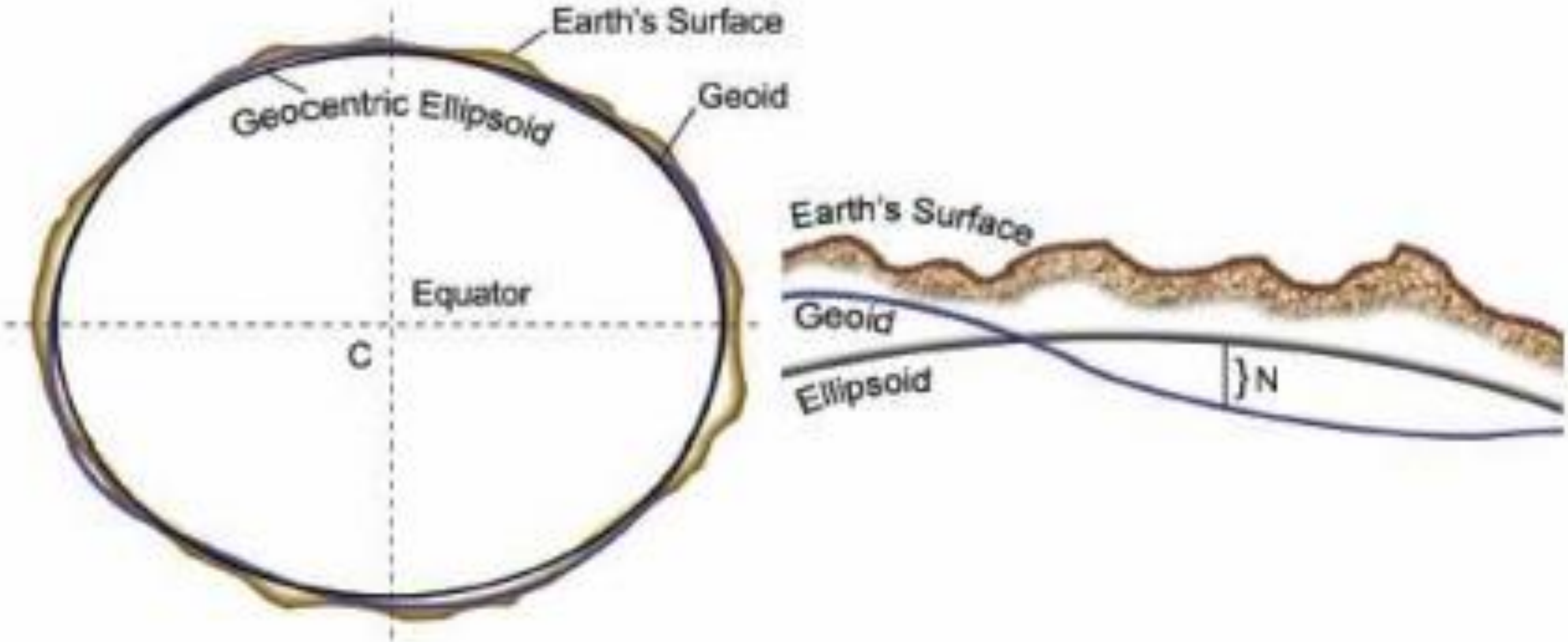
Az ellipszoid geometriája



Gyakorlat, 2022.02.25.
Földváry Lóránt

Kúpszeletek

Kúpszeletek abban az esetben, ha a metsző sík nem megy át a centrumon…

Ha $\alpha > \beta$, a metszet egy ellipszis

Speciális eset: ha $\alpha = 90°$, a metszet egy kör

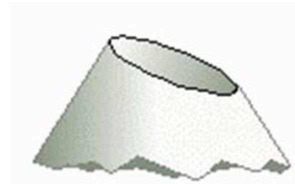
~ a metsző sík valamennyi alkotót elmetszi

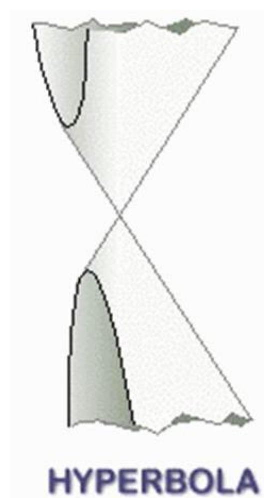
Ha $\alpha = \beta$, a metszet egy parabola

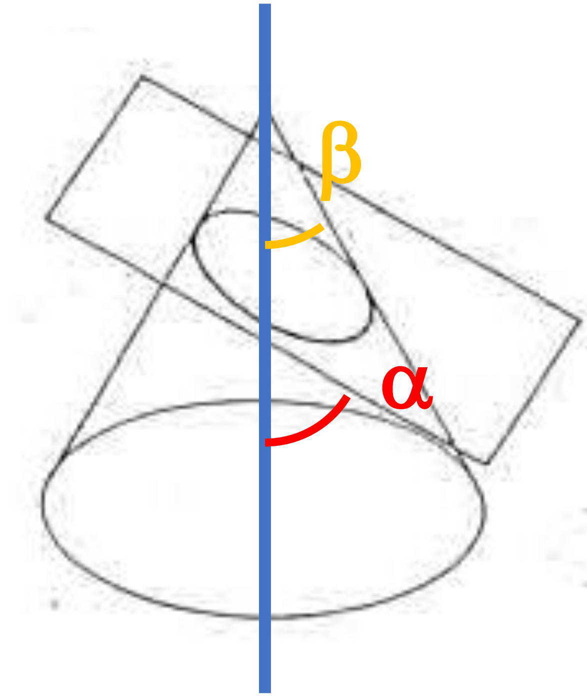
~ a metsző sík egy alkotó kivételével metszi az összeset

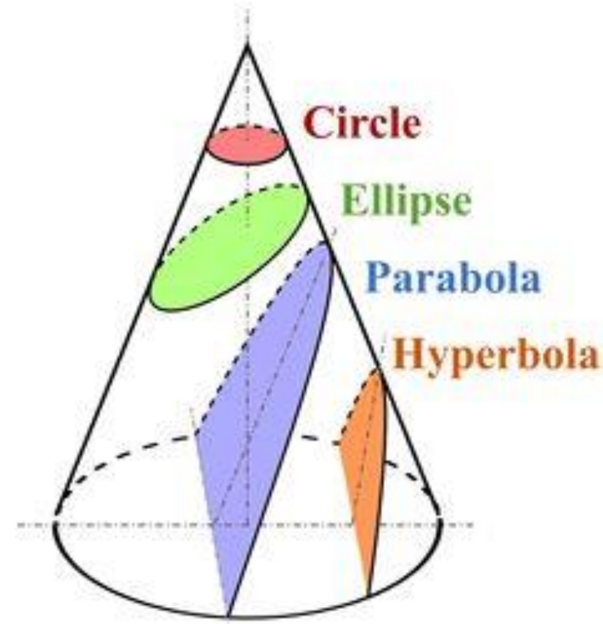
Ha $\alpha < \beta$, a metszet egy parabola

