Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Mit tanultunk eddig?

Keretszerkezetek merevségi és tömegmátrixai

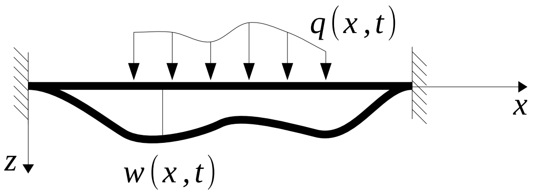
Mit fogunk tanulni ma?

Folytonos rúd rezgése

hajlítórezgés differenciálegyenlete

hajlítórezgés: szabadrezgés, rezgésalakok

Folytonos rúd hajlítórezgése – differenciálegyenlet I.

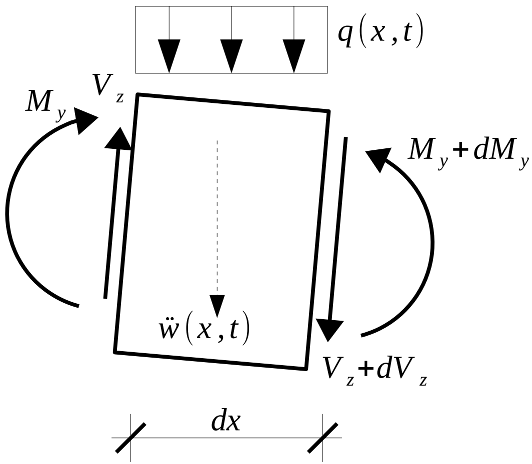


Adott:
EI : hajlítómerevség
μ: fajlagos tömeg
L: hossz
$q(x,t)$: teher

Keressük:
$w(x,t)$: elmozdulásfüggvény

Feltételezéseink:
¤ Kis elmozdulások elve
¤ Euler-Bernoulli gerenda
¤ A keresztmetszet elfordulási tehetetlenségét elhanyagoljuk

Egy elemi (dx) hosszúságú darab elkülönítése:



Newton második törvénye:

$$-V_z + \left(V_z + dV_z\right) + q(x,t)\cdot dx = \mu\, dx \cdot \ddot{w}(x,t)$$

$$+dV_z \;\; + q(x,t)\cdot dx = \mu\, dx \cdot \ddot{w}(x,t)$$

$$\frac{dV_z}{dx} + q(x,t) = \mu\, \ddot{w}(x,t)$$

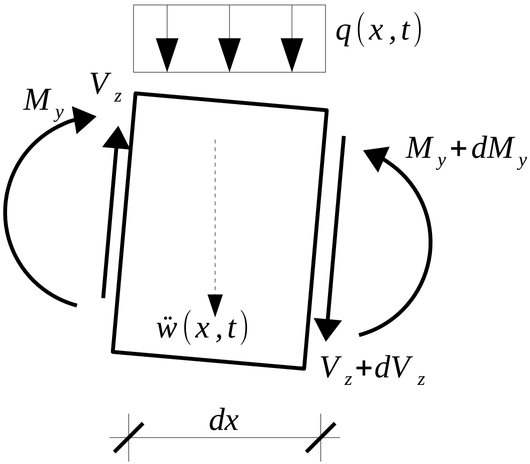
$$V_z'(x,t) + q(x,t) = \mu\, \ddot{w}(x,t)$$

A nyíróerők és hajlítónyomatékok is hely- és időfüggők, a teljes jelölésük: $V_z(x,t), M_y(x,t)$, illetve $V_z(x+dx,t), M_y(x+dx,t)$

Folytonos rúd hajlítórezgése – differenciálegyenlet II.

Feltételezéseink:
¤ A keresztmetszet elfordulási tehetetlenségét elhanyagoljuk

Egy elemi (dx) hosszúságú darab elkülönítése:



A perdülettételből nyomatéki egyensúlyi egyenlet lesz:

$$-M_y - V_z dx + (M_y + dM_y) + q(x,t)\cdot dx \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

$$-V_z dx \qquad + dM_y \qquad = 0$$

$$\rightarrow \quad V_z = \frac{dM_y}{dx}$$

$$\frac{dV_z}{dx} + q(x,t) = \mu \ddot{w}(x,t) \qquad \frac{d^2 M_y}{dx} + q(x,t) = \mu \ddot{w}(x,t)$$

$$M_y''(x,t) + q(x,t) = \mu \ddot{w}(x,t)$$

Anyagegyenlet:
$M_y(x,t) = EI_y \cdot \kappa_y(x,t)$
Geom. egyenlet:
$\kappa_y(x,t) = -w''(x,t)$

$$\left.\begin{aligned} &M_y(x,t) = EI_y \cdot \kappa_y(x,t) \\ &\kappa_y(x,t) = -w''(x,t) \end{aligned}\right\} M_y(x,t) = -EI_y \cdot w''(x,t)$$

