Tartószerkezetek dinamikája

Németh Róbert K.

BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék
Budapest
2022

Tankönyv-előzetes a BME Építőmérnöki Karának
Tartószerkezetek dinamikája (BMEEOTMAT43)
és a
Szerkezetek dinamikája (BMEEOTMMN-1)
tárgyaihoz.

Németh Róbert

Utolsó frissítés: 2022. szeptember 23.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

Példák jegyzéke

Előszó és ajánlás

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Építőmérnöki Karán az építőmérnöki BSc-képzésen a Tartók dinamikája, a szerkezetépítőmérnöki MSc-képzésen a Szerkezetek dinamikája tárgyban találkoznak hallgatóink a tartószerkezetek rezgésvizsgálatának a mechanikai alapjaival. Az első tárgyban szerkezetek egy- és többszabadságfokú modelljeinek lineáris rezgésvizsgálatát ismerik meg a hallgatók, a második tárgyban a folytonos szerkezetek rezgésvizsgálatára építve a merevségi mátrix és a tömegmátrix előállításának pontos és közelítő módszereit, a többszabadságfokú modellek csillapítását, a talaj rugalmas megtámasztásából eredő csillapítást, valamint a széldinamikai vizsgálatok alapjait mutatjuk be.

Az MSc-képzés tárgya részben épít a BSc-s tárgyban szerzett ismeretekre, de nem garantálható, hogy a mesterképzés minden hallgatója rendelkezik az alapképzésben oktatott anyaggal. Emiatt kezdettől fogva a mesterképzés első óráin átismételjük az egyszabadságfokú és többszabadságfokú szerkezetek szabadrezgésének és gerjesztett rezgésének a vizsgálatát. Ezzel párhuzamosan terveztük egy olyan tankönyv kiadását, amiből a két tárgy mindegyikére fel lehet készülni, vagy az alapképzéses tárgy anyagát szükség esetén bepótolni. Ezt a célt tűztük ki jelen könyv írásakor.

A könyv szerkezete elsődlegesen az oktatás sorrendiségét követi, ezért az 1.-4.2. fejezeteket és a 4.2 első két szakaszát az alapképzés hallgatóinak szánjuk, a 4.-6. fejezeteket a mesterképzés hallgatóinak ajánljuk. Ebben a felosztásban néha szükségszerűen megemlítésre kerülnek a korábbi fejezetekben olyan témakörök, amik túlmutatnak az alapképzésen elvárt ismereteken, ezek a szakaszok az alábbiak:

- az időlépéses integrálás módszerei (2.5.3. szakasz és 3.3.6.3. alpont)
- a Rayleigh-hányados tulajdonságainak bizonyítása (a 3.2.5.3. alpontban), a Ritz-Rayleigh-módszer (3.2.5.4. alpont)
- a folytonos szerkezetek gerjesztett rezgései (a 4.1.4. és a 4.2.3. szakaszok).

A fenti témaköröket a mesterképzésben tárgyaljuk, de tartalmilag szerencsésebb a mostani helyükön bemutatni azokat.

Ez a könyv nem készülhetett volna azon kollégák nélkül,

- akiktől dinamikát tanultam (Roller Béla, Peter Vielsack, Györgyi József),
- akikkel dinamikát tanítottam (Kocsis Attila, Lengyel Gábor, Ádány Sándor),

- akiknek dinamikát tanítottam (a sok diák mellett doktoranduszom, Geleji Borbála).

nekik ezúton is köszönöm a szabatosság igényét, és hogy megmutatták, milyen sokféleképpen lehet megérteni ezt a témát.

Végül, ha a kedves olvasóban növeli a bizalmat, ha előre tudja, vagy néhány levezetésnél egyszercsak felmerül benne, hogy mit ivott a szerző a könyv megírása közben, akkor ezen ne múljon: kávét.

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Dinamikai vizsgálatok háttere

Az építőmérnöki képzés során tanult statikai vizsgálatok statikus terhek[1] hatására határozzák meg a szerkezet egyensúlyi helyzetét és az annak fenntartásához szükséges külső és belső erőket. Az egyensúlyi helyzeteket jellemeztük is: stabil egyensúlynak nevezzük azt az állapotot, amikor az egyensúlyi helyzetből kismértékben kitérítve a testet, az ”visszafelé”, azaz az egyensúlyi helyzet felé indul el[2].

Két dologgal tehát nem foglalkoztunk:

- mi történik a visszafelé indulás után, ha az egyensúlyi helyzetből való kitérés véges nagyságú, illetve
- mi történik, ha a teher nem csak egy zérusértékről növekszik kvázistatikusan a végértékig, hanem változik az idő függvényében?

Az első esetben a stabil egyensúlyi állapot definíciójából kiindulva tudjuk, hogy a szerkezet elindul az egyensúlyi helyzet felé. Mivel az egyes pontokra ható erők eredője nem mindig nulla, gyorsulások lépnek fel, amiből sebesség lesz idővel. Az egyensúlyi helyzet elérésekor viszont még mindig lesz valamekkora sebesség, ami azzal jár, hogy a test átlendül az egyensúlyi állapot túlsó oldalára. Onnan viszont már az ellenkező irányba, azaz ismét az egyensúlyi helyzet felé mutat majd az erők eredője, ami előbb megállítja a szerkezetet, majd az új, megintcsak nem egyensúlyi helyzetből ismét az egyensúly felé fog gyorsulni a szerkezet. Ezt az oda-vissza mozgást nevezzük rezgésnek, vagy lengésnek, a magára hagyott (szabadon mozgó) rendszer rezgését pedig *szabadrezgés*nek. Azt is tapasztalhatjuk, hogy a rezgés bizonyos idő elteltével megáll. Ezt a jelenséget *csillapítás*nak nevezzük, hátterében valamilyen csillapító erő áll, ami az éppen aktuális mozgás (tehát a sebesség) irányával ellentétes irányba ható erőhatásból származik (ilyen például a súrlódási erő).

[1] E terheket szokás a kvázi-statikus jelzővel is illetni: nulláról olyan lassan növeljük az intenzitásukat a végértékig, hogy a szerkezet tehetetlensége (tömege) ne befolyásolja a végső alakot.

[2] Az *instabil* egyensúlyi állapotból kimozdított szerkezet távolodva mozog, a *kritikus* egyensúlyi állapotból kimozdított szerkezet újabb egyensúlyi helyzetbe kerül.

A második esetben a jelenség matematikai háttere hasonló: ha az éppen aktuális elmozdult alak nem azt az erőrendszert tartaná egyensúlyban, ami az adott pillanatban hat a szerkezetre, akkor abból gyorsulás származik, abból pedig idővel sebesség, azaz mozgás lesz. A mozgást létrehozó erőt ilyenkor *gerjesztőerő*nek, a kialakuló mozgást pedig *gerjesztett rezgés*nek nevezzük.

A szerkezetek dinamikai vizsgálatát az elmozdulásmódszerre alapozzuk. A mozgásegyenletből (ami Newton második mozgástörvényéből ered) az elmozdult alakot határozzuk meg az idő függvényében, ezt nevezzük a szerkezet *válaszá*nak. Ezután bármely pillanathoz meg lehet határozni azt a statikus erőrendszert, ami ugyanakkora statikus elmozdulásokat eredményezne, mint az aktuális elmozdulások. Az ennek a statikus erőrendszernek a hatására kialakuló külső és belső erőket, igénybevételeket, feszültségeket a szokásos módszerek valamelyikével tudjuk meghatározni. Végül ezeknek az elmozdulásoknak, erőknek a maximumát kell valamilyen megengedett értékhez, teherbíráshoz hasonlítani.