~ a metsző sík két alkotó kivételével metszi az összeset

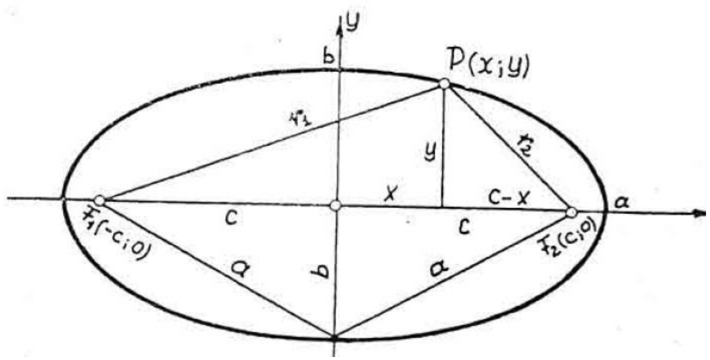


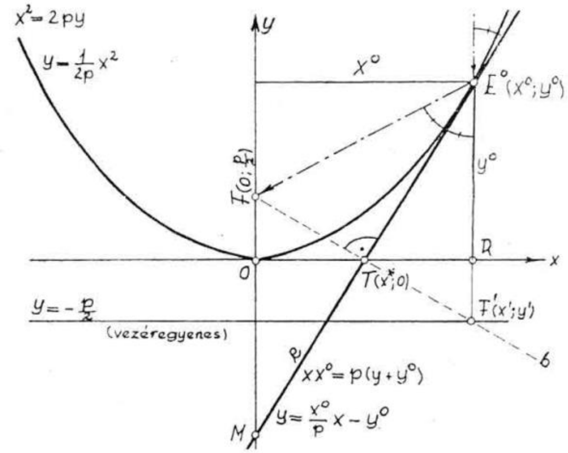


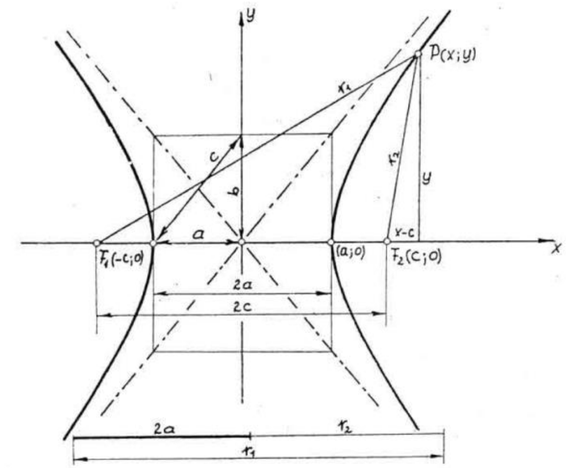




Kúpszeletek







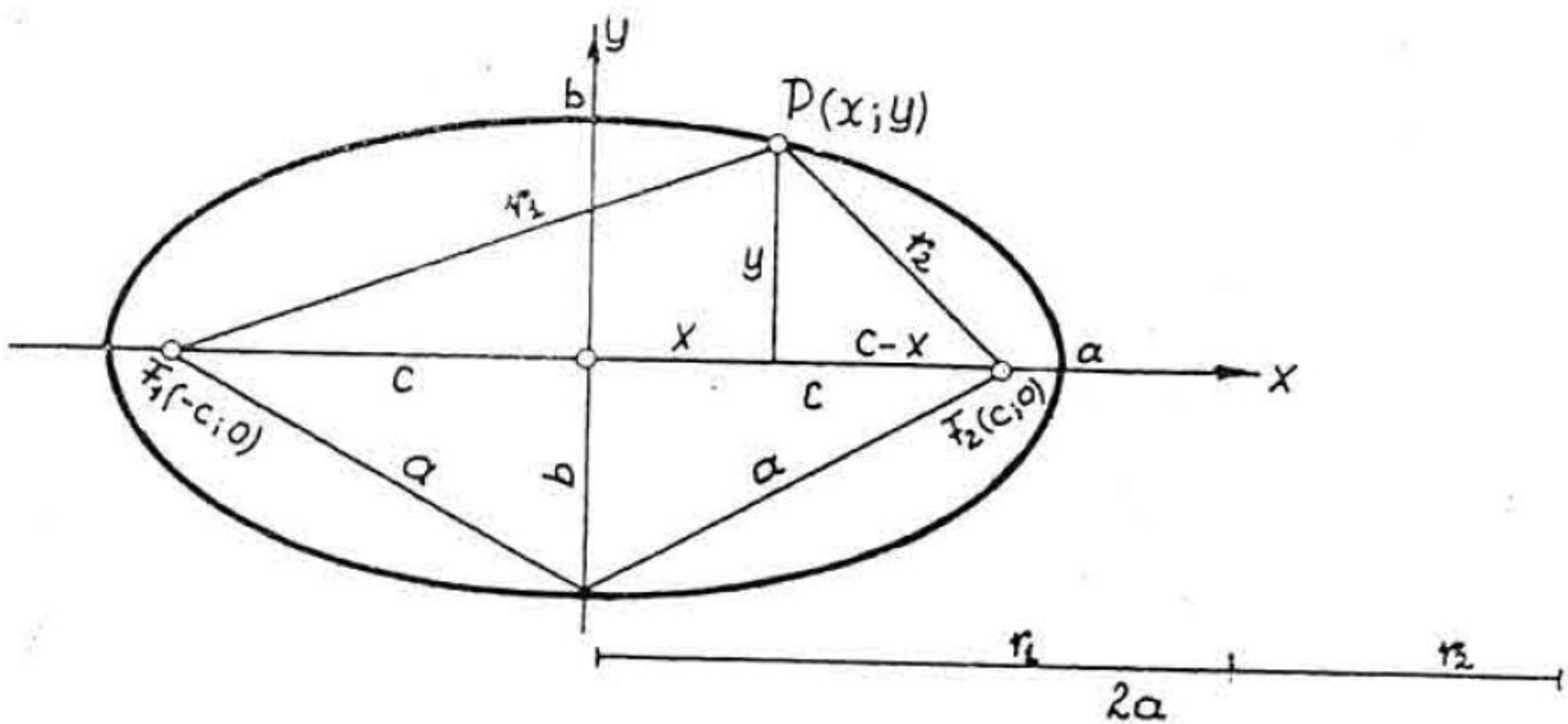
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

$$\boxed{x^2=2py}$$

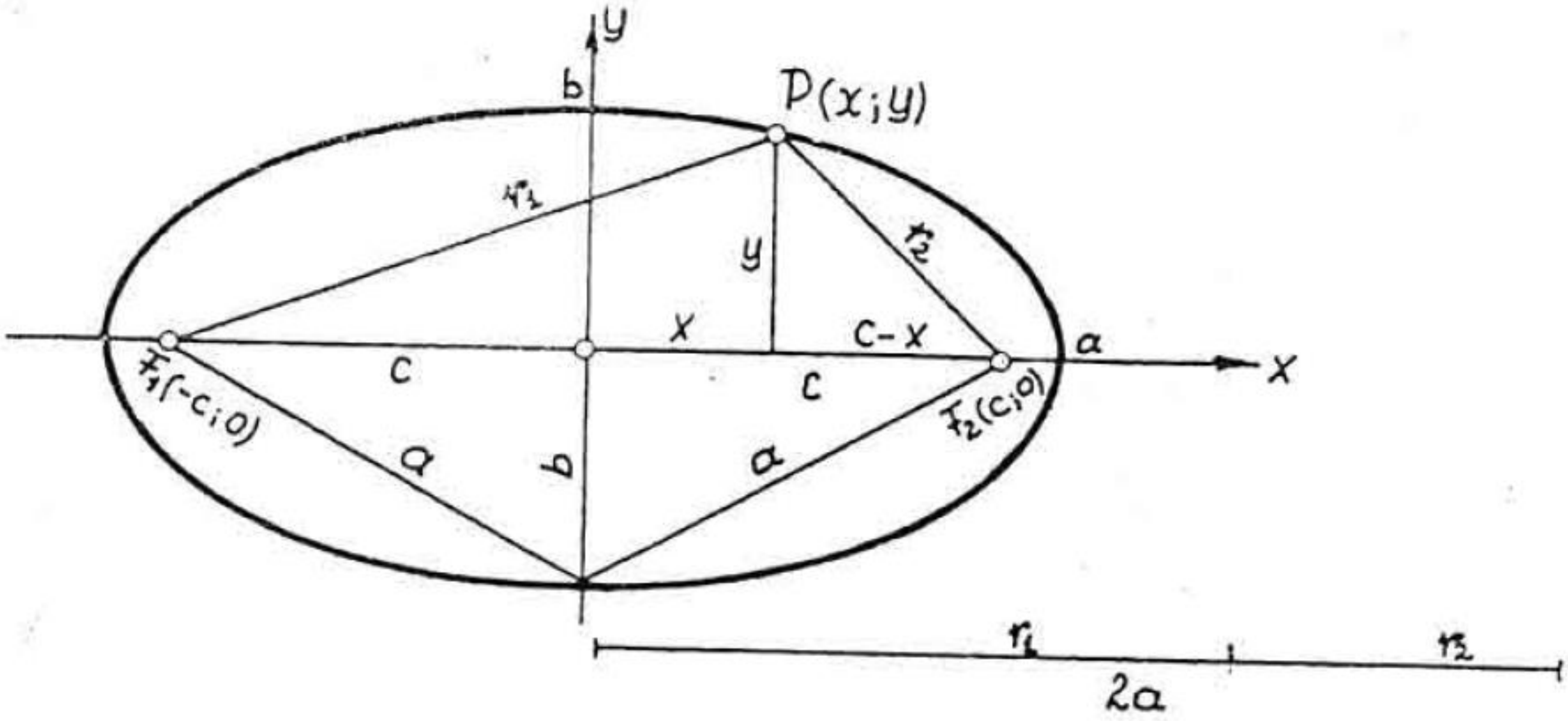
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Ellipszis