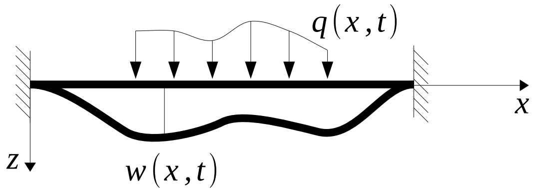
$$-EI\, w''''(x,t) + q(x,t) = \mu \ddot{w}(x,t)$$

$$\boxed{EI\, w''''(x,t) + \mu \ddot{w}(x,t) = q(x,t)}$$

parciális differenciálegyenlet (van benne x és t szerinti derivált is)

Folytonos rúd hajlítórezgése – differenciálegyenlet III.

$$\boxed{EI\,w''''(x,t)+\mu\,\ddot{w}(x,t)=q(x,t)}$$



parciális differenciálegyenlet (van benne x és t szerinti derivált is)

A megoldás itt is két részből áll:

1. A homogén differenciálegyenlet: $EI\,w''''(x,t)+\mu\,\ddot{w}(x,t)=0$

A kontinuum *szabadrezgése*.
Megoldásaként kapjuk a sajátkörfrekvenciákat, sajátrezgésalakokat.
A $w(x,t)$ végtelen sok pont elmozdulását adja meg
→ végtelen szabadsági fok
→ végtelen számú sajátkörfrekvencia, sajátrezgésalakok

2. Az inhomogén differenciálegyenlet: $EI\,w''''(x,t)+\mu\,\ddot{w}(x,t)=q(x,t)$

A kontinuum *gerjesztett rezgése*.
Partikuláris megoldás.
A teljes megoldást a végtelen sok sajátrezgésalakból képzett összeg hozzáadásával kapjuk. Ezek együtthatóit a végtelen sok kezdeti feltételből számíthatjuk.

Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Mit tanultunk eddig?

Keretszerkezetek merevségi és tömegmátrixai

Mit fogunk tanulni ma?

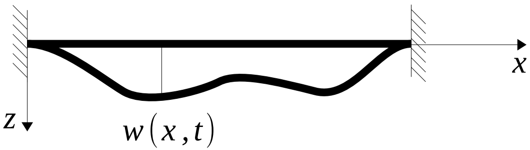
Folytonos rúd rezgése

hajlítórezgés differenciálegyenlete

hajlítórezgés: szabadrezgés, rezgésalakok

Folytonos rúd hajlítórezgése – szabadrezgés I.

$$EI\,w''''(x,t)+\mu\,\ddot{w}(x,t)=q(x,t)$$



szabadrezgés → nincs teher → $q(x,t)=0$

homogén diff.egy.: $EI\,w''''(x,t)+\mu\,\ddot{w}(x,t)=0$

Időben másodrendű → várhatóan harmonikus rezgés lesz
Keressük a megoldást
egy ismeretlen helyfüggő tag, és
egy harmonikus időfüggő tag szorzataként:

$$w(x,t)=\hat{w}(x)\cdot\cos(\omega_0 t)$$

Az időfüggő tag lehetne más harmonikus fv. is,
pl.: $\sin(\omega_0 t),\cos(\omega_0 t-\phi_0)$, stb.

A parciális deriváltak egyszerűek:

$$w''''(x,t)=\hat{w}''''(x)\cdot\cos(\omega_0 t)$$

$$\ddot{w}(x,t)=\hat{w}(x)\cdot(-\omega_0^2)\cdot\cos(\omega_0 t)$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$EI\,\hat{w}''''(x)\cdot\cos(\omega_0 t)+\mu\,\hat{w}(x)\cdot(-\omega_0^2)\cdot\cos(\omega_0 t)=0 \qquad /:\cos(\omega_0 t)$$

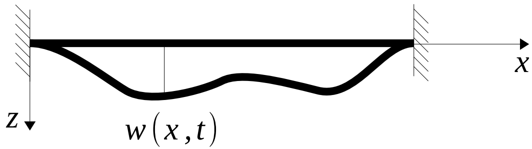
$$EI\,\hat{w}''''(x)-\mu\,\omega_0^2\,\hat{w}(x)=0$$

A homogén parciális DE-ből
homogén közönséges DE lett.

