

Kiegyenlítő számítások: Sztochasztikus feldolgozás

Barsi Árpád



Folyamatosan változó mennyiségek feldolgozása

- Összetevők: trend + jel + zaj

- Matematikailag:

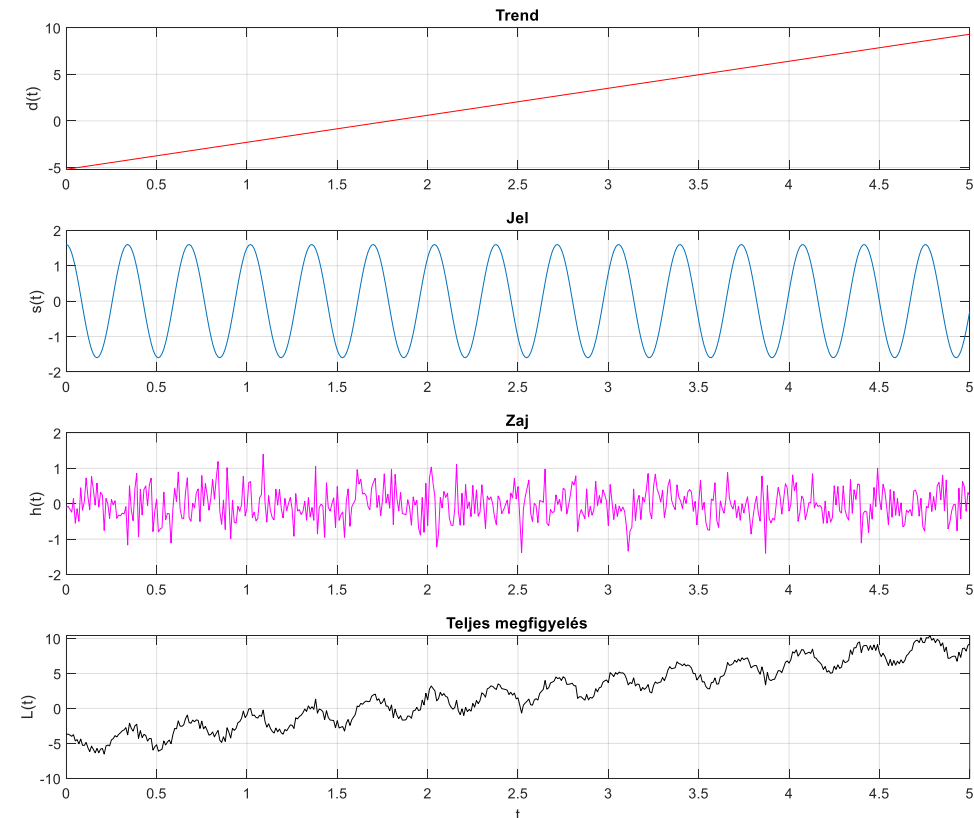
$$\xi(t) = \mathbf{d}(t) + \mathbf{s}(t) + \mathbf{h}(t)$$

- Determinisztikus és sztochasztikus összetevők

- Determinisztikus: trend
- Sztochasztikus: jel + zaj

- Kovarianciamátrixok:

$$\mathbf{C}_{\xi\xi} = \mathbf{C}_{ss} + \mathbf{C}_{hh}$$



Alapvető feldolgozási műveletek a legkisebb négyzetek módszere szerint

1. Trend meghatározása

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

- Kollokáció

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{s} + \mathbf{h} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{z}$$

$$\xi(t) = \mathbf{d}(t) + \mathbf{s}(t) + \mathbf{h}(t)$$

2. Interpoláció

- Alapfeltevés: Trend zérus, mérések hibátlanok

3. Szűrés

- Alapfeltevés: Trend zérus, mérések nem hibátlanok
- Egyik lehetőség: **konvolúció**

Kollokáció

- Alapösszefüggés:
$$\underset{(n,1)}{\mathbf{L}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{s}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{h}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{z}}$$