Az ellipszis a sík azon pontjainak mértani helye, amelyeknek két adott ponttól, (az F_1 és F_2 fókuszpontoktól) mért távolságösszegük egy adott állandó érték és ez az állandó érték nagyobb, mint a fókuszpontok távolsága.

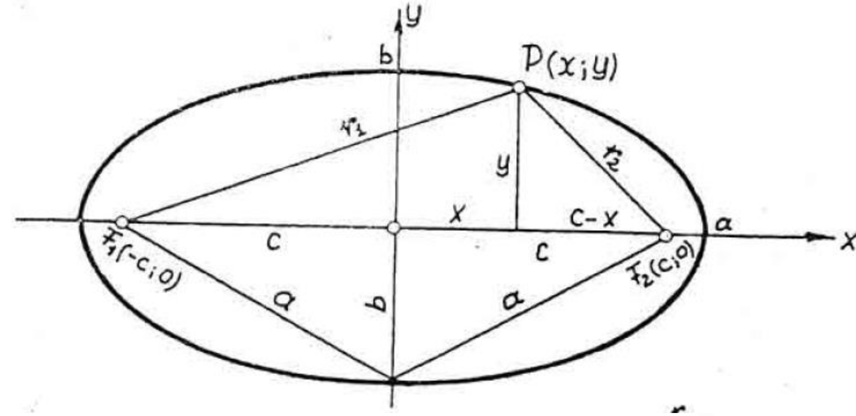


Ellipszis



Az előre adott távolságok összege: $PF_1 + PF_2 = 2a$ (a nagytengely= a legnagyobb átmérő hossza).
A fókuszpontok távolságát fókusztávolságnak nevezzük. Ennek hossza: 2c .
A legkisebb átmérőt kistengelynek nevezzük. Ennek hossza: 2b.
A féltengelyek és a félfókusztávolság közötti összefüggés (a 32.ábra alapján): $a^2 = b^2 + c^2$

Ellipszis



<u>Az origó középpontú ellipszis egyenletének levezetése:</u>

A definíció miatt: $PF_1 + PF_2 = 2a \quad \Rightarrow \quad PF_1 = 2a - PF_2$

A P „futó" pontnak határozzuk meg a fókuszoktól való távolságát. A kapott értékeket beírva kapjuk:

$$\sqrt{(c+x)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(c-x)^2+y^2} \qquad /(\,)^2$$

$$c^2+2cx+x^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2+y^2} + c^2 - 2cx + x^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(c-x)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx \qquad /4$$

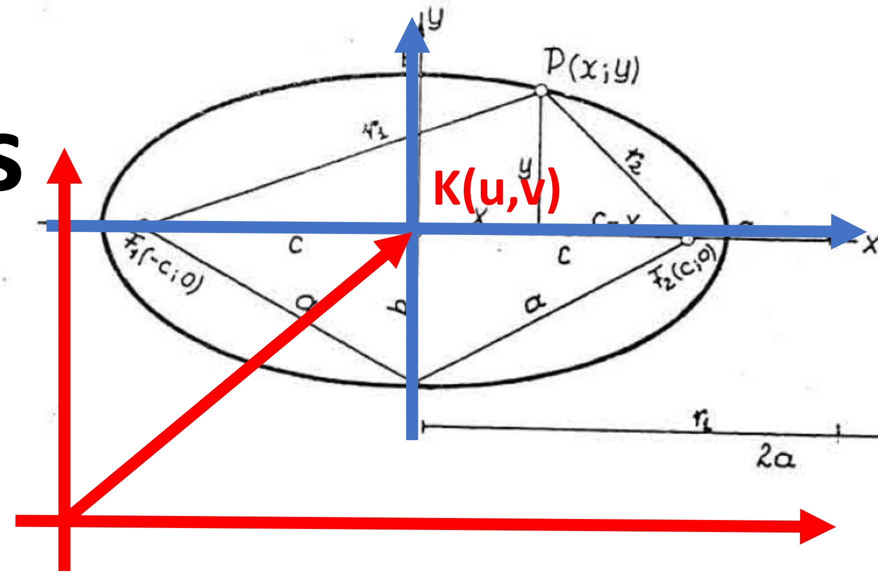
$$a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \qquad de,\ (a^2-c^2) = b^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad /\,a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Ellipszis



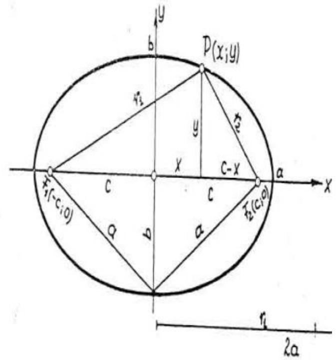
Egyenlete:

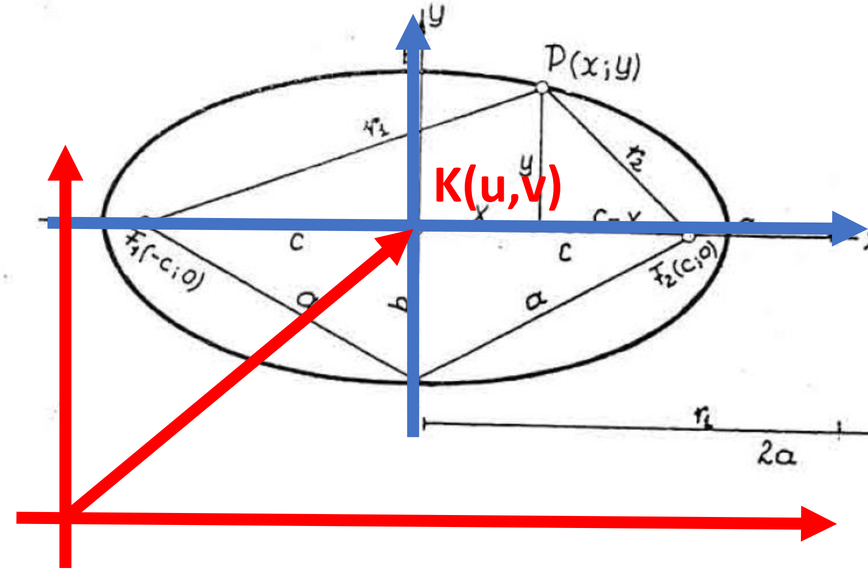
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

$$\boxed{\frac{(x-u)^2}{a^2}+\frac{(y-v)^2}{b^2}=1}$$

Kör

$a = b = r$





<u>Egyenlete:</u>

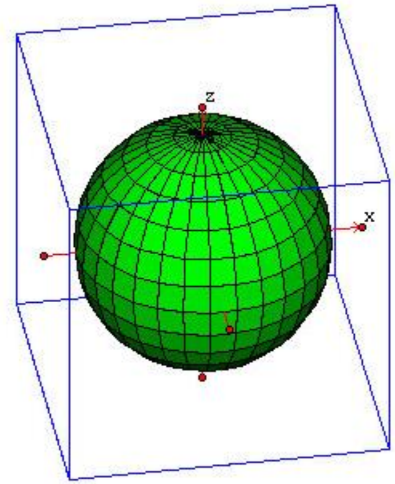
$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