1.2. A könyv szerkezete

A könyvben először az egyszabadságfokú (2. fejezet), a többszabadságfokú (3. fejezet) és a folytonos szerkezetek (4. fejezet) rezgésein haladunk végig. Mindhárom esetben áttekintjük a modell felépítését, a mozgásegyenletet, annak megoldását szabadrezgés és gerjesztett esetén. Ezután a rúdszerkezetek merevségi mátrixának és tömegmátrixának pontos előállítási módszerét mutatjuk be, amire alapozva a közelítő számítások közelítő volta igazolható, pontossága pedig becsülhető (5. fejezet). Végül csillapítással kapcsolatos témákkal foglalkozunk (6. fejezet). Először a többszabadságfokú szerkezetek csillapított rezgésének pontos és közelítő számítási módszereit mutatjuk be, majd a végtelen féltér megtámasztó hatásából fakadó csillapítást vezetjük le, végül a széldinamikai számítások alapjait és az abból fakadó, dinamikai instabilitást okozó negatív csillapítást mutatjuk be.

A könyvben a vektorokat egyszeres aláhúzással jelöljük (pl. $\underline{a}$), a mátrixokat pedig kétszeres aláhúzással jelöljük (pl. $\underline{\underline{A}}$). Ugyan ez eltér a nyomtatásban szokásos félkövér szedéssel történő jelölésmódtól, viszont kézi jegyzetelés esetén azonos lesz a nyomtatott és az írt betű. Mátrix- és vektorműveleteknél kiemelten fontos a műveleti sorrend, talán ebben is segít a felhasznált jelölésmód.

1.2.1. Példa (d)**.** *A könyvben példákkal is segítjük a megértést.*

Megoldás
A példák egy része közvetlenül levezetésként kerül bemutatásra.

Az általános levezetések esetén a példákat és megoldásaikat kiemelve közöljük.

2. fejezet

Egyszabadságfokú rendszerek mechanikai rezgései

2.1. Egyszabadságfokú modellek

2.1.1. Bevezetés

Szerkezetek dinamikájának a vizsgálatakor kiemelt szerepe van a modellválasztásnak. Később, a többszabadságfokú szerkezeteknél látni fogjuk, hogy az ottani több rezgésalak közül lesz olyan, aminek a szerepe nagyobb a szerkezet válaszában. Éppen ezért a több szabadságfokkal jellemezhető szerkezeteket is gyakran csak egy szabadságfokkal jellemzünk. (Emlékeztetőül: a szabadságfokok azok a független skalárfüggvények, amelyekkel a szerkezet elmozdult alakját egyértelműen, a modell pontosságának megfelelően jellemezhetjük.)

Egyszabadságfokú szerkezettel az alábbi esetekben találkozhatunk:

- egyetlen tömegpont, vagy merev test egyirányú eltolódó mozgása[1], vagy rögzített tengely körüli elfordulása[2] esetén,
- olyan szerkezet, amelynek egyetlen pontjának egyetlen elmozdulásához lényegesen nagyobb tehetetlenség tartozik, mint a többi pont elmozdulásához[3],
- olyan szerkezet, melynek egyetlen pontja egyetlen elmozdulásával megfelelően közelíthetjük a mozgást[4],
- többszabadságfokú rendszerek egy-egy rezgésalakja önmagában egyszabadságfokú rendszerként viselkedik[5],

Fentiekre a 2.1. ábra mutat példákat.

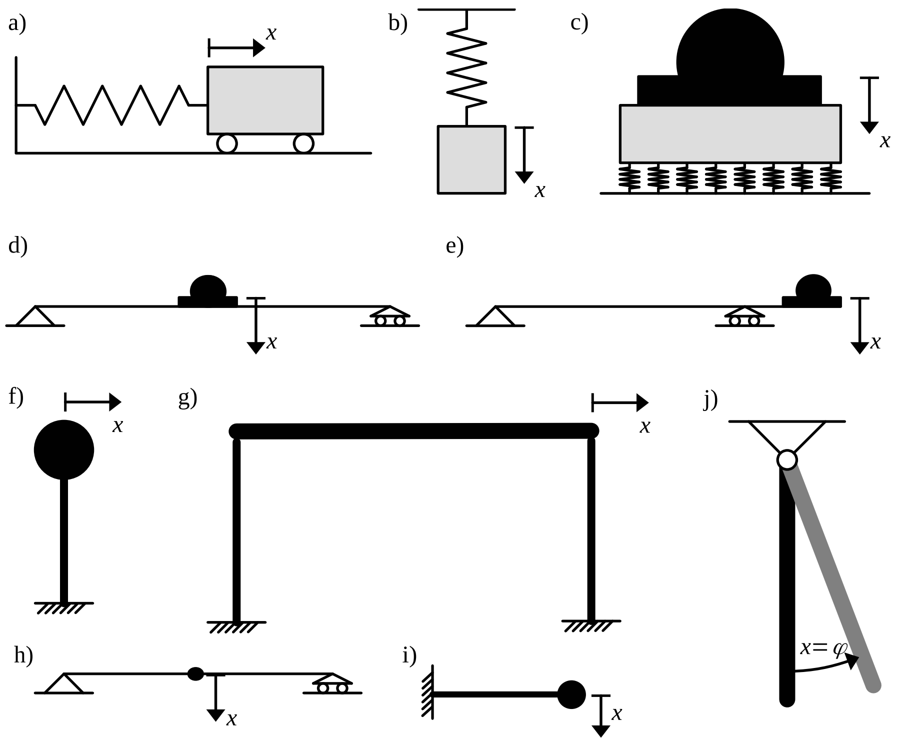
[1] Például a rugóval falhoz csatlakoztatott kiskocsi.

[2] Például egy csuklóval felfüggesztett inga.

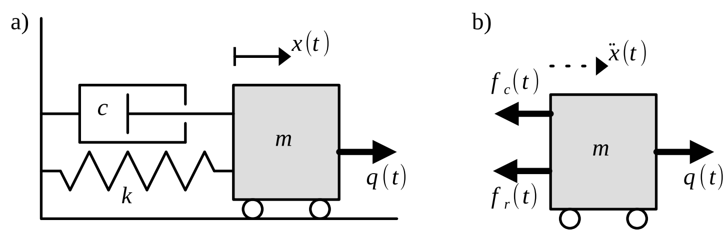
[3] Például egy gerendára helyezett gép, melynek tömegéhez képest a gerenda tömege elhanyagolható (nagyságrenddel nagyobb).

[4] Például egy olyan keret, amelyben a gerenda normálirányú alakváltozása elhanyagolható, ezért a gerenda oszlopok hajlítása miatti vízszintes eltolódása a lényeges elmozdulás.

[5] Erről majd a többszabadságfokú rendszereknél lesz szó.



2.1. ábra. Egyszabadságfokú rendszerként kezelhető modellek (a szabadságfok elmozdulását x jelzi): a) rugóval a falhoz rögzített kiskocsi, b) rugóra felfüggesztett test, c) alaptestre helyezett gép, d) kéttámaszú tartón elhelyezett gép, e) gerenda konzolján elhelyezett gép, f) víztorony, g) síkbeli keret vízszintesen eltolódó merev gerendával, h) gerenda egyetlen pontba redukált tömeggel, i) konzol egyetlen pontba redukált tömeggel, j) egyszerű inga (a szabadságfok elmozdulása itt egy elfordulás).



2.2. ábra. Egyszabadságfokú rendszer a) modellje (rugó-tömeg modell), b) a tömegpont elkülönítése.