Ha ez valakit emlékeztet az
$m\ddot{x}(t)+k\,x(t)=0$-ra:
hasonló, de
¤ negyedrendű és
¤ kivonás van az összeadás helyett

Folytonos rúd hajlítórezgése – szabadrezgés II.

$$EI\,\hat{w}''''(x)-\mu\omega_0^2\hat{w}(x)=0$$



Az alakfüggvény differenciálegyenletének *általános* megoldása:

$$\hat{w}(x)=A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)+C\sinh(\lambda x)+D\cosh(\lambda x)$$

A harmonikus tagokon belül a λ (frekvenciaparaméter) a hosszmenti oda-vissza változás gyakoriságával függ össze.

Ennek első, második, harmadik, negyedik deriváltjai:

$$\hat{w}'(x)=\lambda^1\cdot(+A\cos(\lambda x)-B\sin(\lambda x)+C\cosh(\lambda x)+D\sinh(\lambda x))$$

$$\hat{w}''(x)=\lambda^2\cdot(-A\sin(\lambda x)-B\cos(\lambda x)+C\sinh(\lambda x)+D\cosh(\lambda x))$$

$$\hat{w}'''(x)=\lambda^3\cdot(-A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)+C\cosh(\lambda x)+D\sinh(\lambda x))$$

$$\hat{w}''''(x)=\lambda^4\cdot(+A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)+C\sinh(\lambda x)+D\cosh(\lambda x))=\lambda^4\cdot\hat{w}(x)$$

Ha $\hat{w}(x)$ egy megoldás, akkor annak bármely skalárszorosa is az, mint a sajátvektoroknál. A négy paraméter (A,B,C,D) egymáshoz viszonyított aránya számít. (Ez is egyértelműsíthető: függvény normája.)

Visszahelyettesítve:

$$EI\cdot\lambda^4\cdot\hat{w}(x)-\mu\,\omega_0^2\hat{w}(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{EI}{\mu}\cdot\lambda^4=\omega_0^2 \;\rightarrow\; \omega_0=\lambda^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nagyobb } \lambda\\ \text{(sűrűbben változó alak)}\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Nagyobb sajátkörfrekvencia}\\ \text{(gyorsabban változó rezgés)}\\ \text{rövidebb periódusidő}\end{array}\right.$$

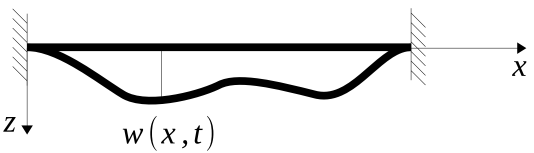
Mennyi A,B,C,D,λ,ω_0?

Attól függ.

Folytonos rúd hajlítórezgése – szabadrezgés peremfeltételek I.

$$\omega_0=\lambda^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Befogott-befogott gerenda:



Eltolódások és elfordulások
a gerenda végeinél előírtak:

$$w(0,t)=w(L,t)=0$$
$$w'(0,t)=w'(L,t)=0$$

Mivel $w(x,t)=\hat{w}(x)\cos(\omega_0 t)$,
és a peremfeltételeknek
minden t-re teljesülniük kell:

$$\hat{w}(0)=\hat{w}(L)=0$$
$$\hat{w}'(0)=\hat{w}'(L)=0$$

A feltételezett alakot behelyettesítve:

$$\hat{w}\ (0)=\quad +A\sin(\lambda 0)+B\cos(\lambda 0)+C\sinh(\lambda 0)+D\cosh(\lambda 0)\ =0$$
$$\hat{w}'(0)=\lambda\cdot(+A\cos(\lambda 0)-B\sin(\lambda 0)+C\cosh(\lambda 0)+D\sinh(\lambda 0))=0$$
$$\hat{w}\ (L)=\quad +A\sin(\lambda L)+B\cos(\lambda L)+C\sinh(\lambda L)+D\cosh(\lambda L)\ =0$$
$$\hat{w}'(L)=\lambda\cdot(+A\cos(\lambda L)-B\sin(\lambda L)+C\cosh(\lambda L)+D\sinh(\lambda L))=0$$

$$\sin(0)=\sinh(0)=0$$
és
$$\cos(0)=\cosh(0)=1$$

Mátrix-alakban:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) & \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) \\ \lambda\cos(\lambda L) & -\lambda\sin(\lambda L) & \lambda\cosh(\lambda L) & \lambda\sinh(\lambda L) \end{bmatrix}}_{\text{Frekvenciamátrix}} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az általános megoldás paramétereinek arányait
a peremfeltételek függvényében meghatározó
egyenletrendszer együtthatómátixa