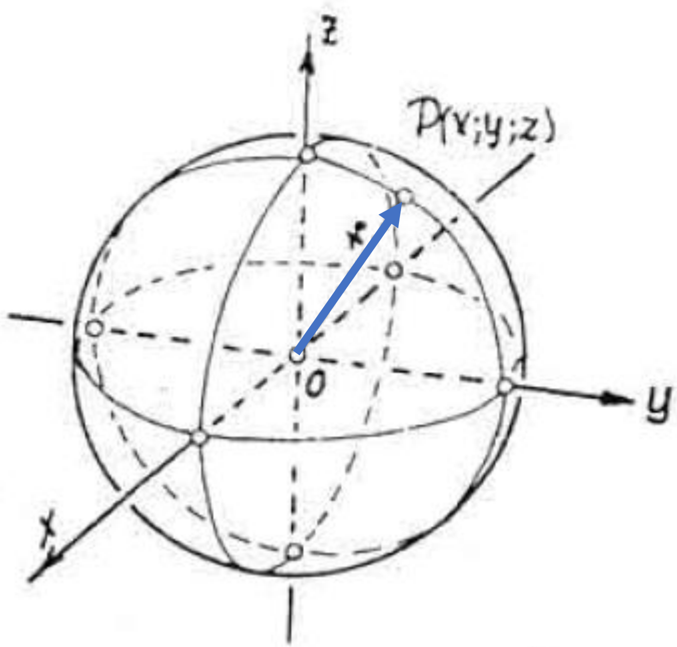
$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

$$\boxed{\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1}$$

Gömb



Gömb: azon pontok mértani helye, amelyek egy fix ponttól (középpont) egyenlő távolságra (sugár) vannak.



$$r = |\overrightarrow{OP}|$$

$$\overrightarrow{OP}(x-0; y-0; z-0)$$

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

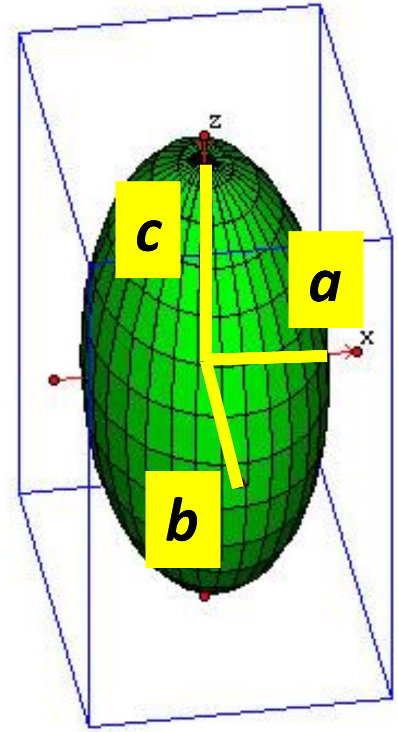
Origó középpontú gömb egyenlete:

$$G: \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

K(u,v,w) középpontú gömb egyenlete:

$$G: \quad r^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2$$

Ellipszoid

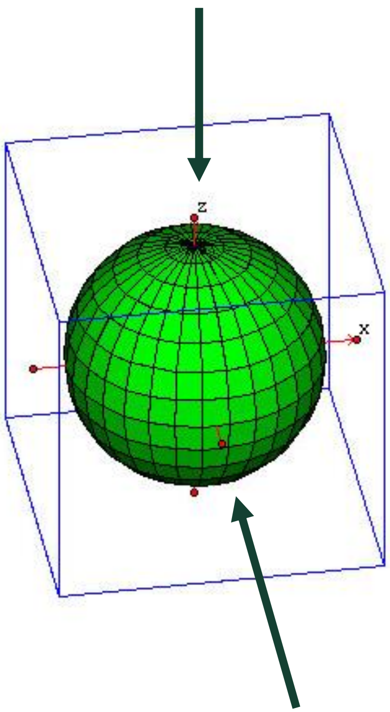


Egyenlete a gömb egyenletéből általános zsugorítással nyerhető.

gömbsugár: *a*

y-irányú zsugorítás mértéke: *b/a*

z-irányú zsugorítás mértéke: *c/a*



A zsugorítás következtében az ellipszoid koordinátái:

$$\bar{x} = x \qquad x = \bar{x}$$

$$\bar{y} = \frac{b}{a} y \qquad y = \frac{a}{b} \bar{y}$$

$$\bar{z} = \frac{c}{a} z \qquad z = \frac{a}{c} \bar{z}$$

$$G: \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

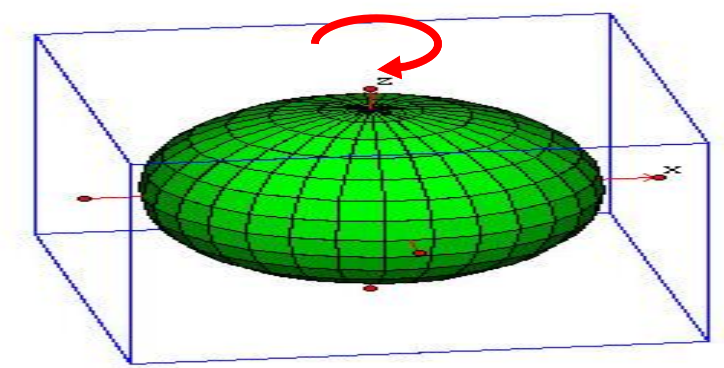
$$E: \quad \bar{x}^2 + \frac{a^2}{b^2} \bar{y}^2 + \frac{a^2}{c^2} \bar{z}^2 = a^2$$

$$\boxed{E: \quad \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} + \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 1}$$

Ellipszoid

$E(a; b; c)$

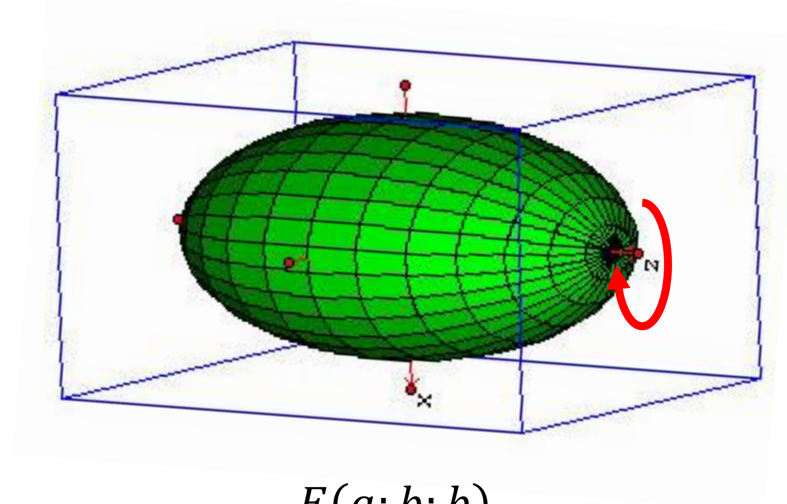
Forgási ellipszoid: ha két féltengely egyforma hosszúságú.
A forgási ellipszoidot egy ellipszis valamely tengely körüli forgatásával nyerjük.