2.1.2. A mozgásegyenlet

A mozgásegyenletet az elkülönített tömegpont alapján írjuk fel. A 2.2.a) ábrán látható ún. *rugó-tömeg modell*ben szereplő m *tömeg*ű szabadságfokot a k-val jelölt rugó és a c-vel jelölt csillapító elem kapcsolja a falhoz. A testet az időfüggő $q(t)$ *gerjesztőerő* terheli, a test kitérését jelölje $x(t)$. A koordinátarendszer kezdőpontját vegyük fel úgy, hogy az $x = 0$ helyzet a terheletlen rendszer egyensúlyi helyzete legyen.

A szabadságfokot a 2.2.b) ábrán különítettük el. A testre *teher*ként a $q(t)$ külső erő, a rugóból (rugalmas szerkezetből) származó $f_r(t)$ *rugalmas visszatérítő erő*, valamint a csillapító elemből (a szerkezet anyagának csillapításából) származó $f_c(t)$ *csillapítóerő* hat. Ezek együtt hozzák létre a test *gyorsulás*át, ami az $x(t)$ *eltolódásfüggvény* idő szerinti második deriváltja. Az idő szerinti deriválást a függvény fölötti ponttal jelöljük, így a gyorsulás $\ddot{x}(t)$ lesz. Ezekkel a jelölésekkel felírjuk Newton második törvényét:

$$m\ddot{x}(t) = q(t) - f_r(t) - f_c(t), \tag{2.1}$$

majd rendezzük egy-egy oldalra az ismeretlen és ismert függvényeket:

$$m\ddot{x}(t) + f_c(t) + f_r(t) = q(t). \tag{2.2}$$

A továbbiakban bemutatjuk, hogy ha nem tömegpontból rugóból és csillapítóelemből áll a rendszer, akkor hogyan lehet meghatározni az m tömeget, illetve az $f_r(t)$ és $f_c(t)$ erőket.

2.1.3. A modell tömege

Ha a vizsgált mechanikai rendszer olyan, hogy az valóban egy anyagi pontként jellemezhető, azaz egy merev test végez egy egyenes mentén eltolódó mozgást, akkor a mozgó tömeg azonos lesz a 2.2.a) ábra szerinti rugó-tömeg modell m tömegével.

Ugyancsak egyszerűen meghatározható az m értéke, ha a mozgó tömeget megtámasztó rugalmas szerkezet tömege elhanyagolható (nagyságrendekkel kisebb) a mozgó tömeghez képest. Ilyen eset fordulhat elő, ha olyan nagy tömegű gépet helyezünk egy gerendára, hogy ahhoz képest a gerenda tömege elhanyagolható.

Amennyiben a folytonos szerkezeten nincsen olyan kitüntetett pont, ahol az állandó teherből lényegesen nagyobb tömeg összpontosul, akkor egy *redukált tömeg*et kell meghatározni. A redukált tömeg azt fejezi ki, hogy a folytonos szerkezeten megoszló tömegnek nem minden pontja azonos amplitúdóval rezeg, a támaszok közelében levő pontok kitérése, így a gyorsulásuk is kisebb a szabadságfokénál, ezért ezen pontok tömegének csak egy részét kellene figyelembe venni m számításakor, azaz a teljes m_{tot} tömeg helyett annak csak egy, a szabadságfokra redukált részével dolgozunk.[6]

Kéttámaszú tartó közepén levő szabadságfok esetén észszerűnek tűnhet a két fél tartórész tömegének felét-felét rendere a szakaszok végpontjaiba redukálni.

[6] A szabadságfok speciális felvételével olyan eset is elképzelhető, amikor a folytonos tartó bizonyos pontjainak a kitérése és a gyorsulása nagyobb lesz, mint a szabadságfoké. Ilyen esetben a *redukált* tömeg akár nagyobbra is adódhat a szerkezet teljes tömegénél. A szerkezet egyszabadságfokú modellel történő számításakor viszont jellemzően a legnagyobb kitérésű pontot választjuk szabadságfoknak, így az ilyen eseteket meghagyjuk gondolatkísérlet szintjén.

Ezáltal a támaszok fölé kerül a tartó teljes tömegének egy-egy negyede, míg a szabadságfok fölé összesen két negyed, azaz a tartó teljes tömegének fele:

$$m = m_{tot}/2. \tag{2.3}$$

A folytonos szerkezet rezgését pontosabban követő egyszabadságfokú modellben ugyanennek a gerendának a helyettesítő tömegére az

$$m = \frac{17}{35} m_{tot} \tag{2.4}$$

képletet lehet levezetni. A különbség $\sim 3\%$, ami egyéb anyagjellemzők szórásának ismeretében elhanyagolható különbség.

Egy *mereven befogott konzol* végén levő szabadságfok esetében a támaszhoz közeli pontok mozgása az elfordulást megakadályozó támasz miatt még kisebb a szabadságfokéhoz képest, mint a kéttámaszú tartó esetén, ezért ilyen esetben a redukált tömeg a tartó teljes tömegének csak egyharmada: $m = m_{tot}/3$.

2.1.4. A modell merevsége

2.1.4.1. rugómerevség

A rugó-tömeg modell k rugójában fellépő $f_r(t)$ rugóerőt lineárisan rugalmas rugó esetén az

$$f_r(t) = k \cdot u(t) \tag{2.5}$$

képlettel számolhatjuk, ahol k a rugó *rugómerevsége*, $u(t)$ pedig a rugó *megnyúlása* (alakváltozása). Utóbbit mozdulatlan támasz esetén közvetlenül számolhatjuk a szabadságfok kitéréséből:

$$u(t) = x(t), \tag{2.6}$$

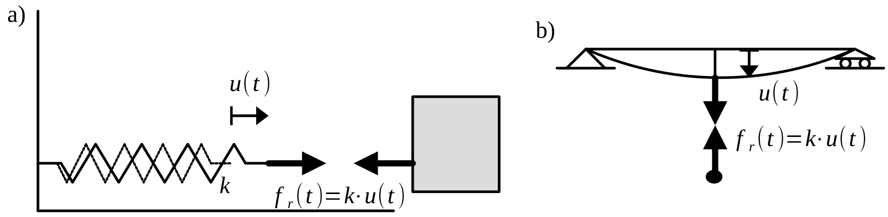
így a rugóerőt az alábbi képlet segítségével helyettesíthetjük be a (2.2) egyenletbe:

$$f_r(t) = k \cdot x(t). \tag{2.7}$$

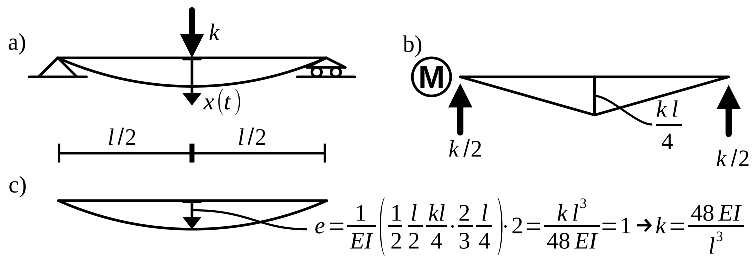
A (2.7) képletből kiolvasható a *rugómerevség fizikai jelentése*: a szabadságfok egységnyi elmozdulása esetén a rugóerő éppen k-val lesz egyenlő, azaz a rugómerevség annak az erőnek a nagysága, ami éppen egységnyi alakváltozást hoz létre a rugóban.

