Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

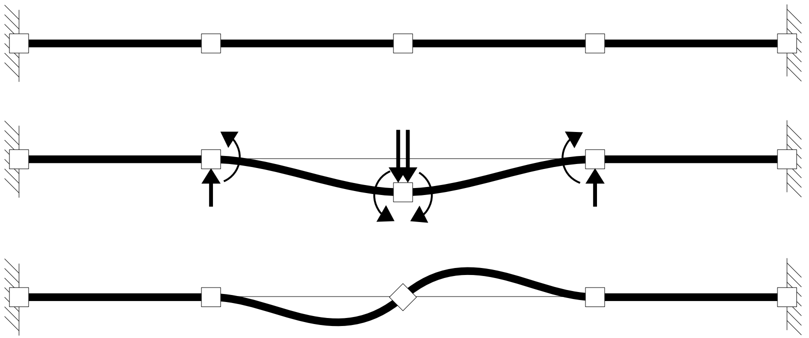
Mit fogunk tanulni ma?

Keretek rezgései

Keretek számítása (tömegmátrix, kompilálás, rugalmas megtámasztás)
Végeselem módszer

Dinamikai vizsgálat mátrix-elmozdulásmódszerrel – merevségi mátrix I.

A Tartók statikája I.-II.-ben tanult merevségi mátrix fizikai jelentése ugyanaz.
Előállítása azonban mindig *elemenként* történik, amit a kompilálás követ.
Az elemekre bontás miatt egy szabadságfokra csak a kapcsolódó elemek szabadságfokainak elmozdulása miatt adódik erő, távolabbi elemek távolabbi csomópontjai miatt nem.



Ennek az elvnek a hatása keretek számítására:

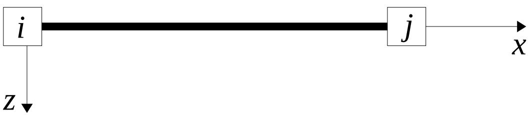
Az *ij*-elem elemi merevségi mátrixa lokális koordinátarendszerben előállítható.
Ez a $\boldsymbol{K}_{ij}^{lok}$ mátrix a végpontok lokális elmozdulásából számítja a végpontokra ható erőket, nyomatékokat a lokális koordináta-rendszerben.
Az elem lokális koordinátarendszeréből át kell forgatni a globális rendszerbe.
A globális koordinátarendszerbe forgatott $\boldsymbol{K}_{ij}^{gl}$ mátrixokból kompiláljuk a szerkezet merevségi mátrixát.

Dinamikai vizsgálat mátrix-elmozdulásmódszerrel – merevségi mátrix II.

A módszer előnyei:
+ a merevségi mátrix kompilálható, elemenként, egyszerűen állítható elő
+ A mátrix sávos szerkezetű lesz, sok zérus elemmel

Hátrányok
- a csompontonkénti szabadságfokok száma megnövekszik: eltolódások + elfordulás
- sok szabadságfok ➔ nagy mátrixok ➔ a sajátértékfeladat megoldása nehezebb

Egy elem (ij) merevségi mátrixa a *lokális* koordinátarendszerben:



A $\boldsymbol{K}_{ij}^{lok}$ elemi merevségi mátrix megadja, hogy az elemvégekre mekkora erőket/nyomatékokat kell működtetni, hogy az $\boldsymbol{u}_{ij}^{lok}$ elmozdult alakot kapjuk:

$$\boldsymbol{f}_{ij}^{lok} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_i^{lok} \\ \boldsymbol{f}_j^{lok} \end{bmatrix} = \boldsymbol{K}_{ij}^{lok} \boldsymbol{u}_{ij}^{lok}$$

Az elem elmozdulásvektora:

$$\boldsymbol{u}_{ij}^{lok} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i^{lok} \\ \boldsymbol{u}_j^{lok} \end{bmatrix}$$

Az elemvég elmozdulásvektorai:

$$\boldsymbol{u}_i^{lok} = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_{iy} \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_j^{lok} = \begin{bmatrix} u_j \\ w_j \\ \varphi_{jy} \end{bmatrix}$$

Az elemvégre ható erők:

$$\boldsymbol{f}_i^{lok} = \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{zi} \\ M_{iy} \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}_j^{lok} = \begin{bmatrix} F_{xj} \\ F_{zj} \\ M_{jy} \end{bmatrix}$$

Dinamikai vizsgálat mátrix-elmozdulásmódszerrel – merevségi mátrix III.

Az elemi merevségi mátrix tehát 6×6-os, de felírható ún. *blokkos* alakban is:

$$\boldsymbol{f}_{ij}^{lok}=\begin{bmatrix} F_{xi}\\ F_{zi}\\ M_{iy}\\ F_{xj}\\ F_{zj}\\ M_{jy}\end{bmatrix}=\boldsymbol{K}_{ij}^{lok}\cdot\begin{bmatrix} u_i\\ w_i\\ \varphi_{iy}\\ u_j\\ w_j\\ \varphi_{jy}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array}\right]\begin{bmatrix} u_i\\ w_i\\ \varphi_{iy}\\ u_j\\ w_j\\ \varphi_{jy}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{K}_{ij}^{lok,AA} & \boldsymbol{K}_{ij}^{lok,AB}\\ \hline \boldsymbol{K}_{ij}^{lok,BA} & \boldsymbol{K}_{ij}^{lok,BB}\end{array}\right]\begin{bmatrix} u_i\\ w_i\\ \varphi_{iy}\\ u_j\\ w_j\\ \varphi_{jy}\end{bmatrix}$$

Egy oszlop jelentése most is a szokásos:
Mekkora erőket/nyomatékokat kell működtetnünk, hogy egységnyi elmozdulást kapjunk a megfelelő szabadságfokon?

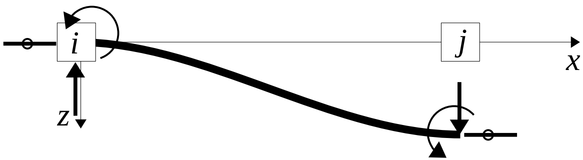
Például a negyedik oszlop $\rightarrow u_j$
(a végcsomópont (j)
eltolódása x-irányba (u)

$$\boldsymbol{k}_4=\begin{bmatrix} -\dfrac{EA}{l}\\ 0\\ 0\\ \dfrac{EA}{l}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

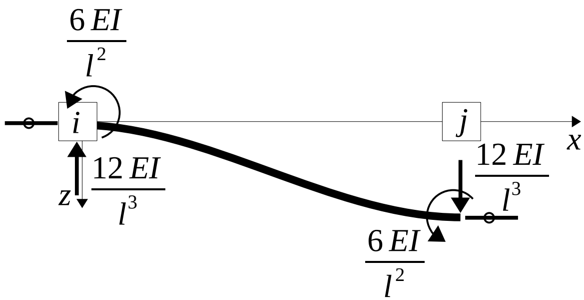
Dinamikai vizsgálat mátrix-elmozdulásmódszerrel – merevségi mátrix IV.