- Kovarianciák:
$$\underset{(n,n)}{\mathbf{C}}_{LL} = \underset{(n,n)}{\mathbf{C}}_{SS} + \underset{(n,n)}{\mathbf{C}}_{hh}$$

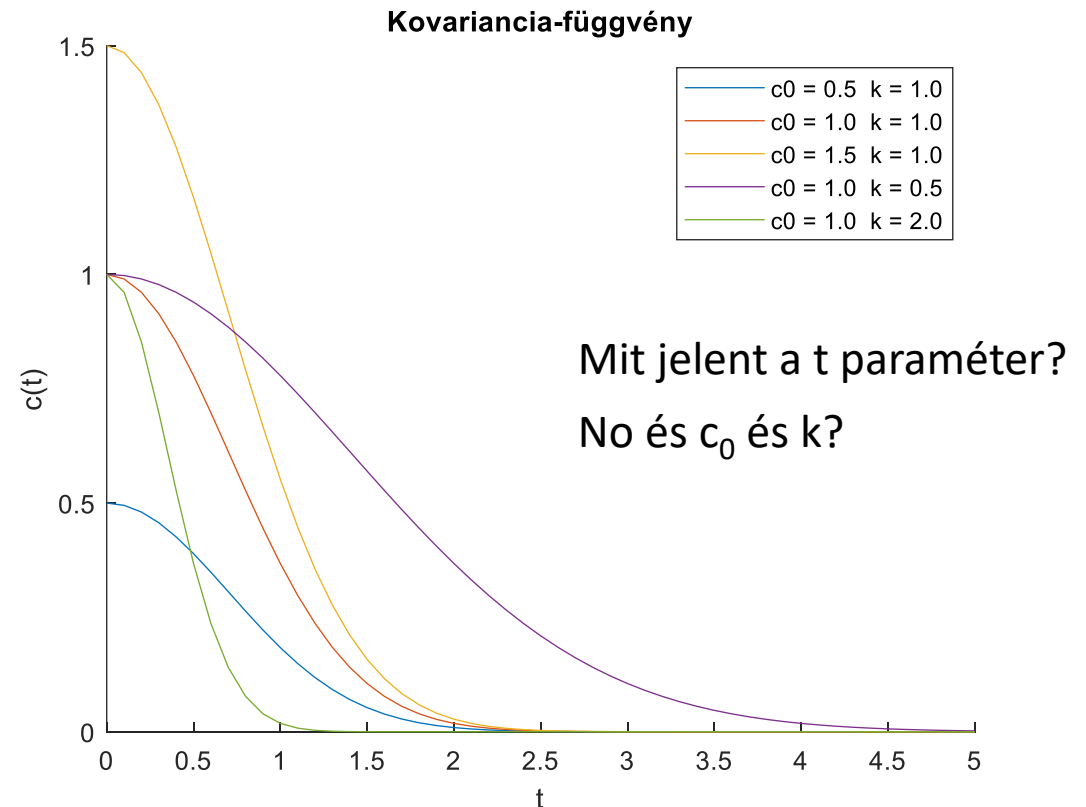
- amiben kovariancia-függvénnyel

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{C}}_{SS} \quad c(t) = c_0 \cdot e^{-k^2 t^2}$$

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{C}}_{hh}$$

- A paraméterek változása

$$\underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \left(\underset{(r,n)}{\mathbf{A}}^T \underset{(n,n)}{\mathbf{C}}_{LL}^{-1} \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \right)^{-1} \underset{(r,n)}{\mathbf{A}}^T \underset{(n,n)}{\mathbf{C}}_{LL}^{-1} \underset{(n,1)}{\mathbf{I}}$$



Kollokáció

Példa!

Mért pontokon

- A jel és a zaj együtt

$$\mathbf{z}_{(n,1)} = \mathbf{L}_{(n,1)} - \mathbf{A}_{(n,r)} \cdot \mathbf{x}_{(r,1)}$$

- A jel

$$\mathbf{s}_{(n,1)} = \mathbf{C}_{SS(n,n)} \mathbf{C}_{LL(n,n)}^{-1} \mathbf{z}_{(n,1)}$$

- Pontossági mérőszámok?