Rugalmas szerkezet esetén a szabadságfokra működtetett statikus erő és a szabadságfok statikus elmozdulása között lineáris kapcsolat van. (Lásd a 2.3.a) és b) ábrákat.) Ebből következik, hogy a szerkezetről a szabadságfokra ható rugalmas visszatérítő erő és a szabadságfok elmozdulása között egy, a (2.7) egyenlethez hasonló kapcsolat van, melyben az arányossági tényező a szerkezet *helyettesítő-*, vagy *ekvivalens rugómerevsége*. Ennek számítására a korábban[7] tanult bármely módszer használható, a alpontban csak azt mutatjuk meg, hogy milyen két alapvető számítási módszer járatos.

[7] Például Tartók statikájából.



2.3. ábra. Rugóerő előfordulása a) tömeg rugó rendszerben, b) diszkretizált folytonos rendszerben.



2.4. ábra. Rugalmas szerkezet helyettesítő merevsége a) a k merevség működtetése a szabadságfokon, b) a paraméteres reakciók és nyomatéki ábra, c) a paraméteres elmozdulás.

2.1.4.2. Rugalmas szerkezet helyettesítő merevsége

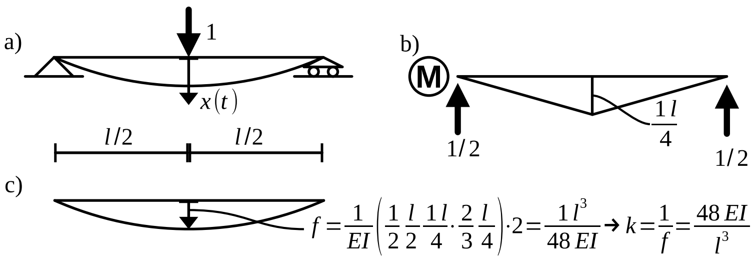
A helyettesítő merevséget a fenti definíciója alapján úgy határozhatjuk meg, hogy a szabadságfokra statikus teherként működtetjük az egyelőre ismeretlen, k paraméterrel jelölt nagyságú erőt, lásd példaként a 2.4.a) ábrát egy kéttámaszú hajlított tartó közepén levő szabadságfok esetén. A teherből meghatározzuk a reakciókat, igénybevételeket, ahogy a példában a 2.4.b) ábrán mutatjuk, majd a tartó elmozdulásait. Az elmozdult alakon a szabadságfok eltolódására vagyunk elsősorban kíváncsiak. Ezt egyenlővé tesszük 1-gyel és a kapott egyenletet megoldjuk k-ra. Ezeket a lépéseket mutatjuk a példa esetén a 2.4.c) ábrán.

Az egyetlen keresett elmozdulás számítására célszerű lehet a *virtuális erők tételét* használni[8]. Ekkor egy virtuális egységerőt működtetünk a szabadságfokon, és az ebből származó virtuális nyomatéki ábra, valamint a tényleges tartó görbületének (azaz a nyomatéki ábra és a hajlítómerevség hányadosának a szorzatintegráljából kapjuk meg a keresett elmozdulást. Ebből a fajta előállítási módból következik, hogy a k erő miatti elmozdulás azonos irányba fog mutatni, mint a k erő, azaz a rugómerevség mindenképpen pozitív lesz.[9]

A fenti számítási módszer hátránya, hogy a statikai számítás során végig egy k paraméter függvényében kell számolnunk a reakciókat, igénybevételeket, elmozdulásokat. Ezt úgy lehet elkerülni, ha bevezetjük a szerkezet *hajlékonyságát*, vagy *engedékenységét*. Jelöljük a hajlékonyságot f-fel és definiáljuk az

[8] Egy geometriailag lehetséges elmozsulásrendszer bármely virtuális erőrendszeren végzett kiegészítő munkája zérus.

[9] Még szép, hiszen a stabil egyensúlyi helyzet megköveteli, hogy a rugalmas visszatérítő erő valóban visszatérítsen.



2.5. ábra. Rugalmas szerkezet engedékenysége, vagy hajlékonysága a) az engedékenység fizikai jelentése, b) a reakciók és nyomatéki ábra az egységerőből, c) az elmozdulás és a merevség.

alábbi módon:

$$f = \frac{1}{k}. \tag{2.8}$$

Az enegdékenységet felhasználva a (2.7) egyenlet átalakítható:

$$x(t) = f \cdot f_r(t). \tag{2.9}$$

Ebből kiolvasható az engedékenység *fizikai jelentése*: az az elmozdulás, ami akkor jön létre, amikor a rugóerő éppen egységnyi. Statikus egyensúlyi helyzetben a rugalmas visszatérítő erő éppen a teherrel egyenlő. Ebből következik az engedékenység számítási módszere is: egy egységerőt kell működtetnünk a szabadságfokon, abból meghatározni a reakciókat, igénybevételeket és végül a szabadságfok elmozdulását. Ez az elmozdulás lesz az f engedékenység, aminek (2.8) alapján a reciproka lesz a helyettesítő merevség:

$$k = \frac{1}{f}. \tag{2.10}$$

Fenti lépéseket a 2.5. ábrán mutatjuk be a már látott kéttámaszú tartó esetén.

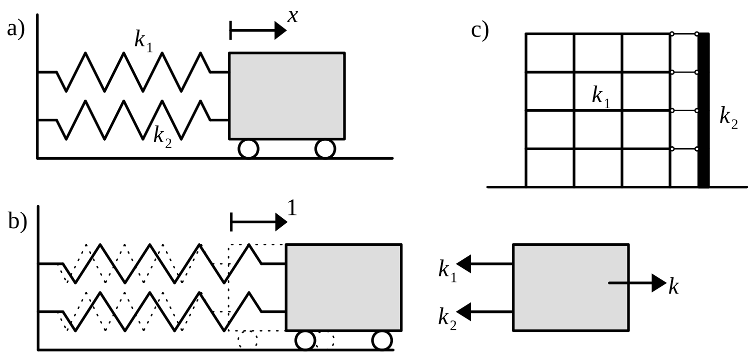
Emlékeztetünk, hogy egyetlen elmozdulás számítására a virtuális erők tétele egy hatékony eszköz. Itt ráadásul a virtuális erőből ugyanaz a virtuális nyomatéki ábra adódik, mint az egységerőből, amiből az elmozdulást akarjuk számolni, azaz a nyomatéki ábrának önmagával vett szorzatintegrálját kell számolni a hajlítómerevséggel való leosztás után.

2.1.4.3. Kapcsolt rugalmas elemek eredő merevsége

Egymáshoz kapcsolódó rugalmas elemek esetén az egyes rugómerevségek helyett egyetlen helyettesítő rugómerevséget kell számolnunk.

- A 2.6.a) ábra a *párhuzamosan kapcsolt* rugók esetét mutatja. A k_1-gyel és k_2-vel jelölt rugó ugyanahhoz a kezdő- és végponthoz csatlakoznak, így a megnyúlásuk azonos lesz, tehát a szabadságfok egységnyi elmozdításakor mindkét rugóban a saját rugómerevségének megfelelő erő lép fel. (Lásd 2.6.b) ábra.) A testre ható rugóerők összegződnek, ezért az elmozdult állapotban az egyensúly biztosításához a két erőnek az összegét kell működtetni a testre, azaz a két rugót helyettesítő egyetlen rugó merevsége:

$$k = k_1 + k_2. \tag{2.11}$$



2.6. ábra. Párhuzamosan kapcsolt rugók helyettesítő merevsége: a) párhuzamosan kapcsolt rugók; b) a merevségek összegzése; c) szerkezeti példa: azonos funkciójú merevítő rendszerek.