Például az ötödik oszlop $\rightarrow w_j$

(a végcsomópont (j)
eltolódása z-irányba (w)



Pl. Tartók statikája I.-ből:

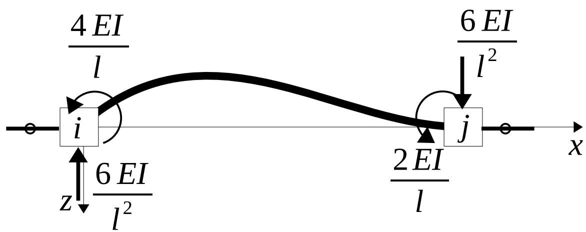


$$\boldsymbol{k}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{12EI}{l^3} \\ \frac{6EI}{l^2} \\ 0 \\ \frac{12EI}{l^3} \\ \frac{6EI}{l^2} \end{bmatrix}$$

Például a harmadik oszlop $\rightarrow \varphi_{iy}$

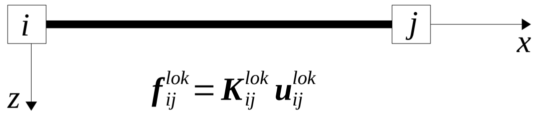
(a kezdő (i)
csomópont elfordulása (φ)
az y-tengely körül)

Pl. Tartók statikája I.-ből:



$$\boldsymbol{k}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{4EI}{l} \\ 0 \\ \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} \end{bmatrix}$$

Dinamikai vizsgálat merevségi mátrixa – jellemzők



$$\boldsymbol{f}_{ij}^{lok} = \boldsymbol{K}_{ij}^{lok}\,\boldsymbol{u}_{ij}^{lok}$$

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{zi} \\ M_{iy} \\ F_{xj} \\ F_{zj} \\ M_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & & -\frac{EA}{l} & & \\ & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & & & \frac{EA}{l} & & \\ & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_{iy} \\ u_j \\ w_j \\ \varphi_{jy} \end{bmatrix}$$

Mértékegységek:			u, w:	m
	EA:	kN	φ:	rad
	EI:	kNm^2	F:	kN
	l:	m	M:	kNm

$$\begin{bmatrix} \mathrm{kN} \\ \mathrm{kN} \\ \mathrm{kNm} \\ \mathrm{kN} \\ \mathrm{kN} \\ \mathrm{kNm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{kN/m} & & & \mathrm{kN/m} & & \\ & \mathrm{kN/m} & \mathrm{kN} & & \mathrm{kN/m} & \mathrm{kN} \\ & \mathrm{kN} & \mathrm{kNm} & & \mathrm{kN} & \mathrm{kNm} \\ \mathrm{kN/m} & & & \mathrm{kN/m} & & \\ & \mathrm{kN/m} & \mathrm{kN} & & \mathrm{kN/m} & \mathrm{kN} \\ & \mathrm{kN} & \mathrm{kNm} & & \mathrm{kN} & \mathrm{kNm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{m} \\ \mathrm{m} \\ \mathrm{rad} \\ \mathrm{m} \\ \mathrm{m} \\ \mathrm{rad} \end{bmatrix}$$

Főátlóban pozitív számok!

Az elemi merevségi mátrixot egyensúlyi alapon is számíthatjuk, ezért:
¤ az 1. és 4. sorban szerepelnek az x irányú erők.
¤ a 2. és 5. sorban szerepelnek a z irányú erők.
Ezek összege külön-külön nullát kell adjon (1. sor + 4. sor, illetve 2. sor + 5. sor).

¤ a j csomópont körül forgatnak a 3. és 6. sor nyomatékai, valamint a 2 sor erői l karral pozitív irányba.
Az összes nyomatéknak nullát kell adnia (2. sor l-szerese + 3. sor + 6. sor).

A 2., 3., 5., 6. sorok fenti tulajdonságaiból következően: 5. sor l-szerese = 3. sor + 6. sor.

Dinamikai vizsgálat mátrix-elmozdulásmódszerrel – merevségi mátrix V.

A merevségi mátrix transzformálása lokálisból globális koordinátarendszerbe

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{gl}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{ij} & 0\\ 0 & \boldsymbol{T}_{ij}\end{bmatrix}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok}\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{ij}^{T} & 0\\ 0 & \boldsymbol{T}_{ij}^{T}\end{bmatrix}$$

A transzformáció blokkonként is elvégezhető: $\boldsymbol{K}_{ij}^{gl}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,AA}\boldsymbol{T}_{ij}^{T} & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,AB}\boldsymbol{T}_{ij}^{T}\\ \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,BA}\boldsymbol{T}_{ij}^{T} & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,BB}\boldsymbol{T}_{ij}^{T}\end{bmatrix}$

Amikor jobbról szorozzuk a globális elmozdulással, akkor $\boldsymbol{T}_{ij}^{T}$-vel való szorzás lokális elmozdulást számít, amiből $\boldsymbol{K}_{ij}^{lok}$ blokkja erőt számol a lokális rendszerben, amit a $\boldsymbol{T}_{ij}$-vel való szorzás átszámít a globális krsz.-be.

Merevségi mátrix kompilálása

Mint a diszkrét rugós modellnél, itt is az egyes elemek merevségi mátrixaiból állíthatjuk elő a szerkezet merevségi mátrixát, de most az egyes csomópontok 3×3-as blokkjait kell összegezni a kezdetben nullákkal feltöltött $\boldsymbol{K}$ mátrixban.

A $\boldsymbol{K}_{ij}^{gl}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{ij}^{gl,AA} & \boldsymbol{K}_{ij}^{gl,AB}\\ \boldsymbol{K}_{ij}^{gl,BA} & \boldsymbol{K}_{ij}^{gl,BB}\end{bmatrix}$ blokkstruktúra esetén:

$\boldsymbol{K}_{ij}^{gl,AA}$-t az i,i-blokkhoz adjuk,
$\boldsymbol{K}_{ij}^{gl,AB}$-t az i,j-blokkhoz adjuk,
$\boldsymbol{K}_{ij}^{gl,BA}$-t a j,i-blokkhoz adjuk,
$\boldsymbol{K}_{ij}^{gl,BB}$-t a j,j-blokkhoz adjuk.

Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Mit fogunk tanulni ma?

Keretek rezgései

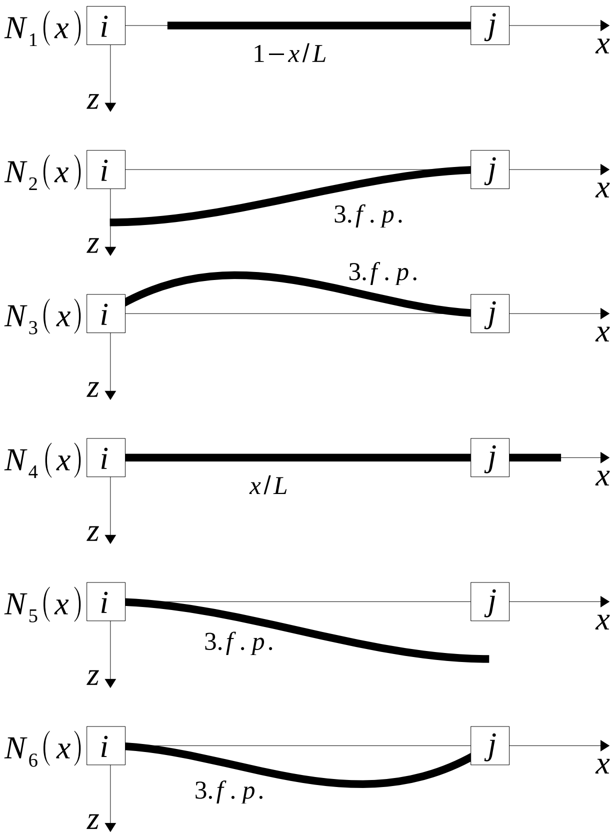
Keretek számítása (tömegmátrix, kompilálás, rugalmas megtámasztás)

Végeselem módszer

Dinamikai vizsgálat végeselemmódszerrel – alakfüggvények

$$\boldsymbol{u}_{ij}^{lok} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i^{lok} \\ \boldsymbol{u}_j^{lok} \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_i^{lok} = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_{iy} \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_j^{lok} = \begin{bmatrix} u_j \\ w_j \\ \varphi_{jy} \end{bmatrix}$$

A merevségi mátrix előállításának automatizálásához felsoroljuk az egyes oszlopok alakjait:



Az elem teljes elmozdulása ezeknek a függvényeknek a lineáris kombinációja:

$$u(x) = u_i \cdot N_1(x) + u_j \cdot N_4(x)$$
$$w(x) = w_i \cdot N_2(x) + \varphi_{iy} \cdot N_3(x) + w_j \cdot N_5(x) + \varphi_{jy} \cdot N_6(x)$$

De elegánsabb úgy írni, hogy:

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ w(x) \end{bmatrix} = \boldsymbol{N}(x) \cdot \boldsymbol{u}_{ij}^{loc}$$

ahol $\boldsymbol{N}(x)$ a *bázisfüggvények* mátrixa:

$$\boldsymbol{N}(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix}$$

Az $N_k(x)$ függvények pedig a *bázisfüggvények*.