Nem mért pontokon

- Becsült jel

$$\hat{\mathbf{s}}_{(N,1)} = \mathbf{C}_{SL(N,n)} \mathbf{C}_{LL(n,n)}^{-1} \mathbf{z}_{(n,1)}$$

- amiben

$$\mathbf{C}_{SL(N,n)} \quad c(t) = c_0 \cdot e^{-k^2 t^2}$$

- Becsült leolvasás (függvényérték)

$$\hat{\mathbf{L}}_{(N,1)} = \mathbf{d}\left(\mathbf{t}_{(N,1)}\right) + \hat{\mathbf{s}}_{(N,1)}$$

Mit jelent a $\mathbf{d}(\mathbf{t})$ függvény?

A mai tudós

- Helmut Moritz (1933-2022)
- TU Graz → BEV → OSU → Uni Hannover → Wuhan Uni → TU Berlin → TU Graz
- ~ + Heiskanen és ~ + Hofmann-Wellenhof
- Fizikai geodézia, geodinamika, a Föld forgása
- Kollokáció (1972): Advanced Least Squares Method – OSU report



Interpoláció

- A kollokáció speciális esete:

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{s} + \mathbf{h} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{z}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \mathbf{h} = \mathbf{0}$$

- Így

$$\mathbf{L} = \mathbf{s} = \mathbf{z} \quad \mathbf{C}_{LL} = \mathbf{C}_{SS}$$

$$c(t) = c_0 \cdot e^{-k^2 t^2}$$

- Kovariancia-függvény itt is
- Pontossági mérőszámok?
- Nem mért pontokon

$$\hat{\mathbf{s}}_{(N,1)} = \mathbf{C}_{SL} \mathbf{C}_{SS}^{-1} \mathbf{L}_{(n,1)} \quad \mathbf{C}_{SL} \substack{(N,n) \\ (n,n)}$$

$$c(t) = c_0 \cdot e^{-k^2 t^2}$$

Példa!

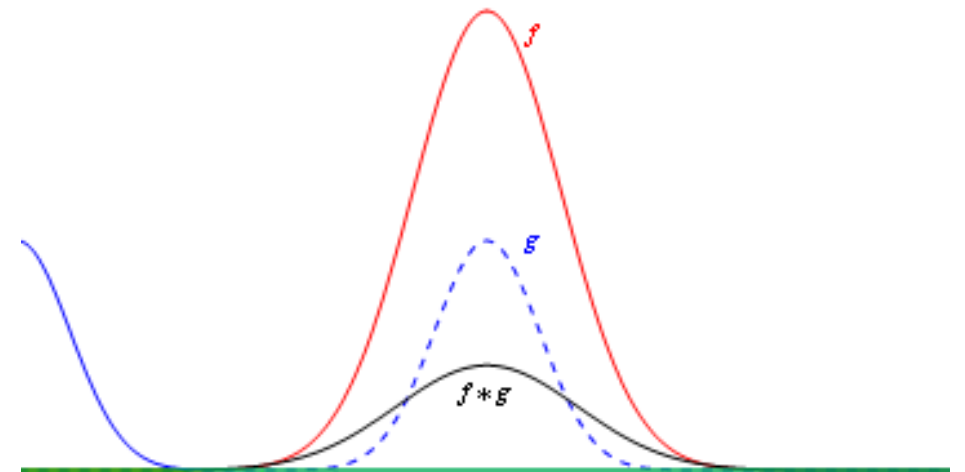
Konvolúció (általános megközelítés)

- A szorzás általánosítása

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (f * g)[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f[m] \cdot g[n - m]$$