$E(a; a; b)$

lencse alakú ellipszoid

$$E: \quad \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{a^2} + \frac{\bar{z}^2}{b^2} = 1$$

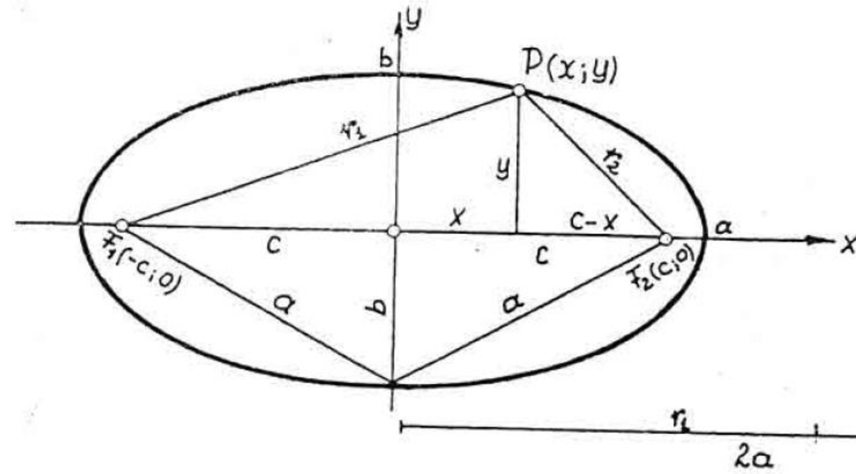


$E(a; b; b)$

tojás alakú ellipszoid

$$E: \quad \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} + \frac{\bar{z}^2}{b^2} = 1$$

Ellipszis



Ellipszis geometriája:

Két megfelelően választott paraméterrel jellemezhető. $E(a;b)$

fél nagytengely a

fél kistengely b

Egyéb megadási lehetőségek:

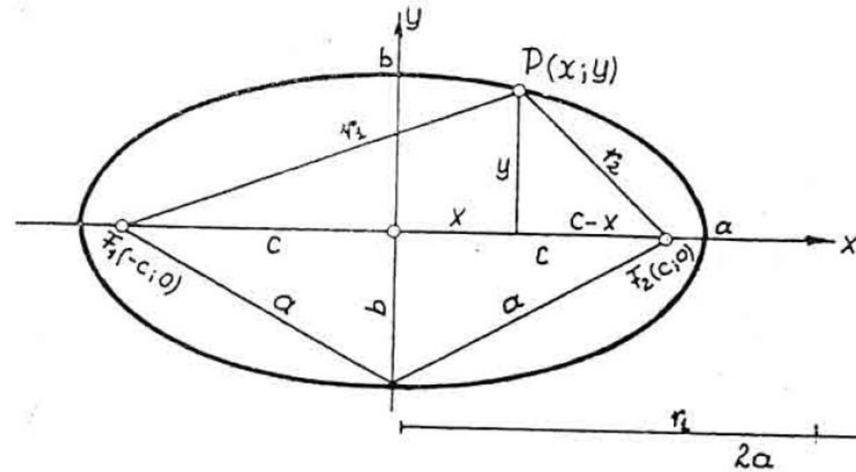
lapultság $f = \dfrac{a-b}{a}$ $E(a;f)$

első numerikus excentricitás $e = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}$ $E(a;e^2)$

második numerikus excentricitás $e' = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{b^2}}$ $E(a;e'^2)$

pólusgörbületi sugár $c = \dfrac{a^2}{b}$ $E(a;c)$

Ellipszis



Ellipszis geometriája:

görbületi sugár

$$M = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}$$

Az ellipszis alakján, $E(a; e^2)$ kívül a sugárnak a nagytengellyel bezárt φ szögétől függ.

Ellipszoid

Ellipszoid geometriája:

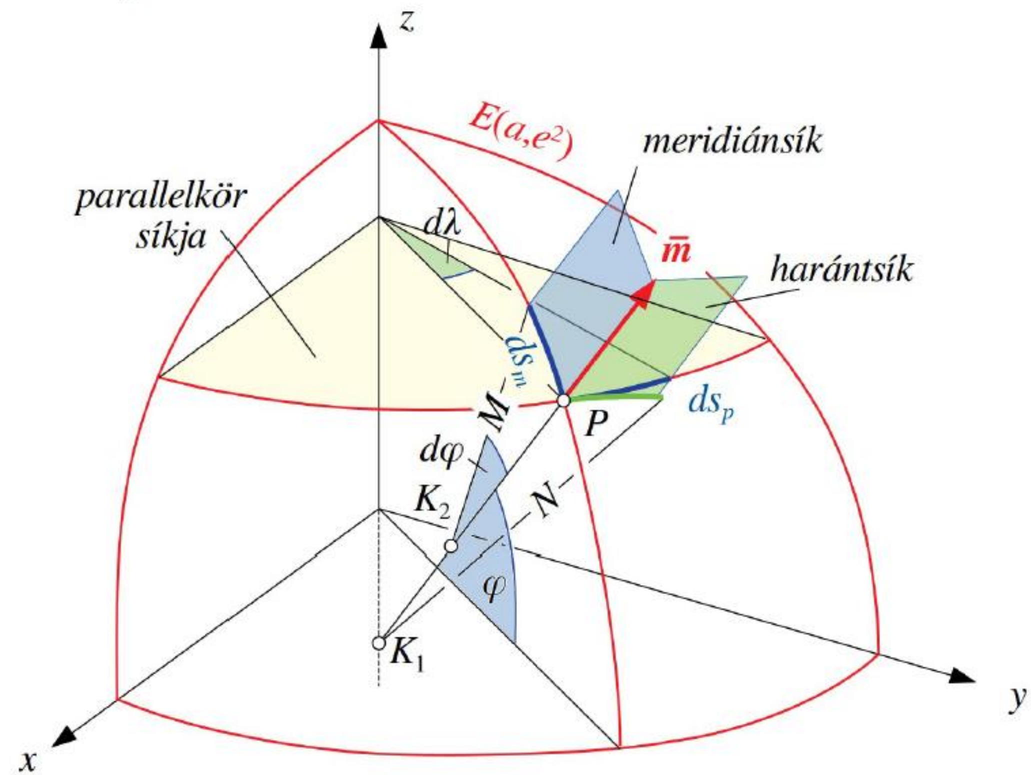
görbületi sugarak

$$M = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}$$

meridián irányú görbületi sugár

$$N = \frac{a}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{1/2}}$$

harántgörbületi sugár



Az ellipszis alakján, $E(a; e^2)$ kívül a sugárnak a nagytengellyel bezárt φ szögétől függ.

Ellipszoid

Ellipszoid geometriája:

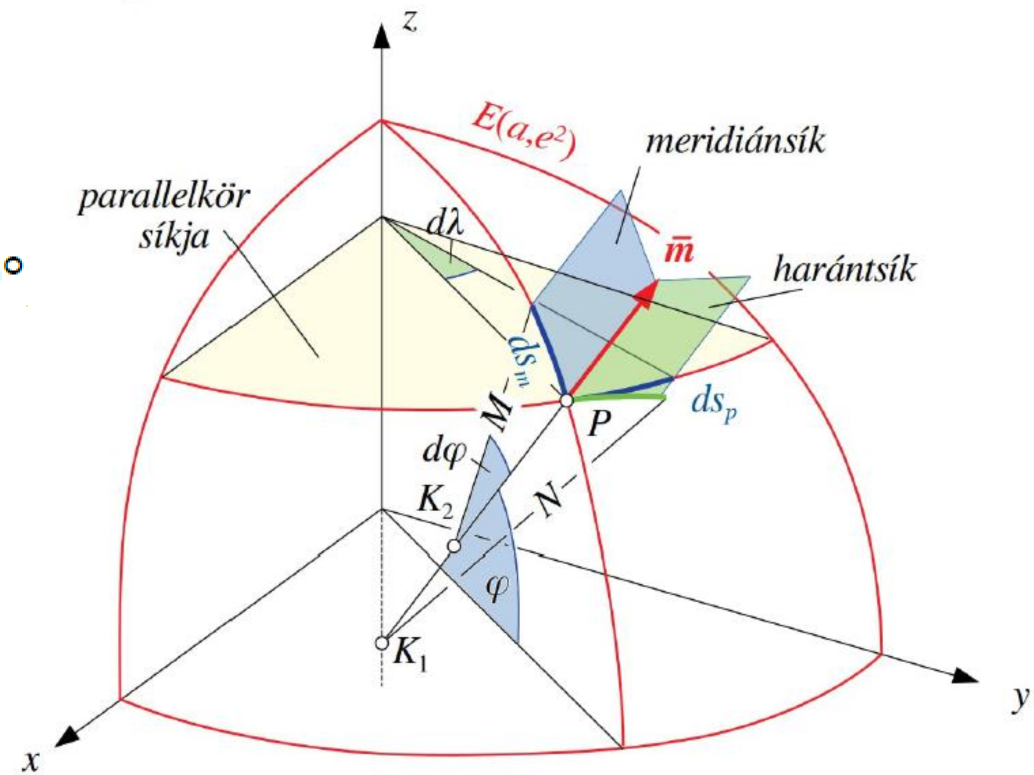
görbületi sugarak az egyenlítőn $\varphi = 0°$