A párhuzamosan kapcsolt merevségekre mutat szerkezeti példát a 2.6.c) ábra, ahol egy keretszerkezetet vízszintes merevségét a sarokmerev keret és a külső merevítő mag együttesen biztosítja. Az egyes merevítőelemekből külön-külön számítható merevségeket ilyenkor összegezni lehet.

- A 2.7.a) ábra a *sorba kapcsolt* rugók esetét mutatja. A k_1-gyel és k_2-vel jelölt rugók egymáshoz kapcsolódnak, valamint az egyik a támaszhoz, a másik a mozgó tömeghez. Az egymáshoz kapcsolt rugókban a rugóerő azonos lesz, tehát a szabadságfokra ható egységnyi erő esetén a rugók megnyúlása a saját engedékenységüknek megfelelő f_1 és f_2 érték lesz. (Lásd 2.7.b) ábra.) A rugók megnyúlásai összegződnek, azaz a két rugót helyettesítő rugó engedékenysége az engedékenységek összege lesz:

$$f = f_1 + f_2. \tag{2.12}$$

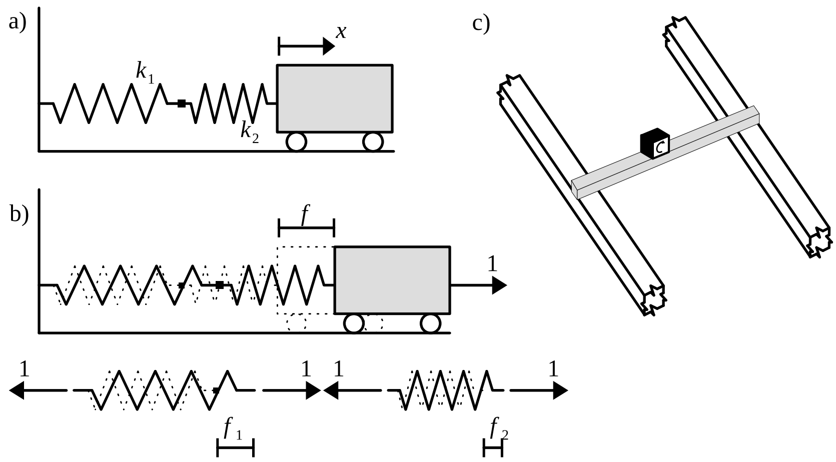
Felhasználva, hogy az engedékenység a merevség reciproka:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \tag{2.13}$$

a helyettesítő rugó merevsége:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}. \tag{2.14}$$

A sorosan kapcsolt merevségekre mutat szerkezeti példát a 2.7.c) ábra, ahol egy kereszttartón elhelyezett gép jelenti a szabadságfokot, a kereszttartó pedig egy főtartóra támaszkodik. A kereszttartó, illetve a főtartó alakváltozásából származó elmozdulásokat külön-külön is számolhatjuk, miközben a másik tartót végtelen merevnek tekintjük. A kereszttartó engedékenysége ekkor egy kéttámaszú tartó lehajlásaként adódik, a főtartó engedékenysége pedig a kereszttartó merevtest-szerű elfordulásából, amikor az egyik támaszának eltolódása rendre egy-egy kéttámaszú főtartó lehajlásával egyenlő.



2.7. ábra. Sorba kapcsolt rugók helyettesítő merevsége: a) sorba kapcsolt rugók; b) az engedékenységek összegzése; c) szerkezeti példa: hierarchikusan egymásra terhelő szerkezetek.

2.1.5. A modell csillapítása

A csillapító elemben ébredő f_c erőt a szabadságfok sebessége határozza meg, ezért modellezése, számítása lényegesen nehezebb, mint a rugóerőé, melyet egyszerű statikus elvek alapján számolhatunk. Ritkán tartószerkezetekbe is beépítenek közvetlen csillapító elemeket, de ilyet inkább gépjárművek felfüggesztő elemeiben figyelhetünk meg. Ugyanakkor sok esetben a szerkezeti kialakítás, vagy az anyag belső szerkezete maguk is eredményeznek a sebességgel ellenkező irányba működő csillapító erőt, amit bizonyos esetekben érdemes figyelembe venni.

E könyvben két csillapítás számítását mutatjuk be: a *viszkózus csillapítás*ét és a *súrlódásos csillapítás*ét.

2.1.5.1. Viszkózus csillapítás

A *sebességgel arányos* viszkózus csillapítás modellje egy viszkózus folyadékkal töltött zárt hengerben mozgó dugattyú. (Lásd 2.8.a) ábra.) A dugattyú egyik oldaláról a másikra átáramló folyadék belső súrlódása miatt a dugattyúra működtetendő erő annak mozgásával ellentétes irányú, és nagysága a sebességgel arányos. Ennek az erőnek az ellentettje hat a tömegpontra (2.8.b)), így a csillapítóerőt az

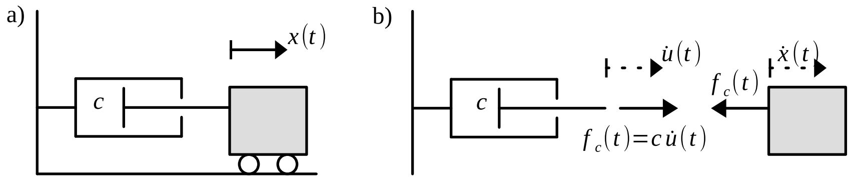
$$f_c(t) = c \cdot \dot{u}(t) \tag{2.15}$$

képlettel számolhatjuk, ahol c a *csillapítás mértéke*, vagy *csillapítási tényező*, $\dot{u}(t)$ pedig a rugó *megnyúlásának sebessége* (alakváltozás-sebessége). Ha a támasz nem mozog, akkor (2.6) deriválásából azt kapjuk, hogy

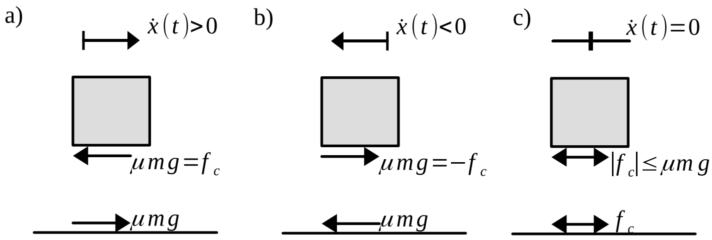
$$\dot{u}(t) = \dot{x}(t), \tag{2.16}$$

így a rugóerőt az alábbi képlet segítségével helyettesíthetjük be a (2.2) egyenletbe:

$$f_c(t) = c \cdot \dot{x}(t) \tag{2.17}$$



2.8. ábra. Csillapító elem: a) a viszkózus folyadékkal töltött hengerben mozgó dugattyú; b) a csillapító elem által kifejtett erő.



2.9. ábra. Súrlódási erő, mint csillapítás a) pozitív irányba mozgó test esetén b) negatív irányba mozgó test esetén c) álló test esetén

2.1.5.2. Súrlódásos csillapítás

A *Coulomb-féle száraz súrlódásos* csillapítás esetén a súrlódási erő a test mozgásával ellenkező irányba működik, nagysága azonban állandó. A 2.9. ábrán azt az esetet mutatjuk, amikor az m tömegű test a μ súrlódási együtthatójú felületen csúszik. A 2.9.a) ábra az előrefelé mozgó ($\dot{u}(t) > 0$) testre ható súrlódási erőt mutatja, ekkor

$$f_c(t) = \mu mg. \tag{2.18}$$

(Az előjelet a 2.2.b) ábra elkülönítésén felvett iránnyal való összevetés alapján kapjuk.) A 2.9.b) ábra a hátrafelé mozgó ($\dot{u}(t) < 0$) testre ható súrlódási erőt mutatja, ekkor

$$f_c(t) = -\mu mg. \tag{2.19}$$

A két egyenletet összegezve tehát, mozgó test esetén a súrlódási erőt az

$$f_c(t) = \mu mg \frac{\dot{x}(x)}{|\dot{x}(x)|}. \tag{2.20}$$

képlettel számolhatjuk.