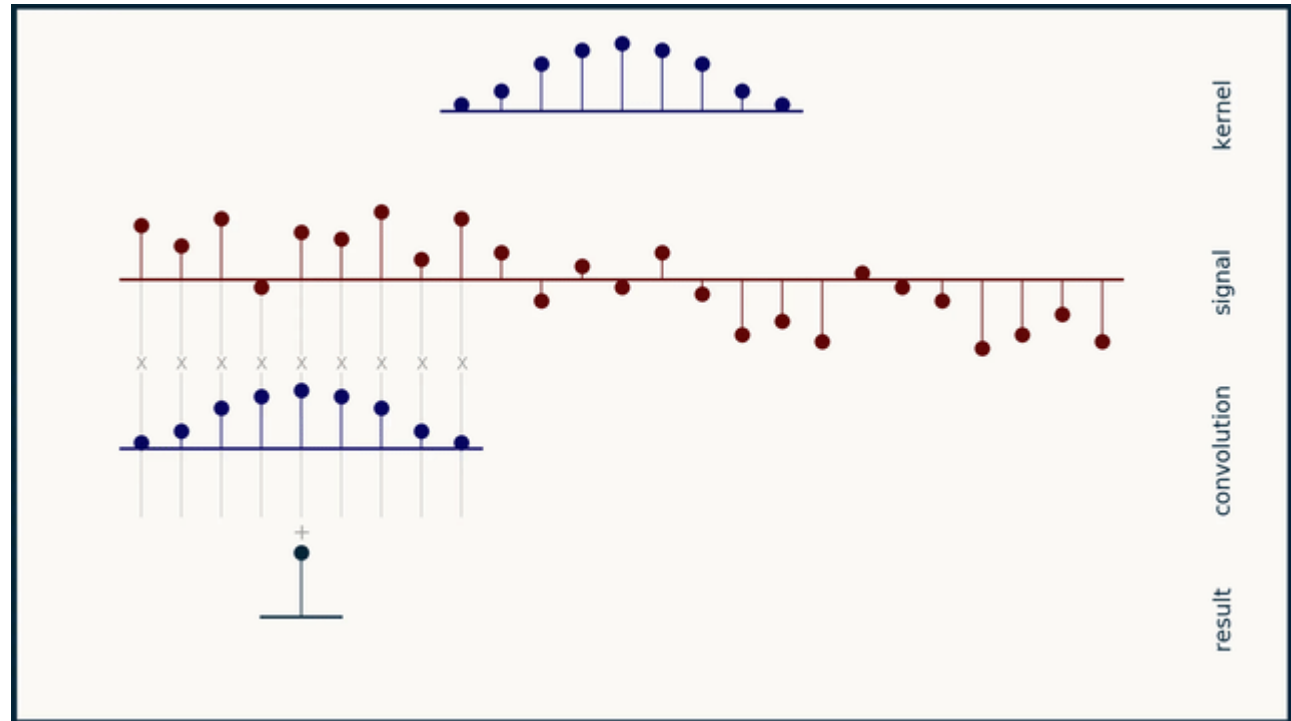
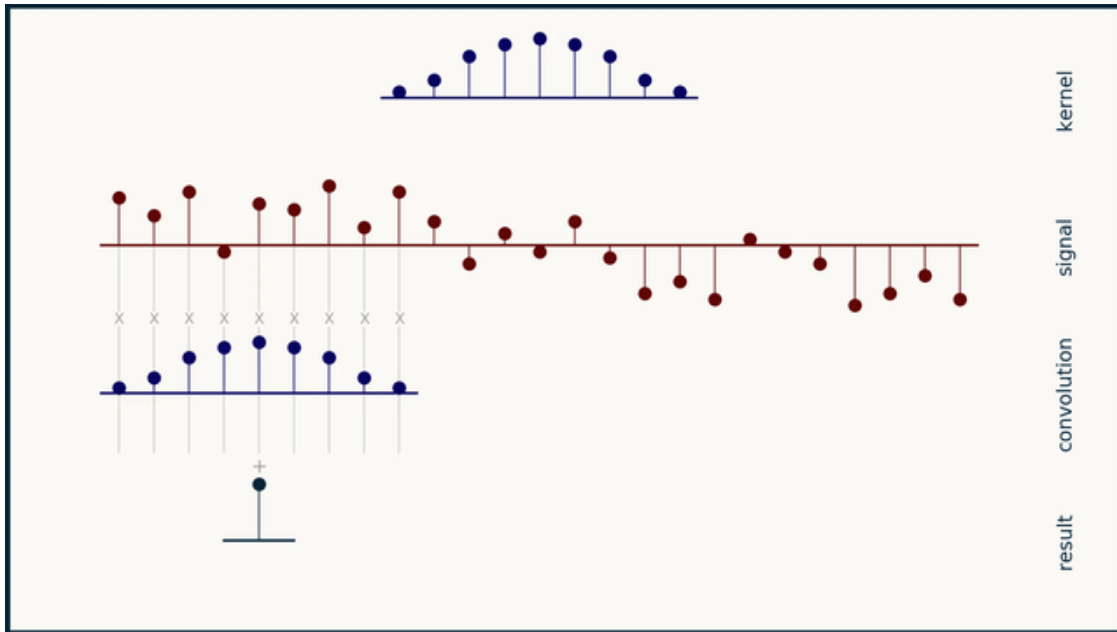
- Kernel és jelentése

