Kiegyenlítő számítások: Függvénymeghatározás

Barsi Árpád

Függvényillesztés

- Előre ismert alakú függvény meghatározása, pl. lineáris függvény

$$y = f(x) = a_1 \cdot x + a_0 \qquad \left(y = m \cdot x + b\right)$$

- Ebből a javítási egyenlet (mit tekintünk hibával terheltnek?)

$$v_{yi} = a_1 \cdot x_i + a_0 - L_{yi}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}$$

Függvényillesztés

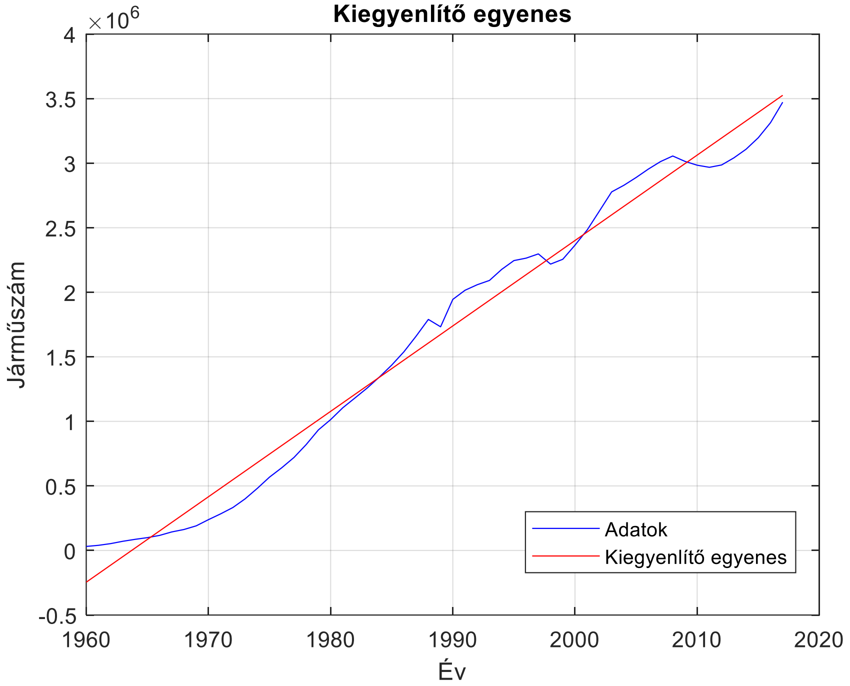
- Súlyozás?
- A meghatározás kiegyenlítéssel

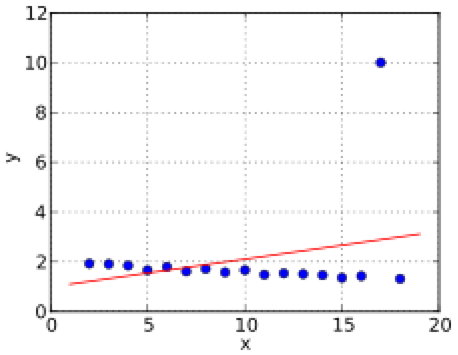
$$\underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \left(\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T} \cdot \underset{(n,r)}{\mathbf{A}}\right)^{-1} \left(\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T} \cdot \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}\right)$$

- Számítható továbbá

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \qquad m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{f}}$$

- Kiegyenlítő egyenes (másnéven?)
- Hibás (kiugró) érték hatása





Függvényillesztés általánosítása

- Előre ismert alakú függvény meghatározása

$$y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

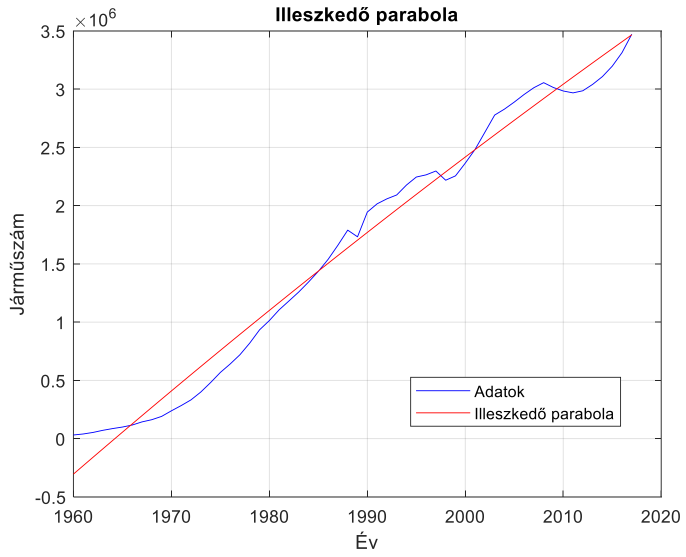
- Lineáris függvény?

- További általánosítás lehetséges

$$y = a \cdot x^b$$

- Ez a hatványfüggvény.
- Általánosan és még általánosabban

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$



Hatványfüggvény illesztése

Példa!