Álló helyzetben ($\dot{u}(t) = 0$) a súrlódási erőre a

$$|f_c(t)| \leq \mu mg \tag{2.21}$$

feltételt adhatjuk: ha egyensúlyban marad a test, akkor a súrlódási erőt az egyensúlyi egyenletből kapjuk meg, a kapott erőnek ki kell elégítenie a (2.21) feltételt. Ha nem, akkor a test megmozdul és a mozgás irányának megfelelő határértéket veszi fel a súrlódási erő (2.18), vagy (2.19) szerint.

2.1.6. Az egyszabadságfokú rendszer mozgásának differenciálegyenlete

Lineárisan rugalmas szerkezet és sebességgel arányos viszkózus csillapítás esetén a (2.2) mozgásegyenletbe behelyettesíthetjük a rugóerő (2.7) szerinti, és a csillapítóerő (2.17) szerinti alakját. Így kapjuk az egyszabadságfokú, m tömegű, k merevségű, c viszkózus csillapítású, $q(t)$ erővel gerjesztett rendszer mozgásának differenciálegyenletét:

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)}. \tag{2.22}$$

2.1.6.1. Differenciálegyenlet jellemzése, a megoldás használata

A mozgás (2.22) szerinti differenciálegyenlete lineáris, állandó együtthatójú közönséges differenciálegyenlet. Az általános esetre levezetett egyenletet a csillapítás és a gerjesztés függvényében tovább csoportosíthatjuk, esetenként egyszerűsíthetjük.

- A csillapítás elhanyagolása, azaz $c = 0$ esetén *csillapítatlan rezgés*ről beszélünk, $c > 0$ esetén pedig *csillapított rezgés*ről.
- Ha nincsen gerjesztőerő, azaz $q(t) \equiv 0$, akkor a magára hagyott rendszer szabadon mozog, ilyenkor *szebadrezgés*ről beszélünk, $q(t) \neq 0$ esetén pedig *gerjesztett rezgés*ről.

A két-két csoport négyféle kombinációját a továbbiakban az alábbi sorrendben tárgyaljuk. Először a *csillapítatlan rendszer szabadrezgés*ét mutatjuk be a 2.2.1 szakaszban, azaz az

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0 \tag{2.23}$$

homogén, lineáris, állandó együtthatójú hiányos közönséges differenciálegyenlet megoldását. Utána a *csillapított rendszer szabadrezgés*ét mutatjuk be a 2.1.5 szakaszban, részben építve a csillapítatlan rendszer eredményeire, azaz az

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot x(t) = 0 \tag{2.24}$$

homogén, lineáris, állandó együtthatójú közönséges differenciálegyenlet megoldását. Ezt a sorrendet részben követve különböző gerjesztések esetén először a *csillapítatlan rendszer gerjesztett rezgés*t, azaz az

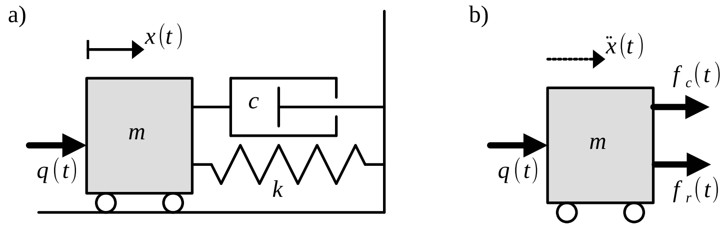
$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t) \tag{2.25}$$

inhomogén, lineáris, állandó együtthatójú hiányos közönséges differenciálegyenlet megoldását mutatjuk. Ezt követi majd rendre a *csillapítatott rendszer gerjesztett rezgés*ének, azaz az

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t) \tag{2.26}$$

inhomogén, lineáris, állandó együtthatójú közönséges differenciálegyenletnek a megoldása.

Látható, hogy a differenciálegyenlet valamennyi esetben lineáris lesz. Nemlineárisan rugalmas szerkezet esetén az $f_r(t)$ erő nem lineárisan függene $x(t)$-től, súrlódásos csillapítás esetén pedig az $f_c(t)$ csillapító erő nem lineárisan függene $\dot{x}(t)$-től (lásd (2.20)). Mindkettő eset a differenciálegyenlet nemlinearitását eredményezné, ami kívül esik ennek a könyvnek a témáján.



2.10. ábra. Egyszabadságfokú rendszer a) modellje (rugó-tömeg modell), b) a tömegpont elkülönítése.

2.1.6.2. Egyéb elrendezések

Vizsgáljuk meg, hogyan befolyásolja a mozgás differenciálegyenletét, ha a rugó-tömeg modellben a támaszt a szabadságfok túlsó oldalára tesszük (2.10.a) ábra). Az elkülönített testet a 2.10.b) ábra mutatja. Newton második törvénye alapján a mozgásegyenlet

$$m\ddot{x}(t) = q(t) + f_r(t) + f_c(t). \tag{2.27}$$

A rugóerőt, illetve a csillapítóerőt most is a rugó megnyúlásából, illetve a megnyúlás sebességéből számolhatjuk a (2.5), illetve (2.15) képletekkel, azonban a rugó megnyúlása és megnyúlásának sebessége most a (2.6) és (2.16) képletek helyett az alábbi módon lesz számítható:

$$u(t) = -x(t), \qquad \dot{u}(t) = -\dot{x}(t). \tag{2.28}$$

Ennek megfelelően a rugóerő és a csillapítóerő a szabadságfok kitérésével és sebességével kifejezve

$$f_r(t) = -k \cdot x(t). \qquad f_c(t) = -c \cdot \dot{x}(t). \tag{2.29}$$

Ezeket behelyettesítve a (2.27) egyenletbe, a kapott differenciálegyenlet:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t). \tag{2.30}$$

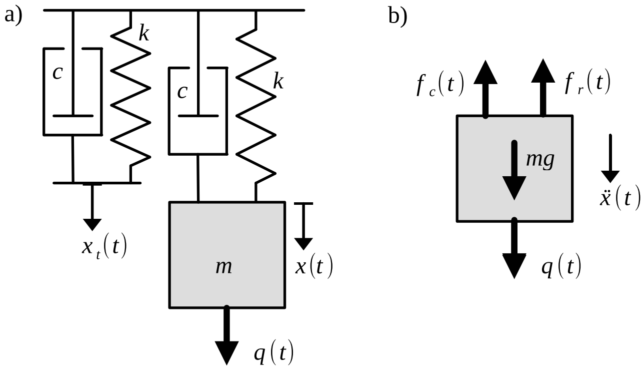
Ez megegyezik a (2.22) differenciálegyenlettel, így megállapíthatjuk, hogy az egyenletet a modell elrendezése (vagy azzal egyenértékűen a koordinátarendszer irányának felvétele) nem befolyásolja.