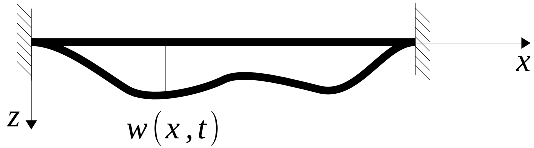
Homogén, lineáris egyenletrendszer
4 egyenlet, 5 ismeretlen

Nemtriviális megoldás létének
feltétele, hogy az együtthatómátrix
¤ szinguláris
¤ sorai lineárisan összefüggők
¤ determinánsa zérus

Folytonos rúd hajlítórezgése – szabadrezgés peremfeltételek II.

$$\omega_0=\lambda^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Befogott-befogott gerenda:



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) & \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) \\ \lambda\cos(\lambda L) & -\lambda\sin(\lambda L) & \lambda\cosh(\lambda L) & \lambda\sinh(\lambda L) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A determináns kifejtve:

$$\det(\boldsymbol{F})=2\cdot\lambda^2\cdot(1-\cos(\lambda L)\cdot\cosh(\lambda L))=0$$

Ennek első megoldásai:

i	0	1	2	3	4	5	…
λ_i	0 $(triv.)$	$\frac{4{,}73}{L}$	$\frac{7{,}86}{L}$	$\frac{10{,}98}{L}$	$\frac{14{,}15}{L}$	$\frac{17{,}29}{L}$	…

← végtelen sok, ahogy vártuk

A számlálók rendre $(2i+1)\pi$ közelében vannak. (Egy nagyobb, egy kisebb.)

A kapcsolódó sajátkörfrekvenciák, periódusidők:

i	1	2	3	4	5	…
λ_i	$\frac{4{,}73}{L}$	$\frac{7{,}86}{L}$	$\frac{10{,}98}{L}$	$\frac{14{,}15}{L}$	$\frac{17{,}29}{L}$	…
ω_{0i}	$22{,}4\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$61{,}8\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$120{,}6\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$200{,}2\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$298{,}9\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	…
T_{0i}	$0{,}0447\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0162\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0083\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0050\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0033\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	…

Folytonos rúd hajlítórezgése – szabadrezgés körfrekvenciái

$$\omega_0 = \lambda^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

A múlt órai példánk numerikus eredményei a hajlítórezgésekre:

$$EI = 100\,\mathrm{kNm}^2 \quad L = 4{,}8\,\mathrm{m} \quad \mu = 400\,\mathrm{kg/m}$$

$$N=2 \quad \mathbf{\Omega} = \langle\ 15{,}603 \quad 56{,}256\ \rangle$$
$$N=3 \quad \mathbf{\Omega} = \langle\ 15{,}545 \quad 42{,}859 \quad 130{,}247 \quad 151{,}737\ \rangle$$
$$N=4 \quad \mathbf{\Omega} = \langle\ 15{,}374 \quad 43{,}381 \quad 84{,}743 \quad 218{,}388 \quad 265{,}156 \quad 308{,}835\ \rangle$$
$$N=5 \quad \mathbf{\Omega} = \langle\ 15{,}330 \quad 42{,}658 \quad 86{,}229 \quad 140{,}911 \quad 339{,}550 \quad 375{,}270 \quad 463{,}823 \quad 520{,}455\ \rangle$$
$$N=6 \quad \mathbf{\Omega} = \langle\ 15{,}321 \quad 42{,}329 \quad 84{,}592 \quad 144{,}102 \quad 211{,}406 \quad 482{,}082 \quad 528{,}409 \quad 596{,}410 \quad 727{,}317 \quad 777{,}986\ \rangle$$

A folytonos rúd alapján számítható sajátkörfrekvenciák:

$$N=\infty \quad \mathbf{\Omega} = \langle\ 15{,}37 \quad 42{,}41 \quad 82{,}76 \quad 137{,}4 \quad 205{,}1 \quad \sim 286 \quad \dots\ \rangle$$