- egy szabadságfok helyén 1, a többi helyén zérus
- kellően folytonos
- előállítási technikái itt nem a feladatunk

Dinamikai vizsgálat végeselemmódszerrel – mátrixok

Vezessük be az $\boldsymbol{L}$ ún. *operátormátrixot* :

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}()}{dx} & 0\\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2()}{dx^2}\end{bmatrix}$$

Operátor: amit mögé írunk, azzal csinál valamit.

Az $\boldsymbol{L}$ mátrixot alkalmazva a bázisfüggvények mátrixára
a kapott mátrix az alakváltozások mátrixa $(\boldsymbol{B}(x))$:

$$\boldsymbol{B}(x)=\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{N}(x)=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}()}{dx} & 0\\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2()}{dx^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0\\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}\,N_1(x)}{dx} & 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}\,N_4(x)}{dx} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2 N_2(x)}{dx^2} & \frac{\mathrm{d}^2 N_3(x)}{dx^2} & 0 & \frac{\mathrm{d}^2 N_5(x)}{dx^2} & \frac{\mathrm{d}^2 N_6(x)}{dx^2}\end{bmatrix}$$

Vezessük be a $\boldsymbol{D}$ ún. *keresztmetszeti merevségi mátrixot* :

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}EA & 0\\ 0 & EI\end{bmatrix}$$

Dinamikai vizsgálat végeselemmódszerrel – merevségi mátrix

Az elemi merevségi mátrix így előállítható az alábbi formulával:

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{loc} = \int_L \boldsymbol{B}^T(x)\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{B}(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Az integrálást a mátrixszorzaton belül elemenként lehet végrehajtani, de ez alapvetően a program dolga. (Persze ha nekünk kell megírni a programot akkor ez már nem ilyen egyértelmű.)

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{lok} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & & -\frac{EA}{l} & & \\ & \frac{12\,EI}{l^3} & -\frac{6\,EI}{l^2} & & -\frac{12\,EI}{l^3} & -\frac{6\,EI}{l^2} \\ & -\frac{6\,EI}{l^2} & \frac{4\,EI}{l} & & \frac{6\,EI}{l^2} & \frac{2\,EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & & & \frac{EA}{l} & & \\ & -\frac{12\,EI}{l^3} & \frac{6\,EI}{l^2} & & \frac{12\,EI}{l^3} & \frac{6\,EI}{l^2} \\ & -\frac{6\,EI}{l^2} & \frac{2\,EI}{l} & & \frac{6\,EI}{l^2} & \frac{4\,EI}{l} \end{bmatrix}$$

Például: a második sor ötödik oszlopában az elem*:

$$K_{ij,2,5}^{loc} = \int_L \left(0\cdot EA\cdot 0 + \frac{\mathrm{d}^2 N_2(x)}{dx^2}\cdot EI\cdot \frac{\mathrm{d}^2 N_5(x)}{dx^2} \right) \mathrm{d}\,x =$$

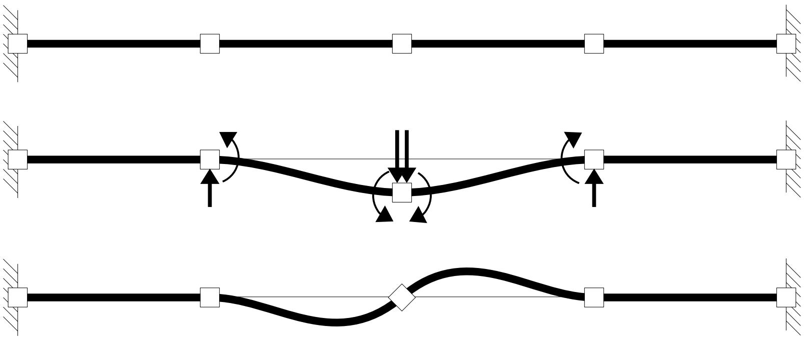
$$= EI \int_L \frac{\mathrm{d}^2 N_2(x)}{dx^2}\cdot \frac{\mathrm{d}^2 N_5(x)}{dx^2}\,\mathrm{d}\,x$$

A virtuális elmozdulások tétele alapján látható be, hogy ez valóban éppen a keresett elmozdulásrendszer mellett a keresett reakcióerő.

A fenti elv más szerkezetnél is használható (pl. tárcsa, lemez), csak más lesz:
- a végeselem
- a csomóponti elmozdulások vektora
- a bázisfüggvények, és azok mátrixa
- az operátormátrix
- a keresztmetszeti merevség mátrixa

* Egy mátrixszorzat eredményének a k,l eleme (azaz a k-adik sor, l-edik oszlop eleme a szorzat első mátrixának k-adik sorából a közbenső mátrixokból és az utolsó mátrix l-edik oszlopából képzett szorzattal egyenlő

Dinamikai vizsgálat merevségi mátrixa – összefoglalás



Az elem elmozdulásvektora:

$$\boldsymbol{u}_{ij}^{lok}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_i^{lok}\\ \boldsymbol{u}_j^{lok}\end{bmatrix}$$

Az elemvég elmozdulásvektorai:

$$\boldsymbol{u}_i^{lok}=\begin{bmatrix}u_i\\ w_i\\ \varphi_{iy}\end{bmatrix},\boldsymbol{u}_j^{lok}=\begin{bmatrix}u_j\\ w_j\\ \varphi_{jy}\end{bmatrix}$$

Az elemvégre ható erők:

$$\boldsymbol{f}_i^{lok}=\begin{bmatrix}F_{xi}\\ F_{zi}\\ M_{iy}\end{bmatrix},\boldsymbol{f}_j^{lok}=\begin{bmatrix}F_{xj}\\ F_{zj}\\ M_{jy}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}(x)=\begin{bmatrix}N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0\\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}()}{dx} & 0\\ 0 & \dfrac{\mathrm{d}^2()}{dx^2}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}(x)=\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{N}(x)\qquad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}EA & 0\\ 0 & EI\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{loc}=\int_L \boldsymbol{B}^T(x)\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{B}(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\begin{bmatrix}u(x)\\ w(x)\end{bmatrix}=\boldsymbol{N}(x)\cdot\boldsymbol{u}_{ij}^{loc}$$

Krsz.-transzformáció: $\boldsymbol{K}_{ij}^{gl}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,AA}\boldsymbol{T}_{ij}^T & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,AB}\boldsymbol{T}_{ij}^T\\ \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,BA}\boldsymbol{T}_{ij}^T & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,BB}\boldsymbol{T}_{ij}^T\end{bmatrix}$ → Kompilálás

Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Mit tanultunk eddig?

Egy- és többszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései

Keretszerkezetek merevségi mátrixa

Mi lesz még?

Keretszerkezetek számítása

Keretek számítása (tömegmátrix, rugalmas megtámasztás)

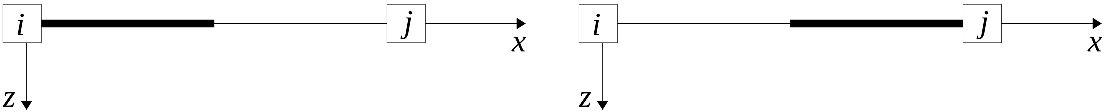
Példák

Dinamikai vizsgálat tömegmátrixa – diagonál tömegmátrix

Az elem elmozdulásvektora:

$$\boldsymbol{u}_{ij}^{lok} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i^{lok} \\ \boldsymbol{u}_j^{lok} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_{iy} \\ u_j \\ w_j \\ \varphi_{jy} \end{bmatrix}$$

Legyen az l hosszúságú elem fajlagos *fajlagos tömege*: μ.



Az eltolódási szabadságfokokhoz az elem tömegének fele tartozik: $m_{ix} = m_{iz} = m_{jx} = m_{jz} = \dfrac{\mu l}{2}$

Az elfordulási szabadságfokokra nyomatéki egyenletet írunk ➔ perdülettétel a csomópontra
Az ehhez tartozó tehetetlenség a tehetetlenségi nyomaték.