$$M = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}$$

$$\boxed{M = a(1-e^2)}$$

$$N = \frac{a}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{1/2}}$$

$$\boxed{N = a}$$

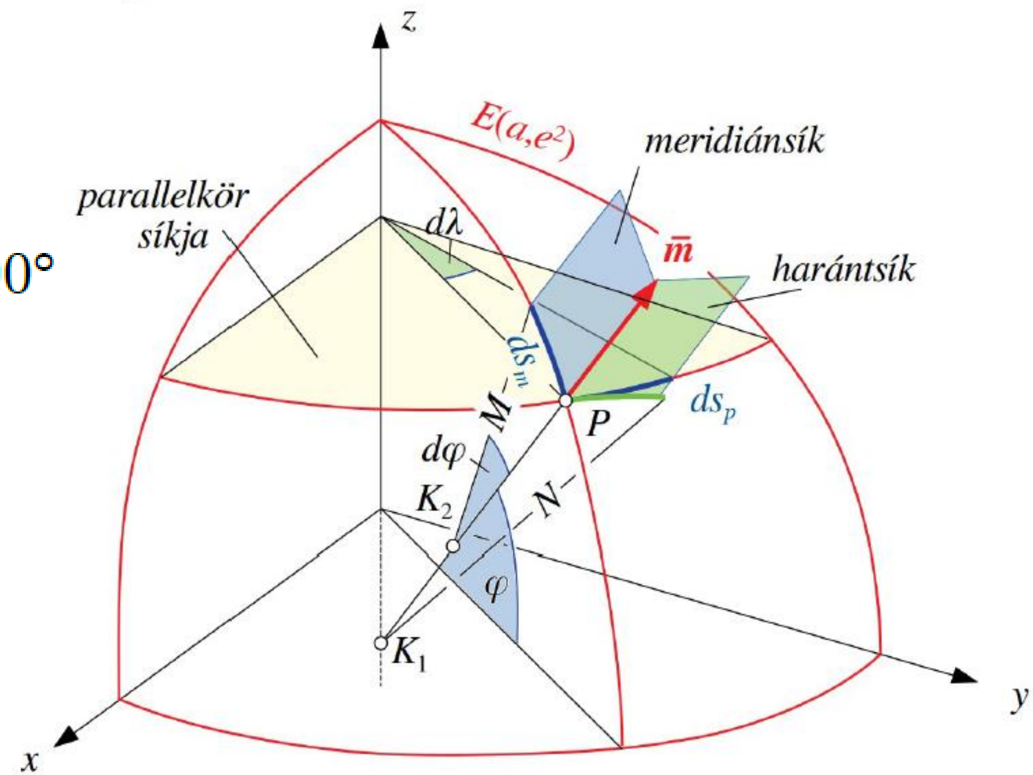


$$\boxed{N > M}$$

Ellipszoid

Ellipszoid geometriája:

görbületi sugarak a sarkokon $\varphi = \pm 90°$



$$M = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2 \sin^2\varphi\right)^{3/2}}$$

$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2 \sin^2\varphi\right)^{1/2}}$$

$\boxed{N = M = a/(1 - e^2)1/2}$

$$\boxed{N = M = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}}$$

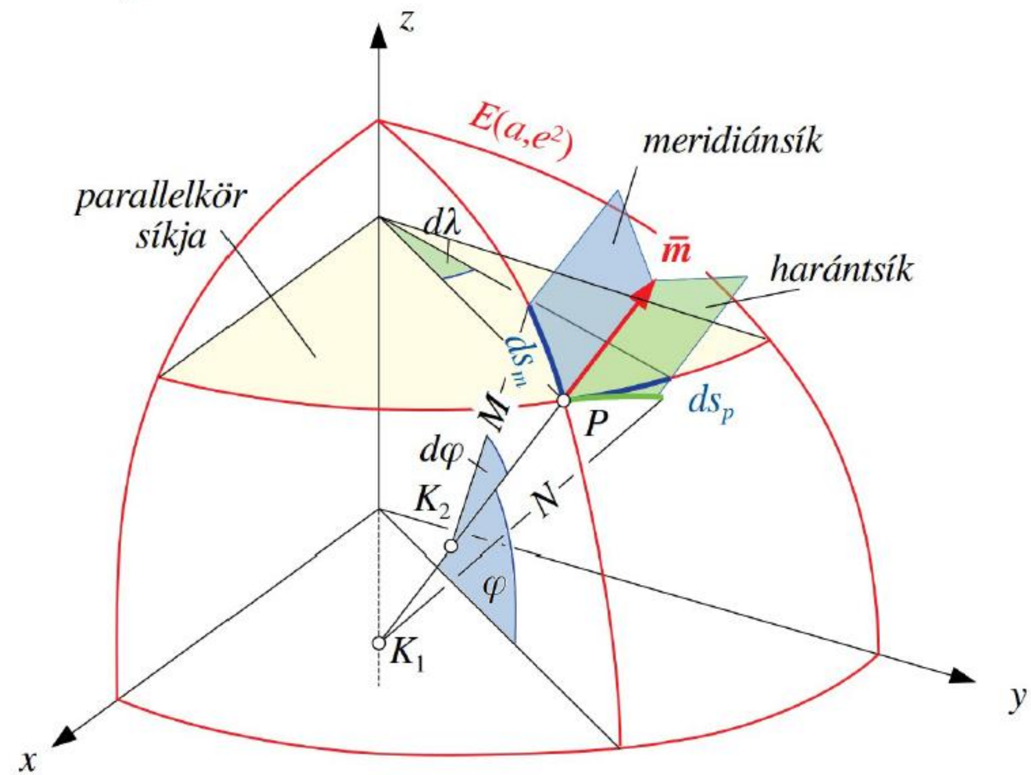
Ellipszoid

Ellipszoid geometriája:

görbületi sugarak

$$M = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}$$

$$N = \frac{a}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{1/2}}$$



Tetszőleges a azimutú irányban a görbületi sugár

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{M} + \frac{\sin^2\alpha}{N}$$

Gauss-féle középgörbületi sugár

$$R = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} R_\alpha \, d\alpha = \sqrt{MN}$$

Ellipszoid

Ellipszoid geometriája:

Ívhossz meridiánon és paralelkörön

A meridián irányú elemi ívhossz $ds_m = M\,d\varphi$, a paralelkör irányú elemi ívhossz pedig $ds_p = N\cos\varphi\,d\lambda$. Ezekből kiszámíthatók az 1°, 1′ és 1″ szélesség, illetve hosszúságkülönbségnek megfelelő távolság az ellipszoid felszínén:

$\Delta\varphi =$	1°	→	111 km	$\Delta\lambda =$	1°	→	71 km	(φ = 50°)
	1′	→	1,85 km		1′	→	1,2 km	(φ = 50°)
	1″	→	31 m		1″	→	20 m	(φ = 50°)

Látható, hogy a cm-es koordináta-megadáshoz tartozó földrajzi koordináta-élesség 0,0001″.