Vizsgáljuk meg, hogyan befolyásolja a mozgás differenciálegyenletét, ha a rugó-tömeg modellben a tömeget a függőlegesen felfüggesztett rugóra akasztjuk fel, ahogy a 2.11.a) ábra mutatja. Jelölje $x_t(t)$ a tömegpont elmozdulását a *terheletlen* rugó végpontjához képest. Az elkülönítés a $q(t)$ teher, a csillapító erő és a rugóerő mellett most a tömegre ható gravitáció miatti mg erőt is mutatja, ezek alapján felírhatjuk Newton második mozástörvényét:

$$m\ddot{x}_t(t) = q(t) + mg - f_r(t) - f_c(t), \tag{2.31}$$

A szabadságfok elmozdulása a rugó megnyúlásával lesz egyenlő, sebessége pedig a rugó alakváltozás-sebességével. A 2.11.b) ábra szerinti elkülönítésen jelölt $f_r(t)$ és $f_c(t)$ erők értéke így

$$f_r(t) = k \cdot x_t(t), \qquad f_c(t) = c \cdot \dot{x}_t(t) \tag{2.32}$$



2.11. ábra. Egyszabadságfokú rendszer függőleges rugóval a) modell (rugó-tömeg modell), b) a tömegpont elkülönítése.

lesz. Ezeket behelyettesítve (2.31) egyenletébe, átrendezés után az

$$m\ddot{x}_t(t) + c\dot{x}_t(t) + k \cdot x_t(t) = q(t) + mg. \tag{2.33}$$

egyenlet adódik.

Toljuk el a koordinátarendszer kezdőpontját a rugónak tömegpont mg súlya által létrehozott statikus megnyúlással, azaz $\frac{mg}{k}$-val, és az eltolt koordinátarendszerben jelöljük a kitérést $x(t)$-vel. A kétféle koordinátarendszer közötti kapcsolat:

$$x(t) = x_t(t) - \frac{mg}{k}, \tag{2.34}$$

amiből kifejezhető a tömegpont eltolódása, sebessége és gyorsulása:

$$x_t(t) = x(t) + \frac{mg}{k}, \qquad \dot{x}_t(t) = \dot{x}(t), \qquad \ddot{x}_t(t) = \ddot{x}(t) \tag{2.35}$$

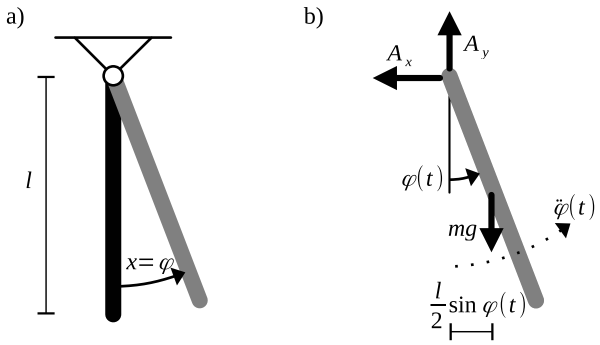
Ezeket behelyettesítve a (2.33) egyenletbe, az mg-vel való egyszerűsítés után az

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t). \tag{2.36}$$

egyenlet adódik. Ez megegyezik a (2.22) differenciálegyenlettel, így megállapíthatjuk, hogy az egyenletet a gravitáció sem befolyásolja, ha a kitérést az egyensúlyi helyzethez képest értelmezzük. Hasonló módon belátható, hogy bármilyen más, statikusan működő erő hatása is kizárható a mozgás differenciálegyenletéből, ha az erő által létrehozott egyensúlyi helyzethez képest mérjük az $x(t)$ kitérést.

2.1.7. Az inga mozgásának differenciálegyenlete

A bevezetőben utaltunk rá, hogy az egyszerű inga is tekinthető egyszabadságfokú rendszerként. Ekkor azonban a mozgásegyenlet egy perdülettételből ered Newton második törvénye helyett. Ezt egy csillapítatlan szabadrezgés esetére mutatjuk meg. A 2.12.a) ábra mutatja az l hosszűságógó, m tömegű homogén prizmatikus rudat, amit a felső végén függesztettünk fel. A 2.12.b) ábra szerinti $\varphi(t)$-vel kitérített helyzetében a felső pontra, mint pillanatnyi forgásközéppontra írhatjuk fel a perdülettételt. Az ingára ható gravitációs erő a kitéréssel ellenkező



2.12. ábra. Az inga, mint egyszabadságfokú rendszer a) modellje, b) a kitérített állapot elkülönítése.

irányba forgatja azt, a rúd inerciája a pillanatnyi forgásközéppontra $\frac{ml^2}{3}$, így a mozgásegyenlet:

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}(t) = -mg \cdot \frac{l}{2}\sin\left(\varphi(t)\right). \tag{2.37}$$

Kis kitérés esetén $\sin\left(\varphi(t)\right) \approx \varphi(t)$, így a mozgás differenciálegyenlete:

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}(t) + mg \cdot \frac{l}{2}\varphi(t) = 0, \tag{2.38}$$

azaz az inga egy olyan csillapítatlan egyszabadságfokú rendszernek felel meg, amelynek a tömege $\frac{ml^2}{3}$, helyettesítő rugómerevsége pedig $\frac{mgl}{2}$.

2.2. Egyszabadságfokú rendszerek szabadrezgése

A magára hagyott szerkezet rezgése, azaz a szabadrezgés azt jelenti, hogy $q(t) \equiv 0$, azaz nincsen teher. Ilyenkor a differenciálegyenlet homogén lesz, aminek az általános megoldását a gerjesztett rezgés inhomogén differenciálegyenletének megoldásához is felhasználjuk, ezért szokás ezzel kezdeni a tárgyalást.

2.2.1. Csillapítatlan rendszer szabadrezgése

A csillapítatlan rendszer szabadrezgésének differenciálegyenlete a (2.22) differenciálegyenletből a csillapítás hiánya miatti $c = 0$ és a szabadrezgés miatti $q(t) = 0$ behelyettesítése után az alábbi alakú lesz:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0, \tag{2.39}$$

melynek olyan $x(t)$ megoldását keressük, ami kielégíti az

$$x(t_0) = x_0, \qquad \dot{x}(t_0) = v_0 \tag{2.40}$$

kezdeti feltételeket, azaz a t_0 időpillanatban a szabadságfok kitérése és sebessége előírt értékű, rendre x_0 és v_0 kell legyen.

Megjegyzés: a (2.39) differenciálegyenletet lehetséges

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0, \tag{2.41}$$

alakban is írni, így a legmagasabb deriváltnak egységnyi az együtthatója, igaz, az egyes tagok fizikai jelentése így nem látszik.

2.2.1.1. Általános megoldás

A (2.39) differenciálegyenlet megoldását keressük

$$x(t) = d \cdot e^{\lambda t} \tag{2.42}$$

alakban. Itt d és λ egyelőre ismeretlen, de állandó paraméterek. A feltételezett megoldásfüggvény első és második deriváltját előállítjuk[10]:

$$\dot{x}(t) = d \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t}, \qquad \ddot{x}(t) = d \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}, \tag{2.43}$$

majd behelyettesítjük a (2.39) egyenletbe:

$$md \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + kd \cdot e^{\lambda t} = 0. \tag{2.44}$$

Kiemelve $d \cdot e^{\lambda t}$ azt kapjuk, hogy:

$$(m \cdot \lambda^2 + k) d \cdot e^{\lambda t} = 0, \tag{2.45}$$

ami akkor lesz bármely t pillanatban igaz, ha a zárójelen belüli kifejezés nulla[11], amit megoldva λ-ra azt kapjuk, hogy:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}}. \tag{2.46}$$

Vezessük be a *sajátkörfrekvencia* fogalmát a következő kifejezéssel:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \tag{2.47}$$