A kapcsolódó sajátkörfrekvenciák, periódusidők:

i	1	2	3	4	5	…
λ_i	$\frac{4{,}73}{L}$	$\frac{7{,}86}{L}$	$\frac{10{,}98}{L}$	$\frac{14{,}15}{L}$	$\frac{17{,}29}{L}$	$\dots \sim \frac{(2i+1)\pi}{2L}$
ω_{0i}	$22{,}4\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$61{,}8\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$120{,}6\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$200{,}2\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$298{,}9\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	…
T_{0i}	$0{,}0447\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0162\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0083\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0050\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0033\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	…

Folytonos rúd hajlítórezgése – szabadrezgés rezgésalakok

Az i-edik alakhoz tartozó λ_i ismeretében A_i, B_i, C_i, D_i aránya számítható.

Normálni az

$$\int_0^L \hat{w}_i(x)\hat{w}_i(x)\,dx = 1$$

vagy

$$\int_0^L \mu\,\hat{w}_i(x)\hat{w}_i(x)\,dx = 1$$

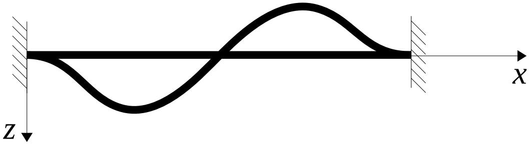
feltétellel lehet.

Sajátalakok ortogonalitása:
ha $i \neq j$:

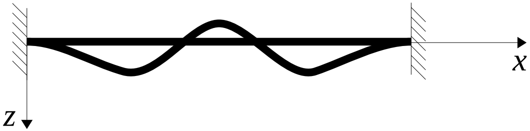
$$\int_0^L \hat{w}_i(x)\hat{w}_j(x)\,dx = 0$$

$\lambda_1, \omega_{0,1}, T_{0,1} \rightarrow \hat{w}_1(x)$

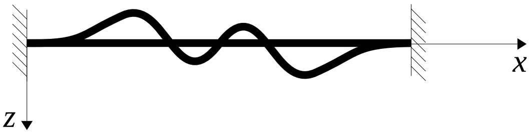
$\lambda_2, \omega_{0,2}, T_{0,2} \rightarrow \hat{w}_2(x)$



$\lambda_3, \omega_{0,3}, T_{0,3} \rightarrow \hat{w}_3(x)$



$\lambda_4, \omega_{0,4}, T_{0,4} \rightarrow \hat{w}_4(x)$



A szabadrezgés teljes megoldása a rezgésalakokkal:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{w}_i(x)\cdot\left(a_i \cos(\omega_{0,i} t) + b_i \sin(\omega_{0,i} t)\right)$$

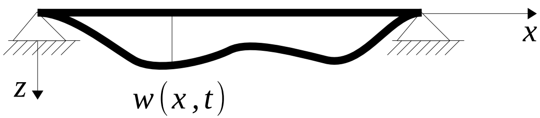
A λ frekvenciaparaméter a zérushelyek/inflexiók gyakoriságára utal.

Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Folytonos rúd hajlítórezgése – példa I.

Csuklós-csuklós gerenda:



Eltolódások és hajlítónyomatékok a gerenda végeinél előírtak:

$$w(0,t)=w(L,t)=0$$
$$M(0,t)=M(L,t)=0$$

Mivel $M(x,t)=-EI\,w''(x,t)$ és $w(x,t)=\hat{w}(x)\cos(\omega_0 t)$, és a peremfeltételeknek minden t-re teljesülniük kell:

$$\hat{w}(0)=\hat{w}(L)=0$$
$$\hat{w}''(0)=\hat{w}''(L)=0$$

A feltételezett alakot behelyettesítve:

$$\hat{w}(0)= +A\sin(\lambda 0)+B\cos(\lambda 0)+C\sinh(\lambda 0)+D\cosh(\lambda 0) =0$$
$$\hat{w}''(0)=\lambda^2\cdot(-A\sin(\lambda 0)-B\cos(\lambda 0)+C\sinh(\lambda 0)+D\cosh(\lambda 0))=0$$
$$\hat{w}(L)= +A\sin(\lambda L)+B\cos(\lambda L)+C\sinh(\lambda L)+D\cosh(\lambda L) =0$$
$$\hat{w}''(L)=\lambda^2\cdot(-A\sin(\lambda L)-B\cos(\lambda L)+C\sinh(\lambda L)+D\cosh(\lambda L))=0$$

$$\sin(0)=\sinh(0)=0$$
és
$$\cos(0)=\cosh(0)=1$$

Mátrix-alakban:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 & \lambda^2 \\ \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) & \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) \\ -\lambda^2\sin(\lambda L) & -\lambda^2\cos(\lambda L) & \lambda^2\sinh(\lambda L) & \lambda^2\cosh(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