Segédlet az 1. leadandóhoz

A 69. számú pont GRS80 ellipszoidra vonatkozó ellipszoidi földrajzi koordinátái :

$\varphi = 46^\circ\ 12'\ 6{,}8959''$ $\lambda = 18^\circ\ 48'\ 37{,}8463''$ $h = 132{,}837$ m

A GRS80 ellipszoid paraméterei : $a = 6\ 378\ 137{,}000$ m
$e^2 = 0{,}006\ 694\ 380\ 0229$

Számítsa ki a pont térbeli derékszögű koordinátáit és ellenőrizze a kapott koordinátákat visszaszámítással.

Segédlet az 1. leadandóhoz

Helyzetmeghatározó adatok:

- geocentrikus helyvektor

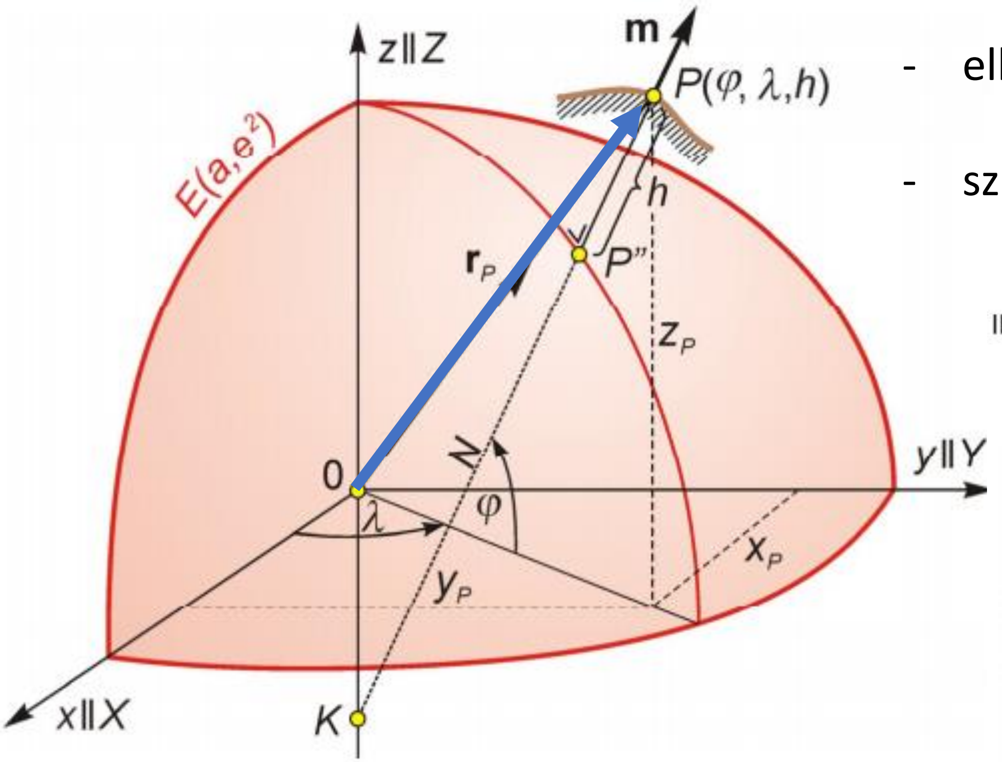
  (x_P, y_P, z_P)

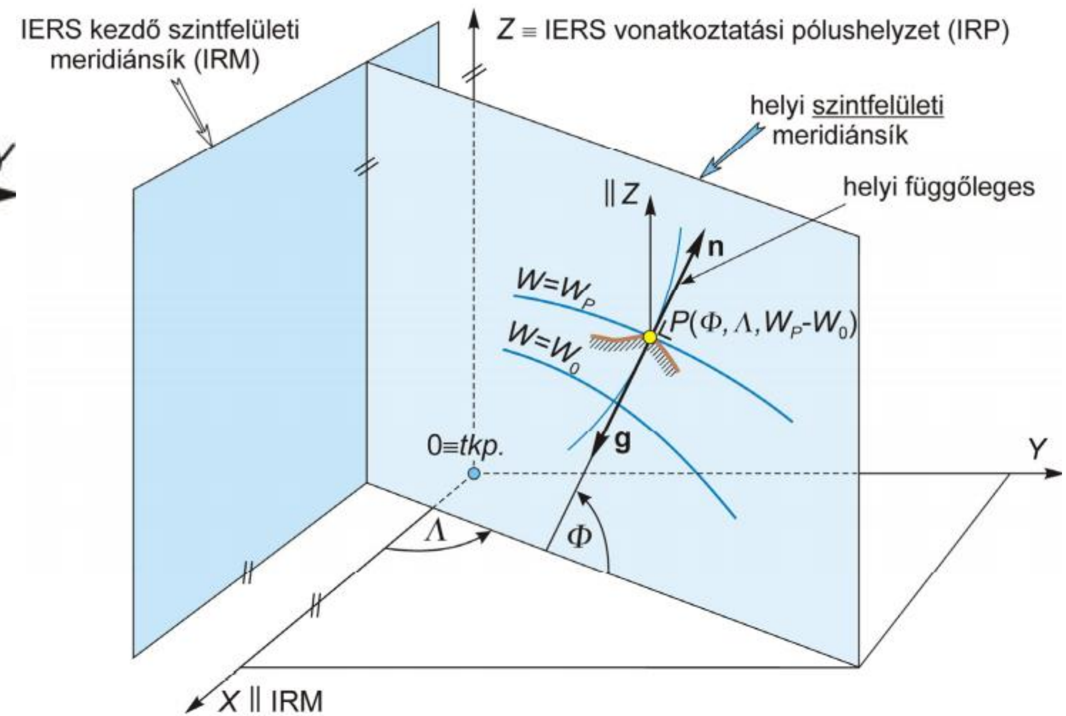
- ellipszoidi felületi koordináták

  (φ, λ, h)

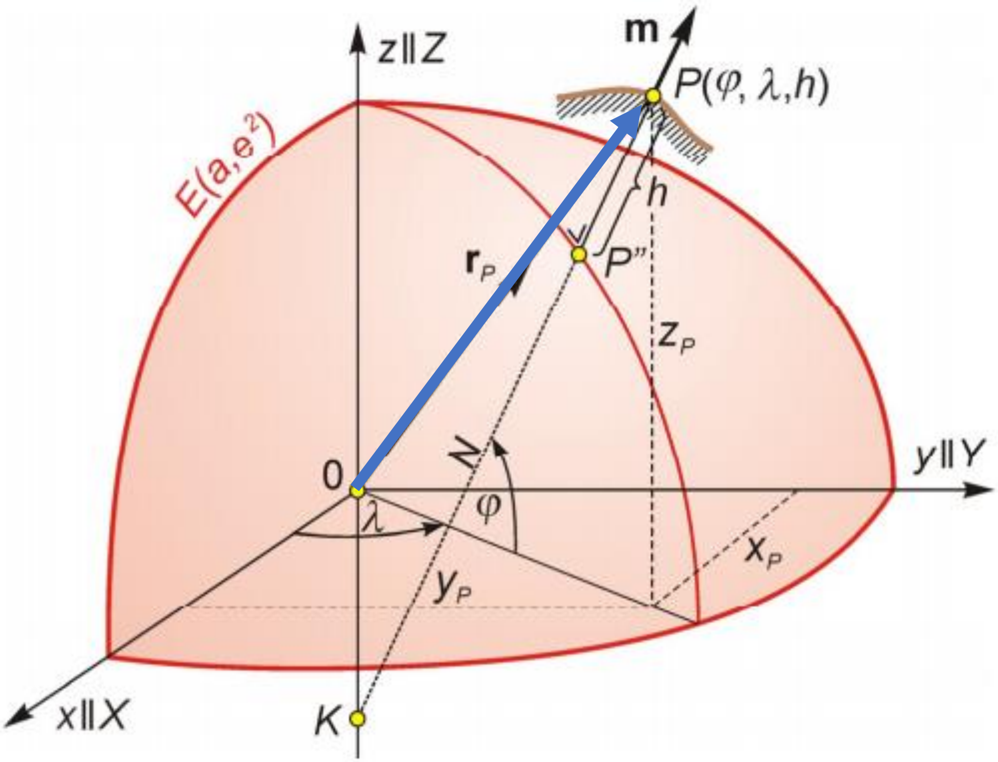
- szintfelületi koordináták

  (Φ, Λ, W)