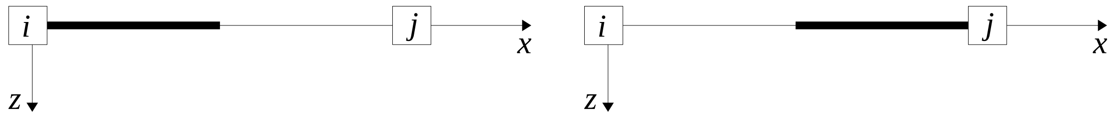
A rúd végi forgástengelyre ez tömeg-szer-hossznégyzet-per-három, azaz a fél elemre: $I_{iy} = I_{jy} = \dfrac{1}{3} \dfrac{\mu l}{2} \left(\dfrac{l}{2} \right)^2 = \dfrac{\mu l^3}{24}$

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{lok} = \mu l \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & & & & & \\ & 1/2 & & & & \\ & & l^2/24 & & & \\ \hline & & & 1/2 & & \\ & & & & 1/2 & \\ & & & & & l^2/24 \end{array} \right]$$

Ez a tömegmátrix a globális koordináta-rendszerbe forgatáskor sem változik:

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{gl} = \boldsymbol{M}_{ij}^{lok}$$

Dinamikai vizsgálat tömegmátrixa – majdnem diagonál tömegmátrix



Az elem elmozdulásvektora:

$$\boldsymbol{u}_{ij}^{lok}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_i^{lok}\\ \boldsymbol{u}_j^{lok}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_i\\ w_i\\ \varphi_{iy}\\ u_j\\ w_j\\ \varphi_{jy}\end{bmatrix}$$

A fél rúdelem haladó mozgásakor (w_i, w_j) perdülete is van a csomópontra.
A fél rúdelem elfordulásakor $(\varphi_{iy}, \varphi_{jy})$ a súlypontjának haladó mozgása is van.

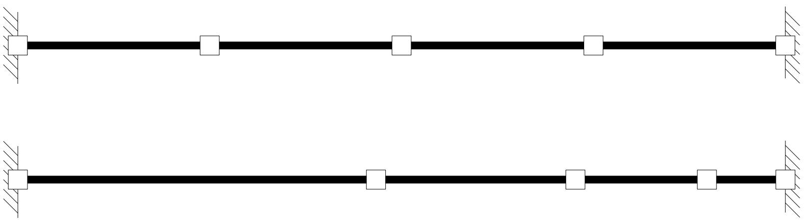
$$\boldsymbol{M}_{ij}^{lok}=\mu\, l\left[\begin{array}{ccc|ccc}1/2 & & & & & \\ & 1/2 & -l/8 & & & \\ & -l/8 & l^2/24 & & & \\ \hline & & & 1/2 & & \\ & & & & 1/2 & l/8 \\ & & & & l/8 & l^2/24\end{array}\right]$$

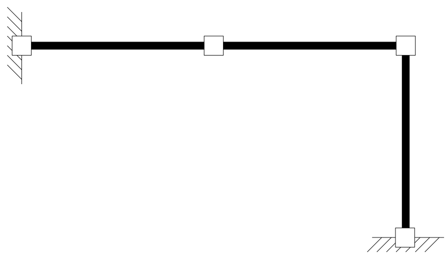
Ezt a tömegmátrixot transzformálni kell:
(Ezt is lehet blokkonként)

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{gl}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,AA}\boldsymbol{T}_{ij}^{T} & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,AB}\boldsymbol{T}_{ij}^{T}\\ \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,BA}\boldsymbol{T}_{ij}^{T} & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,BB}\boldsymbol{T}_{ij}^{T}\end{bmatrix}$$

Csak a 3×3-as főátló-blokkok lesznek zérustól különbözők.

A főátlón kívüli tagok a kompilálás után kiesnek, ha a csomóponthoz kapcsolódó rúdelem-felek súlypontja a csomópontba esik.





Dinamikai vizsgálat tömegmátrixa – konzisztens tömegmátrix

Az elem elmozdulásvektora:

$$\boldsymbol{u}_{ij}^{lok}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_i^{lok}\\ \boldsymbol{u}_j^{lok}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_i\\ w_i\\ \varphi_{iy}\\ u_j\\ w_j\\ \varphi_{jy}\end{bmatrix}$$

A bázisfüggvények mátrixával:

$$\boldsymbol{N}(x)=\begin{bmatrix}N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0\\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{loc}=\int_L \mu\,\boldsymbol{N}^T(x)\,\boldsymbol{N}(x)\,\mathrm{d}x$$

Konzisztens tömegmátrix:
A merevségi mátrixhoz használt bázisfüggvényeket alkalmazzuk a tömegmátrixhoz is.

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{lok}=\mu l\left[\begin{array}{ccc|ccc}1/3 & & & 1/6 & & \\ & 13/35 & -11l/210 & & 9/70 & 13l/420\\ & -11l/210 & l^2/105 & & -13l/420 & l^2/140\\ \hline 1/6 & & & 1/3 & & \\ & 9/70 & -13l/420 & & 13/35 & 11l/210\\ & 13l/420 & l^2/140 & & 11l/210 & l^2/105\end{array}\right]$$

Ezt a tömegmátrixot transzformálni kell:
(Ezt is lehet blokkonként)

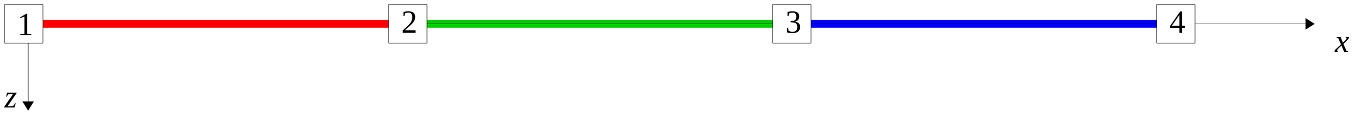
$$\boldsymbol{M}_{ij}^{gl}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,AA}\boldsymbol{T}_{ij}^T & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,AB}\boldsymbol{T}_{ij}^T\\ \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,BA}\boldsymbol{T}_{ij}^T & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,BB}\boldsymbol{T}_{ij}^T\end{bmatrix}$$

Tartók dinamikája BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Példa – Gerenda normál és hajlítórezgése I.

$L = 4{,}8\,\mathrm{m}$ hosszú rúd, fajlagos tömege: $\mu = 400\,\mathrm{kg/m}$,
normálmerevsége: $EA = 15000\,\mathrm{kN}$, hajlítómerevsége $EI = 100\,\mathrm{kNm}^2$
Állítsuk elő a teljes szerkezet merevségi és tömegmátrixát, ha 3 elemre bontjuk a rudat!

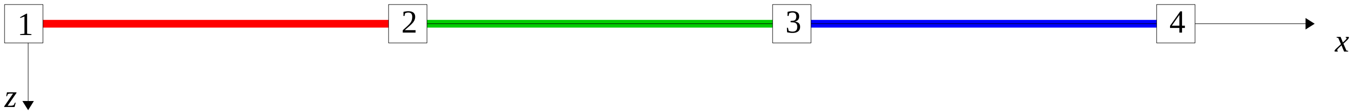


Mindegyik elem azonos (hosszúságú, anyagú, merevségű) $\rightarrow \boldsymbol{K}_{12}^{lok} = \boldsymbol{K}_{23}^{lok} = \boldsymbol{K}_{34}^{lok}$ és $\boldsymbol{M}_{12}^{lok} = \boldsymbol{M}_{23}^{lok} = \boldsymbol{M}_{34}^{lok}$

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{loc} = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 213 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 \\ 0 & 237 & -54 & 0 & 82 & 31 \\ 0 & -54 & 15 & 0 & -32 & 11 \\ 106 & 0 & 0 & 213 & 0 & 0 \\ 0 & 82 & -32 & 0 & 237 & 53 \\ 0 & 31 & 11 & 0 & 53 & 15 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K}_{ij}^{loc} = \begin{bmatrix} 9375 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 \\ 0 & 292 & -235 & 0 & -293 & -235 \\ 0 & -235 & 250 & 0 & 234 & 125 \\ -9375 & 0 & 0 & 9375 & 0 & 0 \\ 0 & -293 & 234 & 0 & 292 & 234 \\ 0 & -235 & 125 & 0 & 234 & 250 \end{bmatrix}$$

Példa – Gerenda normál és hajlítórezgése I.