- Amplitúdók, frekvenciák
és időbeli jelek közötti összefüggések



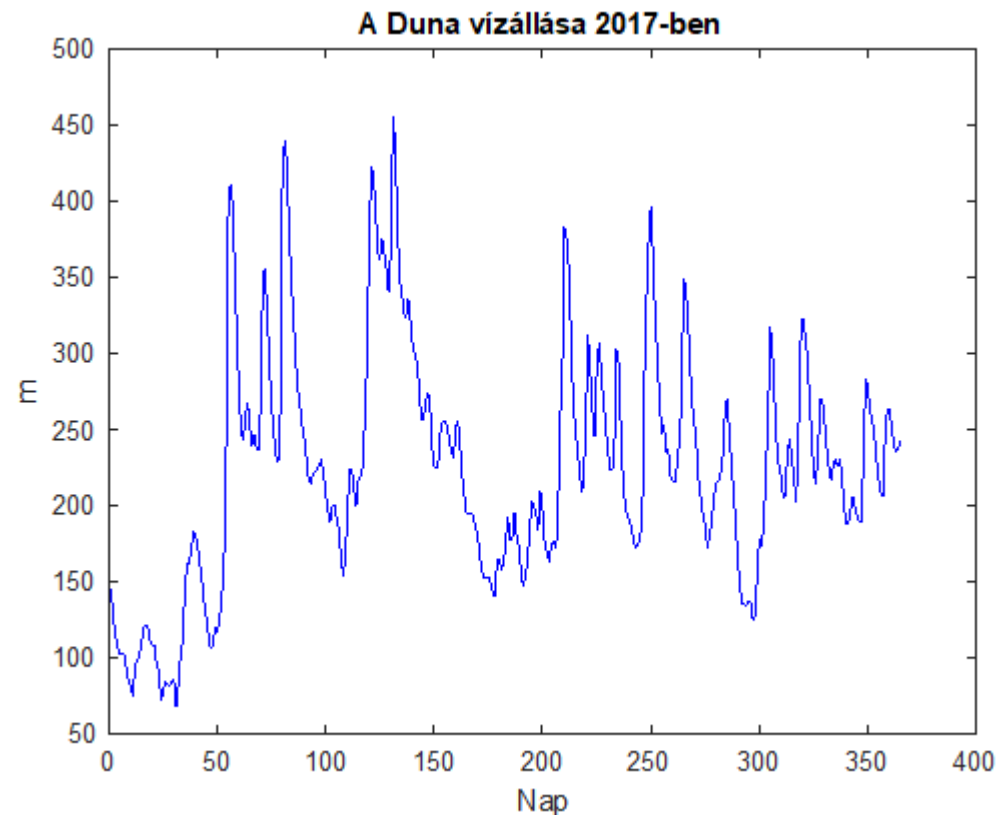
A konvolúció mögötti algoritmus (1D)