Segédlet az 1. leadandóhoz



$(x_P, y_P, z_P) \leftrightarrow (\varphi, \lambda, h)$

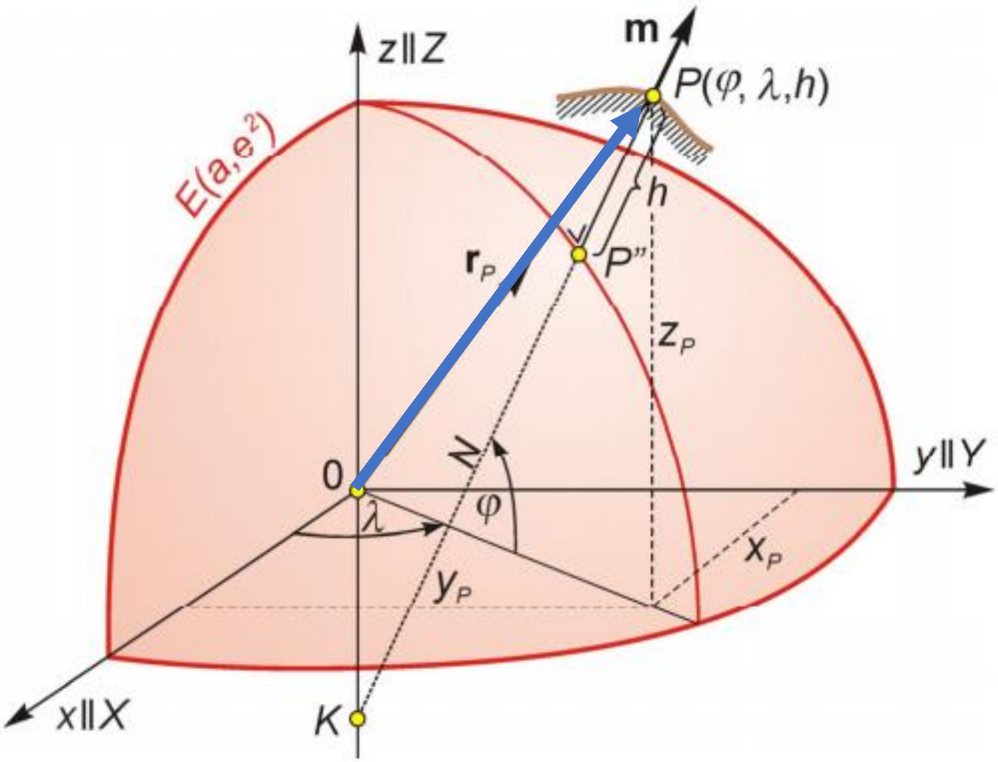
$$\mathbf{r}_{P''} = N \begin{bmatrix} \cos\varphi \ \cos\lambda \\ \cos\varphi \ \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\varphi \ \cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi \ \sin\lambda \\ \left[(1-e^2)N+h\right]\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Visszafelé számítás: Bowring eljárásával

(lásd tankönyv)

Segédlet az 1. leadandóhoz



Számítás összefüggései:

$(\varphi,\lambda,h) \rightarrow (x_P, y_P, z_P)$

$$N=\frac{a}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{1/2}}$$

$$\mathbf{r}_P=\begin{bmatrix}\left(N+h\right)\cos\varphi\cos\lambda\\ \left(N+h\right)\cos\varphi\sin\lambda\\ \left[\left(1-e^2\right)N+h\right]\sin\varphi\end{bmatrix}$$

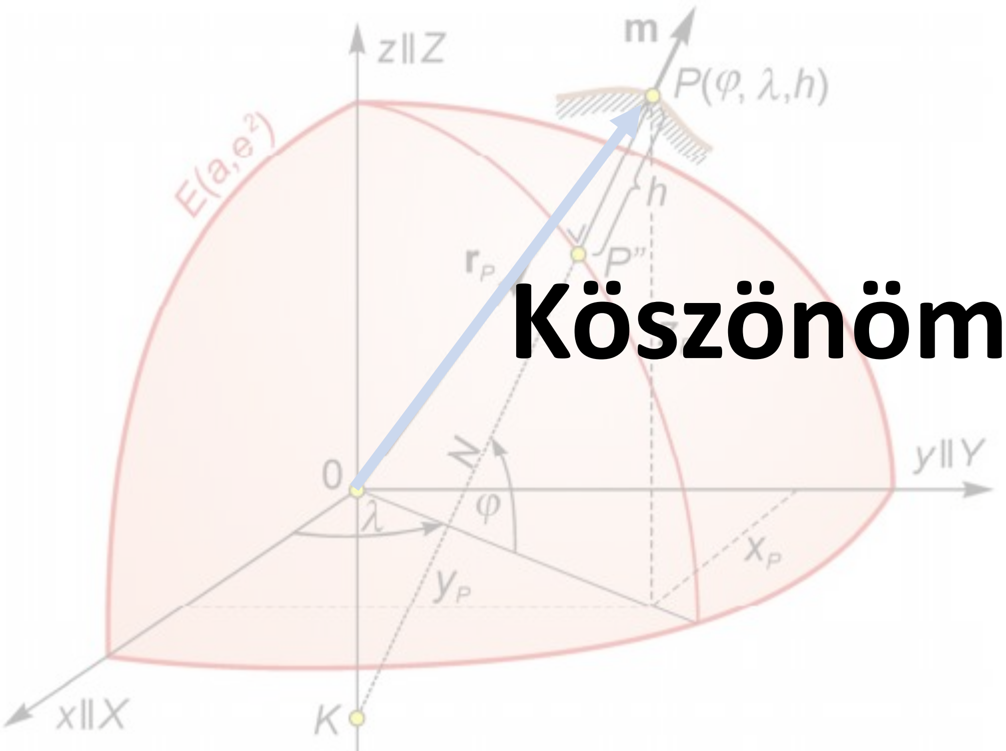
$(x_P, y_P, z_P) \rightarrow (\varphi,\lambda,h)$

$$\psi=\operatorname{arctg} z_P/\sqrt{x_P^2+y_P^2} \qquad r_P=\sqrt{x_P^2+y_P^2+z_P^2}$$

$$p=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \operatorname{tg}\Theta=\frac{z\cdot a}{p\cdot b}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{z+e'^2 b\sin^3\Theta}{p-e^2 a\cos^3\Theta} \qquad \operatorname{tg}\lambda=\frac{y}{x} \qquad h=\frac{p}{\cos\varphi}-N$$

Segédlet az 1. leadandóhoz



Számítás összefüggései:

$(\varphi,\lambda,h) \rightarrow (x_P, y_P, z_P)$

$$N=\frac{a}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{1/2}}$$

$$\mathbf{r}_P=\begin{bmatrix}(N+h)\cos\varphi\cos\lambda\\(N+h)\cos\varphi\sin\lambda\\\left[\left(1-e^2\right)N+h\right]\sin\varphi\end{bmatrix}$$

Köszönöm a figyelmet!

$(x_P, y_P, z_P) \rightarrow (\varphi,\lambda,h)$

$$\psi=\operatorname{arctg} z_P/\sqrt{x_P^2+y_P^2} \qquad r_P=\sqrt{x_P^2+y_P^2+z_P^2}$$

$$p=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \operatorname{tg}\Theta=\frac{z\cdot a}{p\cdot b}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{z+e'^2 b\sin^3\Theta}{p-e^2 a\cos^3\Theta} \qquad \operatorname{tg}\lambda=\frac{y}{x} \qquad h=\frac{p}{\cos\varphi}-N$$