$L = 4{,}8\,\mathrm{m}$ hosszú rúd, fajlagos tömege: $\mu = 400\,\mathrm{kg/m}$,
normálmerevsége: $EA = 15000\,\mathrm{kN}$, hajlítómerevsége $EI = 100\,\mathrm{kNm}^2$
Állítsuk elő a teljes szerkezet merevségi és tömegmátrixát, ha 3 elemre bontjuk a rudat!



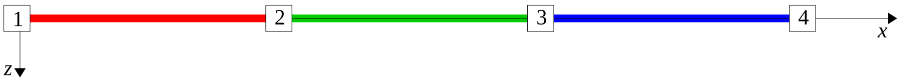
Mindegyik elem azonos (hosszúságú, anyagú, merevségű) $\rightarrow \boldsymbol{K}_{12}^{lok} = \boldsymbol{K}_{23}^{lok} = \boldsymbol{K}_{34}^{lok}$ és $\boldsymbol{M}_{12}^{lok} = \boldsymbol{M}_{23}^{lok} = \boldsymbol{M}_{34}^{lok}$

Mindegyik elem a globális krsz.-ben azonos módon áll $\rightarrow$ nem szükséges transzformálni:

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{lok} = \boldsymbol{K}_{ij}^{gl} \text{ és } \boldsymbol{M}_{ij}^{lok} = \boldsymbol{M}_{ij}^{gl}$$

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{gl} = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 213 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 \\ 0 & 237 & -54 & 0 & 82 & 31 \\ 0 & -54 & 15 & 0 & -32 & 11 \\ 106 & 0 & 0 & 213 & 0 & 0 \\ 0 & 82 & -32 & 0 & 237 & 53 \\ 0 & 31 & 11 & 0 & 53 & 15 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K}_{ij}^{gl} = \begin{bmatrix} 9375 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 \\ 0 & 292 & -235 & 0 & -293 & -235 \\ 0 & -235 & 250 & 0 & 234 & 125 \\ -9375 & 0 & 0 & 9375 & 0 & 0 \\ 0 & -293 & 234 & 0 & 292 & 234 \\ 0 & -235 & 125 & 0 & 234 & 250 \end{bmatrix}$$

Példa – Gerenda normál és hajlítórezgése II.

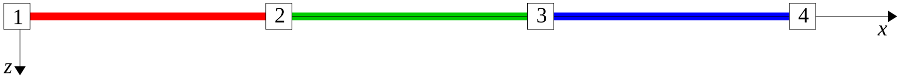


$$\boldsymbol{K}_{ij}^{gl} = \begin{bmatrix} 9375 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 \\ 0 & 292 & -235 & 0 & -293 & -235 \\ 0 & -235 & 250 & 0 & 234 & 125 \\ -9375 & 0 & 0 & 9375 & 0 & 0 \\ 0 & -293 & 234 & 0 & 292 & 234 \\ 0 & -235 & 125 & 0 & 234 & 250 \end{bmatrix}$$

Merevségi mátrix kompilálása:

$$\boldsymbol{K}^{all} = \begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccccccccc} & \boxed{1} & & & \boxed{2} & & & \boxed{3} & & & \boxed{4} & \end{array} & \\
\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc}
9375 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 292 & -235 & 0 & -293 & -235 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -235 & 250 & 0 & 234 & 125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
-9375 & 0 & 0 & 18750 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -293 & 234 & 0 & 585 & 0 & 0 & -293 & -235 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -235 & 125 & 0 & 0 & 500 & 0 & 234 & 125 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 & 18750 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -293 & 234 & 0 & 585 & 0 & 0 & -293 & -235 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -235 & 125 & 0 & 0 & 500 & 0 & 234 & 125 \\ \hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 & 9375 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -293 & 234 & 0 & 292 & 234 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -235 & 125 & 0 & 234 & 250
\end{array}\right] &
\begin{array}{c} \\ \boxed{1} \\ \\ \\ \boxed{2} \\ \\ \\ \boxed{3} \\ \\ \\ \boxed{4} \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

Példa – Gerenda normál és hajlítórezgése III.

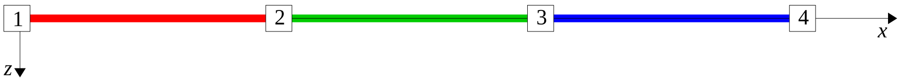


$$\boldsymbol{M}_{ij}^{gl}=10^{-3}\cdot\begin{bmatrix} 213 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 \\ 0 & 237 & -54 & 0 & 82 & 31 \\ 0 & -54 & 15 & 0 & -32 & 11 \\ 106 & 0 & 0 & 213 & 0 & 0 \\ 0 & 82 & -32 & 0 & 237 & 53 \\ 0 & 63 & 11 & 0 & 53 & 15 \end{bmatrix}$$

Tömegmátrix kompilálása:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccccccc} & \boxed{1} & & & \boxed{2} & & & \boxed{3} & & & \boxed{4} & \end{array} & \\ \boldsymbol{M}^{all}=10^{-3}\cdot\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 213 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 237 & -54 & 0 & 82 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -54 & 15 & 0 & -32 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 106 & 0 & 0 & 426 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 82 & -32 & 0 & 475 & 0 & 0 & 82 & 31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & 11 & 0 & 0 & 31 & 0 & -32 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 & 426 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 82 & -32 & 0 & 475 & 0 & 0 & 82 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & 11 & 0 & 0 & 31 & 0 & -32 & 11 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 & 213 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 82 & -32 & 0 & 237 & 53 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & 11 & 0 & 53 & 15 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \boxed{1} \\ \\ \\ \boxed{2} \\ \\ \\ \boxed{3} \\ \\ \\ \boxed{4} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Példa – Gerenda támaszai I.

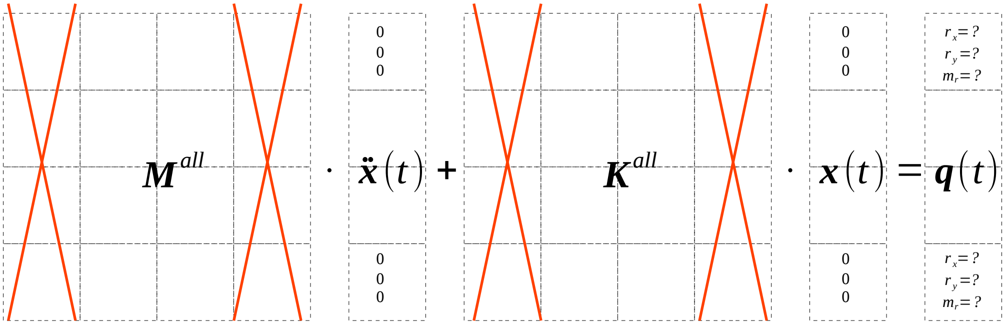


Merev befogás mindkét végen: a megtámasztott szabadságfokok elmozdulása 0.

➔ a nekik megfelelő oszlopok nullával szorzódnak

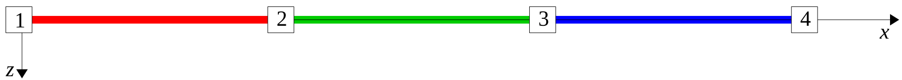
➔ a nekik megfelelő sorokban a reakció lesz az ismeretlen

➔ az egyenletrenszer redukálható



$$\boldsymbol{M} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{u}}_2 \\ \ddot{\boldsymbol{u}}_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{K} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_2 \\ \boldsymbol{q}_3 \end{bmatrix}$$

Példa – Gerenda támaszai I.