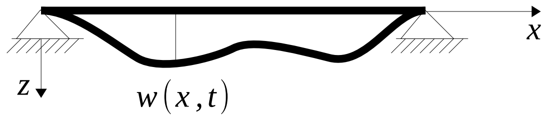
Homogén, lineáris egyenletrendszer
4 egyenlet, 5 ismeretlen

Nemtriviális megoldás létének feltétele, hogy az együtthatómátrix
- ¤ szinguláris
- ¤ sorai lineárisan összefüggők
- ¤ determinánsa zérus

A frekvenciamátrix determinánsa kifejtve:

$$\det(\boldsymbol{F})=4\lambda^3\sin(\lambda L)\sinh(\lambda L)=0$$

Folytonos rúd hajlítórezgése – példa II.



A frekvenciamátrix determinánsa kifejtve:

$$\det(\boldsymbol{F})=4\lambda^3\sin(\lambda L)\sinh(\lambda L)=0 \quad \rightarrow \sin(\lambda L)=0 \rightarrow \lambda_i L=i\cdot\pi \rightarrow \lambda_i=\frac{i\cdot\pi}{L}$$

Az i -edik alak egyenlete:

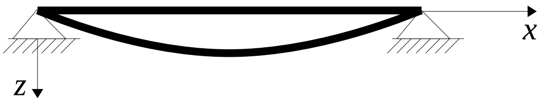
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \cos(i\pi) & \sinh(i\pi) & \cosh(i\pi) \\ 0 & -\cos(i\pi) & \sinh(i\pi) & \cosh(i\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Csak A_i különbözhet zérustól.

$\downarrow$

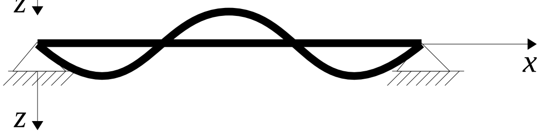
csak szinuszos alakok

$\hat{w}_1(x)$

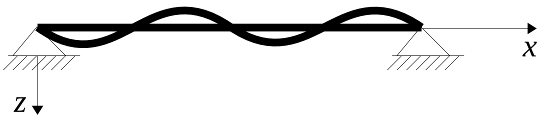


$\hat{w}_2(x)$

$\hat{w}_3(x)$



$\hat{w}_4(x)$



A sajátkörfrekvenciák i^2 szerint növekednek.

A peridóusidők $\frac{1}{i^2\pi^2}$ szerint változnak

$$\omega_{0,i}=i^2\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$$

$$T_{0,i}=\frac{1}{i^2\pi^2}\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$$

Folytonos rúd hajlítórezgése – példa III.

$$\omega_{0,i} = i^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$$

A csuklós-csuklós gerendát diszkretizáltuk többszabadságfokúként.
Az akkori sajátkörfrekvenciák:

$$1 \text{ sz.f. esetén: } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{96}\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} = 9{,}798\sqrt{\frac{EI}{m_{tot} l^3}}$$

$$2 \text{ sz.f. esetén: } \mathbf{\Omega} = \sqrt{\frac{EI}{m_{tot} l^3}} \begin{bmatrix} 9{,}859 & \\ & 38{,}184 \end{bmatrix}$$

$$3 \text{ sz.f. esetén: } \mathbf{\Omega} = \sqrt{\frac{EI}{m_{tot} l^3}} \begin{bmatrix} 9{,}867 & & \\ & 39{,}19 & \\ & & 83{,}21 \end{bmatrix}$$

$$\text{A folytonos gerenda rezgését számolva: } \mathbf{\Omega} = \sqrt{\frac{EI}{m_{tot} l^3}} \begin{bmatrix} 9{,}870 & & & & \\ & 39{,}48 & & & \\ & & 88{,}83 & & \\ & & & 157{,}9 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$