- Együttható-mátrix és tisztatag vektor (linearizálással)

$$y = a \cdot x^b \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(x)}{\partial a} = x^{b_0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f(x)}{\partial b} = a_0 \cdot x^{b_0} \cdot \ln(x)$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{l}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{y}} - a_0 \cdot \underset{(n,1)}{\mathbf{x}}^{b_0}$$

$$\underset{(n,2)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial f(x)}{\partial a}\right]_{0,x_1} & \left[\frac{\partial f(x)}{\partial b}\right]_{0,x_1} \\ \left[\frac{\partial f(x)}{\partial a}\right]_{0,x_2} & \left[\frac{\partial f(x)}{\partial b}\right]_{0,x_2} \\ \vdots & \vdots \\ \left[\frac{\partial f(x)}{\partial a}\right]_{0,x_n} & \left[\frac{\partial f(x)}{\partial b}\right]_{0,x_n} \end{bmatrix}$$

- Kezdeti értékek!
- Iteráció!

Koordináta-transzformáció a síkon

- A szakirodalom alapján pl. hasonlósági (Helmert) transzformáció

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = m \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix}$$

- Ez nem más, mint

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

- ahol az ismeretlen transzformációs paraméterek: m, α, ΔX, ΔY

A hasonlósági transzformáció

- Mátrix-egyenlet

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = m \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix}$$

- Kiírva, mint közvetítő egyenlet

$$X = m \cdot x \cdot \cos\alpha - m \cdot y \cdot \sin\alpha + \Delta X$$

$$Y = m \cdot x \cdot \sin\alpha + m \cdot y \cdot \cos\alpha + \Delta Y$$

- Nemlineáris függvények $\rightarrow$ kezdeti értékek, iteráció

A hasonlósági transzformáció

- Együttható-mátrix és tisztatag vektor (linearizálással)

$$\underset{(2n,4)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial X_1}{\partial \Delta X} & \frac{\partial X_1}{\partial \Delta Y} & \frac{\partial X_1}{\partial m} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y_1}{\partial \Delta X} & \frac{\partial Y_1}{\partial \Delta Y} & \frac{\partial Y_1}{\partial m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial \alpha} & \frac{\partial X_n}{\partial \Delta X} & \frac{\partial X_n}{\partial \Delta Y} & \frac{\partial X_n}{\partial m} \\ \frac{\partial Y_n}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y_n}{\partial \Delta X} & \frac{\partial Y_n}{\partial \Delta Y} & \frac{\partial Y_n}{\partial m} \end{bmatrix}_0 \qquad \underset{(2n,1)}{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} X_1 - X_{10} \\ Y_1 - Y_{10} \\ \vdots \\ X_n - X_{n0} \\ Y_n - Y_{n0} \end{bmatrix}$$

Az együtthatók

Példa!

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = -m \cdot x \cdot \sin\alpha - m \cdot y \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{\partial X}{\partial \Delta X} = 1$$

$$\frac{\partial X}{\partial \Delta Y} = 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial m} = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = m \cdot x \cdot \cos\alpha - m \cdot y \cdot \sin\alpha$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \Delta X} = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \Delta Y} = 1$$

$$\frac{\partial Y}{\partial m} = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$$

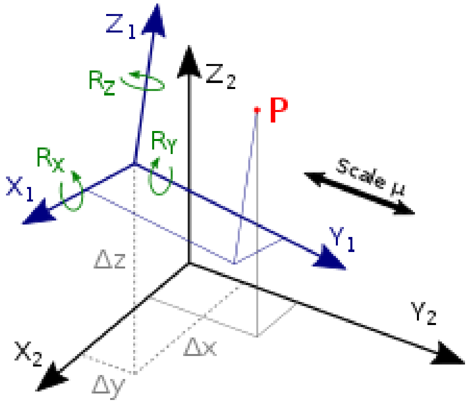
A koordináta-transzformáció a térben

- A síkbeli eset általánosítása
  - X, Y, Z és x, y, z koordináták a közös pontokra
  - Eltolás ΔX, ΔY, ΔZ értékkel
  - Forgatás mindhárom koordinátatengely körül α, β, χ (a fotogrammetriában pl. ω, φ, κ)
  - A forgatási sorrend számít!

$$\mathbf{X} = m \cdot \mathbf{R}_{\alpha} \cdot \mathbf{R}_{\beta} \cdot \mathbf{R}_{\chi} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{\Delta X}$$

A tudósportré

- Friedrich Robert Helmert (1843-1917)
- Legkisebb négyzetek módszere (1872) Gauss-szal közös könyv
- χ^2-eloszlás felfedezése (1876)
- A modern geodézia alapjai könyv (1. rész 1880, 2. rész 1884)
- Földalak-meghatározás, koordináta-transzformáció



Köszönöm a figyelmet!