Merev befogás mindkét végen: a megtámasztott szabadságfokok elmozdulása 0.
➔ a nekik megfelelő oszlopok nullával szorzódnak
➔ a nekik megfelelő sorokban a reakció lesz az ismeretlen
➔ az egyenletrenszer redukálható

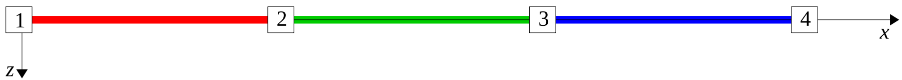
$$\boldsymbol{M}^{all} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{K}^{all} \cdot \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{q}(t)$$

$$\boldsymbol{M} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{u}}_2 \\ \ddot{\boldsymbol{u}}_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{K} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_2 \\ \boldsymbol{q}_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{q}(t)$$

Innen a szokott módon számolható.

Példa – Gerenda támaszai II.



$$\boldsymbol{K}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc} \boxed{2} & \boxed{3} \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 18750 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0\\ 0 & 585 & 0 & 0 & -293 & -235\\ 0 & 0 & 500 & 0 & 234 & 125\\ \hline -9375 & 0 & 0 & 18750 & 0 & 0\\ 0 & -293 & 234 & 0 & 585 & 0\\ 0 & -235 & 125 & 0 & 0 & 500 \end{array}\right]\begin{array}{c}\boxed{2}\\ \\ \boxed{3}\end{array}\end{array}$$

$$\boldsymbol{M}=10^{-3}\cdot\begin{array}{c}\begin{array}{cc} \boxed{2} & \boxed{3} \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 426 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0\\ 0 & 475 & 0 & 0 & 82 & 31\\ 0 & 0 & 31 & 0 & -32 & 11\\ \hline 106 & 0 & 0 & 426 & 0 & 0\\ 0 & 82 & -32 & 0 & 475 & 0\\ 0 & 31 & 11 & 0 & 0 & 31 \end{array}\right]\begin{array}{c}\boxed{2}\\ \\ \boxed{3}\end{array}\end{array}$$

A szabadrezgés (az általánosított sajátértékfeladat) megoldásai:

$$\boldsymbol{\Omega}=\langle 15{,}545 \quad 42{,}859 \quad 130{,}247 \quad 132{,}583 \quad 151{,}737 \quad 296{,}464 \rangle$$

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}968 & 0 & -1{,}250\\ -0{,}907 & 1{,}067 & 0{,}463 & 0 & -0{,}406 & 0\\ 0{,}593 & 0{,}571 & -3{,}473 & 0 & -5{,}281 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}968 & 0 & 1{,}250\\ -0{,}907 & -1{,}067 & -0{,}463 & 0 & -0{,}406 & 0\\ -0{,}593 & 0{,}571 & -3{,}473 & 0 & 5{,}281 & 0 \end{bmatrix}$$

hajlító rezgések

normál rezgések

Példa – Elemméret, elemszám hatása

Hajlítórezgések sajátkörfrekvenciái az elemszám függvényében:

$$N=2 \quad \mathbf{\Omega}=\langle \; 15{,}603 \quad 56{,}256 \; \rangle$$
$$N=3 \quad \mathbf{\Omega}=\langle \; 15{,}545 \quad 42{,}859 \quad 130{,}247 \quad 151{,}737 \; \rangle$$
$$N=4 \quad \mathbf{\Omega}=\langle \; 15{,}374 \quad 43{,}381 \quad 84{,}743 \quad 218{,}388 \quad 265{,}156 \quad 308{,}835 \; \rangle$$
$$N=5 \quad \mathbf{\Omega}=\langle \; 15{,}330 \quad 42{,}658 \quad 86{,}229 \quad 140{,}911 \quad 339{,}550 \quad 375{,}270 \quad 463{,}823 \quad 520{,}455 \; \rangle$$
$$N=6 \quad \mathbf{\Omega}=\langle \; 15{,}321 \quad 42{,}329 \quad 84{,}592 \quad 144{,}102 \quad 211{,}406 \quad 482{,}082 \quad 528{,}409 \quad 596{,}410 \quad 727{,}317 \quad 777{,}986 \; \rangle$$

A sajátkörfrekvenciák első fele hihető, a magasabb tagok még messze nem.
Ennek oka: a bázisfüggvények legfeljebb harmadfokú függvények, ilyen alakokkal próbáljuk leírni a tényleges rezgésalakot. Ez egy geometriai kényszer, ami merevíti a ténylegeshez képest a szerkezetet ➜ magasabb sajátkörfrekvenciák.

Mekkora elemméretet használjunk?

A figyelembe vehető sajátkörfrekvenciák a gerjesztés körfrekvenciáját követni tudják.
Különben lehet, hogy éppen a rezonáns rezgésmódot hagyjuk ki.

A magasabb értékekre semmi szükség:
¤ pontatlan
¤ tszf. rendszerben a hatása egyre csökken.

Általánosított sajátértékfeladat redukált megoldása

Ha az N szabadságfokú rendszerben csak n sajátvektort és sajátkörfrekvenciát határozunk meg:

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_N \end{bmatrix}$$

és

$$\boldsymbol{\Omega} = \langle \omega_{0,1} \quad \omega_{0,2} \quad \dots \quad \omega_{0,N} \rangle$$

helyett

$$\boldsymbol{V}_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}$$

és

$$\boldsymbol{\Omega}_n = \langle \omega_{0,1} \quad \omega_{0,2} \quad \dots \quad \omega_{0,n} \rangle$$

De az ortogonalitási és normáltsági tulajdonságok megmaradnak:

$$\boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{\Omega}_n$$

A modálanalízis során csak közelítő megoldást kapunk: $\boldsymbol{x}(t) \approx \boldsymbol{V}_n \boldsymbol{y}_n(t)$

A mozgásegyenlet: $\boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{V}_n \ddot{\boldsymbol{y}}_n(t) + \boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{V}_n \boldsymbol{y}_n(t) = \boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{q}(t)$

Most is szétesik (az első n alakra): $\boldsymbol{E} \ddot{\boldsymbol{y}}_n(t) + \boldsymbol{\Omega}_n^2 \boldsymbol{y}_n(t) = \boldsymbol{f}_n(t)$

$$\ddot{y}_i(t) + \omega_{0,i}^2 y_i(t) = f_i(t)$$

Támaszrezgés esetén a mutatóvektort a teljes szerkezeten számoljuk, így: $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}_b \boldsymbol{i}$

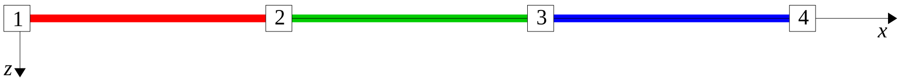
A modális részvétel is változatlan: $\Gamma_i = \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{m}$, ezeket egy vektorba gyűjtve:

$$\boldsymbol{\Gamma}_n = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{v}_2^T \boldsymbol{m} \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_2^T \boldsymbol{m} \end{bmatrix} = \boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{m} = \boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{M}_b \boldsymbol{i}$$

Az n rezgésalakkal figyelembe vett *hatékony tömeg*:

$$m_{eff} = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i^2 = \boldsymbol{\Gamma}_n^T \boldsymbol{\Gamma}_n = \boldsymbol{i}^T \boldsymbol{M}_b^T \boldsymbol{V}_n \boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{M}_b \boldsymbol{i}$$

Gerenda rugalmas megtámasztása

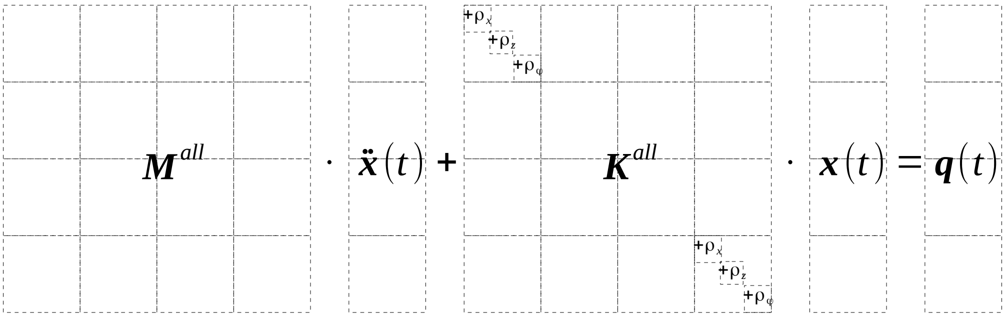


A teljes merevségi mátrix főátlójában a rugalmasan megtámasztott szabadságfokok elemeihez kell hozzáadni a rugómerevséget:

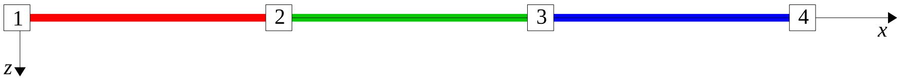
¤ merev támasz esetén egy numerikusan *kellően nagy merevségű* rugóval támasztjuk meg

¤ nem kell megkülönböztetni a külső- és belső csomópontokat, szabadságfokokat

¤ a merev támasz esetén nagyobb lesz az egyenletrendszer
(de úgyis csak az első néhány sajátrezgésalakot használjuk)



Gerenda rugalmas megtámasztása – példa



A korábban már kompilált mátrixok első 6 sajátkörfrekvenciája a rugómerevség függvényében:

$$
\begin{array}{rl}
\rho=0 & \boldsymbol{\Omega}_6=\langle \; 0 \quad 0 \quad 0 \quad 14{,}83 \quad 43{,}84 \quad 117{,}59 \; \rangle \\
\rho=10 & \boldsymbol{\Omega}_6=\langle \; 2{,}99 \quad 3{,}22 \quad 5{,}75 \quad 17{,}17 \quad 45{,}38 \quad 118{,}16 \; \rangle \\
\rho=100 & \boldsymbol{\Omega}_6=\langle \; 7{,}48 \quad 15{,}44 \quad 28{,}44 \quad 54{,}20 \quad 122{,}2 \quad 147{,}98 \; \rangle \\
\rho=1000 & \boldsymbol{\Omega}_6=\langle \; 13{,}38 \quad 32{,}75 \quad 61{,}30 \quad 81{,}33 \quad 134{,}92 \quad 178{,}74 \; \rangle \\
\rho=10000 & \boldsymbol{\Omega}_6=\langle \; 15{,}28 \quad 41{,}59 \quad 82{,}93 \quad 126{,}43 \quad 128{,}01 \quad 194{,}82 \; \rangle \\
\rho=100000 & \boldsymbol{\Omega}_6=\langle \; 15{,}51 \quad 42{,}73 \quad 124{,}22 \quad 129{,}93 \quad 149{,}35 \quad 278{,}25 \; \rangle \\
\rho=\infty & \boldsymbol{\Omega}_6=\langle \; 15{,}55 \quad 42{,}86 \quad 130{,}25 \quad 132{,}58 \quad 151{,}74 \quad 296{,}46 \; \rangle
\end{array}
$$

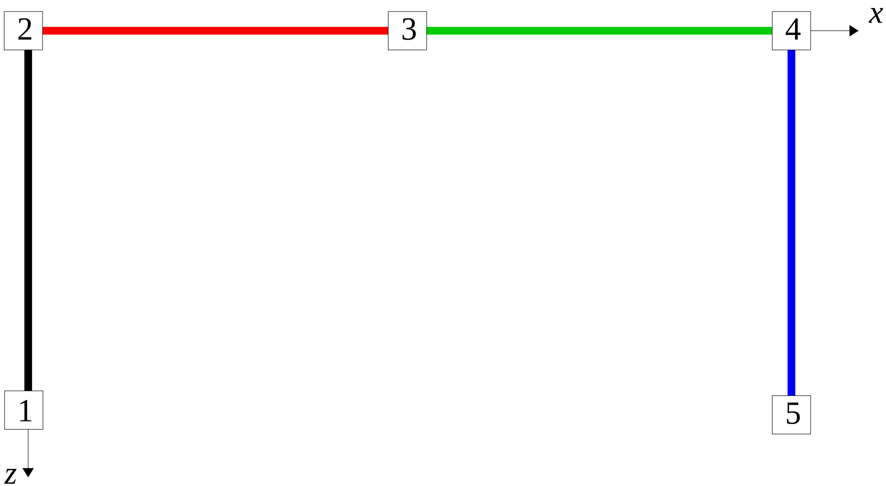
Túl kicsi rugómerevség ➔ a merevtest-szerű mozgás dominál
Mennyi az elegendő merevség a merev támasz modellezésére?
¤ Elsősorban szerkezetfüggő (még csak nem is a főátló értékeitől).
¤ A merevtest-szerű rezgés frekvenciája legyen nagyságrendekkel nagyobb az első sajátkörfrekvenciánál.

Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Példa – Keret rezgése, elemi mátrixok a lokális krsz.-ben

$L = 8\,\mathrm{m}$ hosszú, $H = 4\,\mathrm{m}$ magas keret, fajlagos tömege: $\mu = 400\,\mathrm{kg/m}$,
normálmerevsége: $EA = 12000\,\mathrm{kN}$, hajlítómerevsége $EI = 200\,\mathrm{kNm}^2$
Állítsuk elő a teljes szerkezet merevségi és tömegmátrixát, ha 4 elemre bontjuk a keretet!



Mindegyik elem azonos (hosszúságú, anyagú, merevségű):

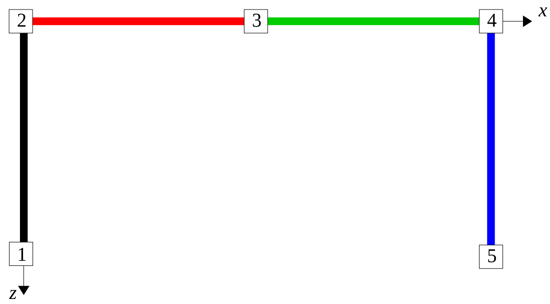
$$\boldsymbol{K}_{12}^{lok} = \boldsymbol{K}_{23}^{lok} = \boldsymbol{K}_{34}^{lok} = \boldsymbol{K}_{45}^{lok}$$

és

$$\boldsymbol{M}_{12}^{lok} = \boldsymbol{M}_{23}^{lok} = \boldsymbol{M}_{34}^{lok} = \boldsymbol{M}_{45}^{lok}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{lok} = \begin{bmatrix} 3000 & 0 & 0 & -3000 & 0 & 0 \\ 0 & 37{,}5 & -75 & 0 & -37{,}5 & -75 \\ 0 & -75 & 200 & 0 & 75 & 100 \\ -3000 & 0 & 0 & 3000 & 0 & 0 \\ 0 & -37{,}5 & 75 & 0 & 37{,}5 & 75 \\ 0 & -75 & 100 & 0 & 75 & 200 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_{ij}^{lok} = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 533 & 0 & 0 & 267 & 0 & 0 \\ 0 & 594 & -335 & 0 & 206 & 198 \\ 0 & -335 & 244 & 0 & -198 & 183 \\ 267 & 0 & 0 & 533 & 0 & 0 \\ 0 & 206 & -198 & 0 & 594 & 335 \\ 0 & 198 & 183 & 0 & 335 & 244 \end{bmatrix}$$

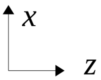
Példa – Keret rezgése, elemi mátrixok a globális krsz.-ben



A vízszintes elemek a globális krsz.-rel azonosan állnak

➔ nem szükséges transzformálni:

$$\boldsymbol{K}_{23}^{gl}=\boldsymbol{K}_{34}^{gl}=\boldsymbol{K}_{ij}^{lok} \text{ és } \boldsymbol{M}_{23}^{gl}=\boldsymbol{M}_{34}^{gl}=\boldsymbol{M}_{ij}^{lok}$$



A függőleges elemek álljanak azonos módon:

1-2 és 5-4 elem lesz, de a lokális krsz. azonosan áll

➔ csak egy transzformáció kell

viszont az utolsó elemnél $i=5$ és $j=4$!

