489\cdot10^{-3}\\ 2{,}489\cdot10^{-3} & 2{,}844\cdot10^{-3}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{K}=\boldsymbol{F}^{-1}=\begin{bmatrix}1500 & -1313\\ -1313 & 1500\end{bmatrix}\mathrm{kN/m}$$

$$\text{\'{A}S\'{E}F megoldása: }\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}10{,}80 & 0\\ 0 & 43{,}40\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{V}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{array}\\ \begin{bmatrix}-0{,}54657 & -0{,}73116\\ -0{,}56635 & 0{,}42337\end{bmatrix}\end{array}$$

Rezgésmódonként a helyettesítő statikus teher: $\boldsymbol{f}_g^{i,max}=\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i\,\Gamma_i\,S_d\left(T_{0,i}\right)$

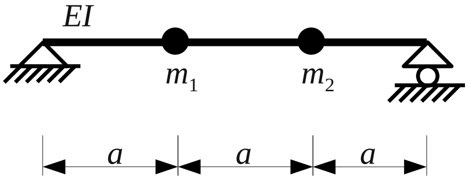
$$T_{0,1}=\frac{2\pi}{\omega_{0,1}}=0{,}5817\,\mathrm{s}\rightarrow S_{d,1}=2{,}149\,\mathrm{m/s^2}$$

$$T_{0,2}=\frac{2\pi}{\omega_{0,2}}=0{,}1448\,\mathrm{s}\rightarrow S_{d,2}=2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$$

$$\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix}1{,}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2{,}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1{,}2\\2{,}0\end{bmatrix}$$

Válaszspektrum – példa

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1{,}2 & 0\\ 0 & 2{,}0\end{bmatrix}\mathrm{t} \qquad \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}-0{,}54657 & -0{,}73116\\ -0{,}56635 & 0{,}42337\end{bmatrix} \qquad S_{d,1}=2{,}149\,\mathrm{m/s^2}\quad S_{d,2}=2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$$



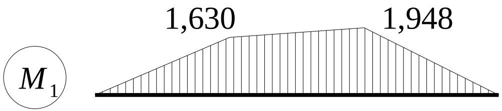
Rezgésmódonként a helyettesítő statikus teher:

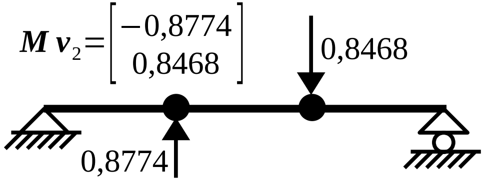
$$\boldsymbol{f}_g^{i,max}=\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i\,\Gamma_i\,S_d\left(T_{0,i}\right)$$

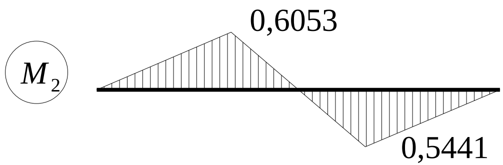
$$\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix}1{,}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2{,}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1{,}2\\2{,}0\end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1=\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{m}=-0{,}54657\cdot1{,}2-0{,}56635\cdot2{,}0=-1{,}789 \qquad \Gamma_2=\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{m}=-0{,}73116\cdot1{,}2+0{,}42337\cdot2{,}0=-0{,}0306$$

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-0{,}6559\\-1{,}133\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-0{,}8774\\0{,}8468\end{bmatrix}$$







$$M_1^b=-1{,}630\cdot(-1{,}789)\cdot2{,}149=6{,}267\,\mathrm{kNm}$$
$$M_1^j=-1{,}948\cdot(-1{,}789)\cdot2{,}149=7{,}489\,\mathrm{kNm}$$

$$M_2^b=-0{,}6053\cdot(-0{,}0306)\cdot2{,}5=0{,}046\,\mathrm{kNm}$$
$$M_2^j=0{,}5441\cdot(-0{,}0306)\cdot2{,}5=-0{,}042\,\mathrm{kNm}$$

Összegzés:

a b keresztmetszetben:

$$M_b^{ABSSUM}=6{,}267+0{,}046=6{,}313\,\mathrm{kNm}$$
$$M_b^{SRSS}=\sqrt{6{,}267^2+0{,}046^2}=6{,}267\,\mathrm{kNm}$$

a j keresztmetszetben:

$$M_j^{ABSSUM}=7{,}489+0{,}042=7{,}531\,\mathrm{kNm}$$
$$M_j^{SRSS}=\sqrt{7{,}489^2+0{,}042^2}=7{,}489\,\mathrm{kNm}$$