- Szorzás - léptetés



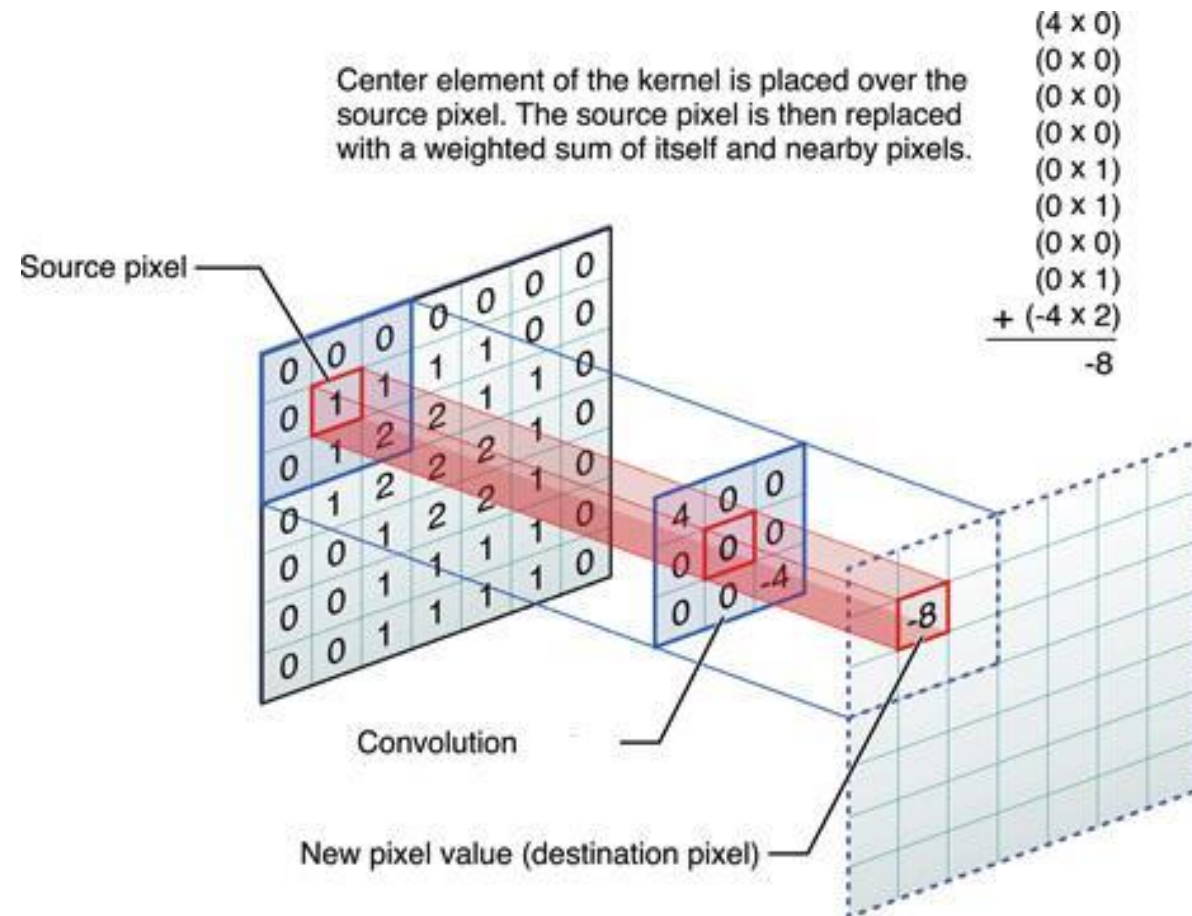
Nézzünk egy példát!

- Duna vízállása Budapestnél 2017-ben minden nap megfigyelésével



Általánosítás 2D-re (Érdekesség)

- Képfeldolgozás példa



Köszönöm a figyelmet!