A transzformáció eredménye:

$$\boldsymbol{K}_{12}^{gl}=\begin{bmatrix} 37,5 & 0 & -75 & -37,5 & 0 & -75 \\ 0 & 3000 & 0 & 0 & -3000 & 0 \\ -75 & 0 & 200 & 75 & 0 & 100 \\ -37,5 & 0 & 75 & 37,5 & 0 & 75 \\ 0 & -3000 & 0 & 0 & 3000 & 0 \\ -75 & 0 & 100 & 75 & 0 & 200 \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{M}_{12}^{gl}=10^{-3}\cdot\begin{bmatrix} 594 & 0 & -335 & 206 & 0 & 198 \\ 0 & 533 & 0 & 0 & 267 & 0 \\ -335 & 0 & 244 & -198 & 0 & 183 \\ 206 & 0 & -198 & 594 & 0 & 335 \\ 0 & 267 & 0 & 0 & 533 & 0 \\ 198 & 0 & 183 & 335 & 0 & 244 \end{bmatrix}$$

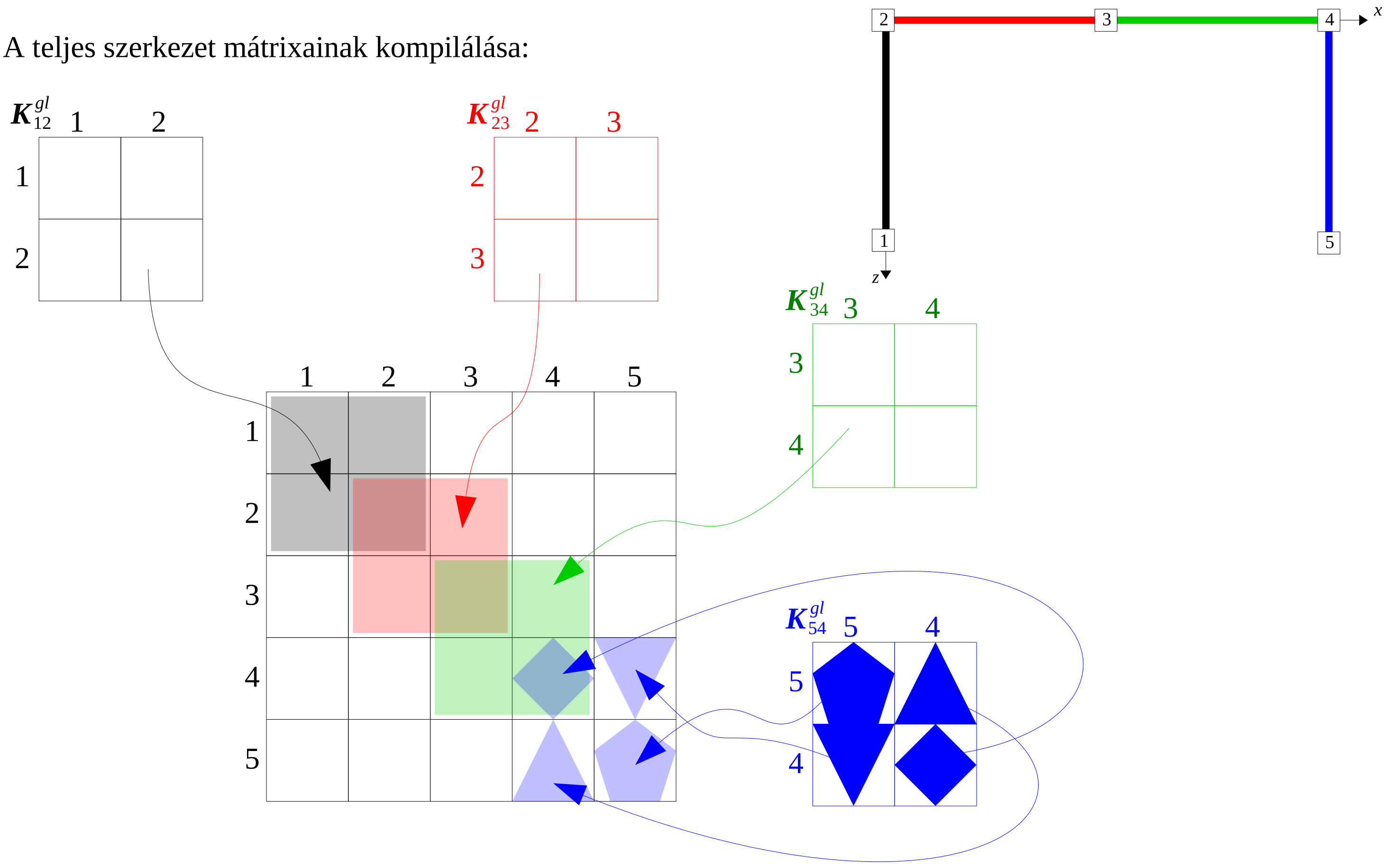
Lépésenként:

¤ fel kellett cserélni az x és z irányú elmozdulásokat és
azaz az 1. és 2. sort, a 4. és 5. sort, az 1. és 2. oszlopot végül a 4. és 5. oszlopot

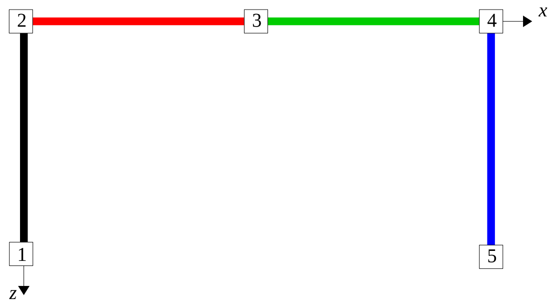
¤ az így kapott z irány a globálissal ellenkező irányú:
-1-gyel szorozni kell a 2. és 5. sort, majd a 2. és 5. oszlopot

Példa – Keret rezgése, kompilálás

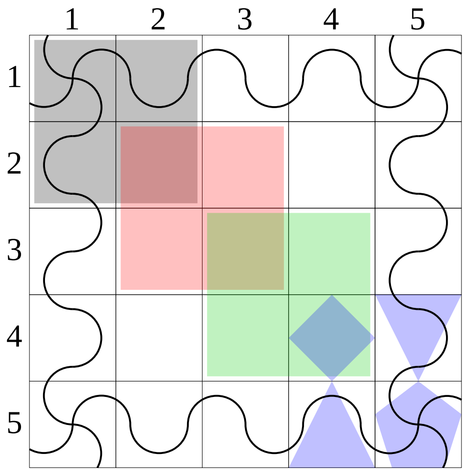
A teljes szerkezet mátrixainak kompilálása:

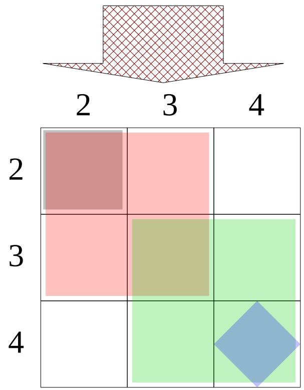


Példa – Keret rezgése, peremfeltételek, sajátértékfeladat



Peremfeltételek, például befogott-befogott oszloptalpak:





A 2 és 4 csomópont között nincs elem → a 2,4 és a 4,2 blokkok üresen maradtak.

A maradék mátrixokból: $\mathbf{\Omega}_n = \langle 3{,}22 \quad 5{,}77 \quad 26{,}77 \quad 29{,}55 \quad \ldots \rangle$

$$\boldsymbol{V}_n = \begin{bmatrix} -0.9973 & -0.0046 & -0.0273 & 0.1051 & \ldots \\ 0.0022 & -0.0103 & 0.0770 & 0.2001 & \ldots \\ 0.2062 & 0.2116 & 0.2741 & -1.0000 & \ldots \\ -1.0000 & -0.0001 & -0.0333 & 0.1341 & \ldots \\ 0.0000 & -1.0000 & 0.0000 & -0.0001 & \ldots \\ -0.1016 & 0.0000 & 1.0000 & 0.7788 & \ldots \\ -0.9973 & 0.0045 & -0.0273 & 0.1051 & \ldots \\ -0.0023 & -0.0103 & -0.0771 & -0.2002 & \ldots \\ 0.2062 & -0.2117 & 0.2741 & -1.0000 & \ldots \end{bmatrix}$$

HF: hogy néznek ki ezek az alakok?