Megjegyzés: a (2.41) differenciálegyenlet a sajátkörfrekvenciát felhasználva tovább egyszerűsödik:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \tag{2.48}$$

A sajátkörfrekvencia, és az $i = \sqrt{-1}$ képzetes egység felhasználásával a (2.46) szerinti két megoldás $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ alakra egyszerűsödik. A két megoldás azt jelenti, hogy a (2.42) szerinti feltételezés helyett a megoldást két függvény lineáris kombinációjaként kapjuk:

$$x(t) = d_1 \cdot e^{i\omega_0 t} + d_2 \cdot e^{-i\omega_0 t}. \tag{2.49}$$

Az Euler-képlet[12] felhasználásával azt kapjuk, hogy:

$$x(t) = d_1 \cdot (\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)) + d_2 \cdot (\cos(-\omega_0 t) + i \sin(-\omega_0 t)), \tag{2.50}$$

amit trigonometrikus azonosságok[13] segítségével átírhatunk

$$x(t) = (d_1 + d_2) \cdot \cos(\omega_0 t) + (d_1 - d_2) \cdot i \cdot \sin(\omega_0 t) \tag{2.51}$$

[10] Az exponenciális függvény deriválásakor a láncszabályt használjuk, ezért jelenik meg szorzótényezőként a λ, mint a belső függvény t szerinti deriváltja

[11] $m \cdot \lambda^2 + k = 0$

[12] $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

[13] $\cos(-x) = \cos(x)$ és $\sin(-x) = -\sin(x)$

alakra. Az $x(t)$ elmozdulás, valamint a trigonometrikus függvények valós értékűek, ezért a $(d_1 + d_2)$ és $i \cdot (d_1 - d_2)$ mennyiségeknek is valósnak kell lenniük[14]. Vezessük be e két paraméter helyére az A és B változókat, így a szabadrezgés diffferenciálegyenletének általános megoldását kapjuk:

$$\boxed{x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 t)} \tag{2.52}$$

Az általános megoldás két periódikus függvény összege[15], és mindkettő függvénynek ugyanaz a periódusideje. Ezt a

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}} \tag{2.53}$$

időt *periódusidő*nek nevezzük[16], és akárcsak a sajátkörfrekvencia, ez is a rendszer jellemzője. Írjuk fel az elmozdulást egy $t + T_0$ pillanatban:

$$x(t + T_0) = A \cdot \cos\left(\omega_0(t + T_0)\right) + B \cdot \sin\left(\omega_0(t + T_0)\right) \tag{2.54}$$

és helyettesítsük be a periódusidő (2.53) definícióját. Egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy:

$$x(t + T_0) = A \cdot \cos\left(\omega_0 t + 2\pi\right) + B \cdot \sin\left(\omega_0 t + 2\pi\right) \tag{2.55}$$

ami a trigonometrikus függvények periodicitása miatt:

$$x(t + T_0) = A \cdot \cos\left(\omega_0 t\right) + B \cdot \sin\left(\omega_0 t\right) = x(t), \tag{2.56}$$

azaz a szabadrezgés megoldása periódikus, sőt, egy ún. *harmonikus rezgőmozgás.*

Az elmozdulások (2.52) szerinti képletét az idő szerint deriválva megkapható a sebesség az idő függvényében:

$$\dot{x}(t) = -A \cdot \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \cdot \omega \cos(\omega_0 t) \tag{2.57}$$

annak deriválásával pedig a gyorsulás:

$$\ddot{x}(t) = -A \cdot \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) - B \cdot \omega_0^2 \cos(\omega_0 t). \tag{2.58}$$

Utóbbiból kiemelve $-\omega_0^2$-et azt találjuk, hogy a gyorsulás az elmozdulással arányos:

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \left(A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t)\right) = -\omega_0^2 \cdot x(t). \tag{2.59}$$

Természetesen a harmonikus rezgőmozgás esetén a sebesség- és gyorsulásfüggvény is azonos periódusidővel változik az időben.

A trigonometrikus függvények átalakítása A szabadrezgés (2.52) képlet szerinti általános megoldását fel lehet írni egyetlen trigonometrikus függvénnyel

$$x(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \tag{2.60}$$

[14]Azaz d_1 és d_2 komplex konjugált párok.
[15]$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ és $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
[16]Mértékegysége: s.

alakban is[17], ahol C a rezgés *amplitúdója*, φ_0 pedig a *fázisszög*. Ekkor a sebesség- és gyorsulásfüggvény is egy-egy trigonometrikus függvénnyel írható fel:

$$\dot{x}(t) = -C\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t - \varphi_0) \text{ és } \ddot{x}(t) = -C\omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi_0). \tag{2.61}$$

Tudva, hogy a szinusz- és koszinuszfüggvény értéke -1 és $+1$ közötti értéket vehet fel, az elmozdulás, sebesség és gyorsulás maximuma a trigonometrikus függvény szorzótényezőjének abszolútértéke lesz:

$$x^{max} = |C|, \qquad v^{max} = |\omega_0 C|, \qquad a^{max} = \left|\omega_0^2 C\right| \tag{2.62}$$

Szögek különbségének koszinuszára vonatkozó trigonometrikus azonossággal[18] átalakítva (2.60)-t azt kapjuk, hogy:

$$x(t) = C\cos\varphi_0 \cos(\omega_0 t) + C\sin\varphi_0 \sin(\omega_0 t). \tag{2.63}$$

Belátható, hogy a (2.52) és (2.63) képletekkel számolt elmozdulások akkor egyenértékűek, azaz akkor lesz a kiszámolt elmozdulás mindkét képlettel számolva minden időpillanatban azonos, ha

$$A = C\cos\varphi_0, \text{ és } B = C\sin\varphi_0. \tag{2.64}$$

A kapcsolat az amplitúdó esetében könnyen megfordítható:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}. \tag{2.65}$$

A fázisszög esetén az

$$\frac{A}{B} = \frac{C\cos\varphi_0}{C\sin\varphi_0} = \mathrm{ctg}\varphi_0 \tag{2.66}$$

összefüggés csak korlátozottan használható:

- A kotangensfüggvény periodicitása π, míg az $x(t)$ függvényt alkotó szinusz- és koszinuszfüggvények periodicitása 2π. Emiatt a φ_0 értékét csak egy $[0, \pi)$ tartományban kapjuk meg a fentiek szerint. Negatív B esetén φ_0 értékéhez hozzá kell adni π-t.
- A $B = 0$ esetben a tört, illetve a kotangens-függvény sem értelmezett. Ilyenkor értelemszerűen a (2.66) kapcsolat reciprokával azaz a $\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{B}{A}$ összefüggéssel számolhatunk, az előző pontot is figyelembe véve pozitív A esetén $\varphi_0 = 0$, negatív A esetén pedig $\varphi_0 = \pi$.

A (2.52) szerinti képlettel megadott rezgés maximális elmozdulását, sebességét, gyorsulását úgy célszerű számolni, hogy a (2.65) képlettel meghatározzuk a rezgés amplitúdóját, majd a (2.62) képlettel kiszámítjuk a keresett értéket[19].

[17] Az időfüggő tagot lehetne $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, $\sin(\omega_0 t - \varphi_0)$ vagy $\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ alakban is írni, különböző területeken szokás ezeket is használni. A paraméterek közötti kapcsolatot ez természetesen befolyásolja, a (2.64) szerinti összefüggések helyett fennálló kapcsolatok felírását gyakorlásképpen meghagyjuk az olvasónak.

[18] $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

[19] Természetesen kereshetjük a szélsőértéket úgy is, hogy ott az első deriváltnak nullának kell lenni. Az így kapott trigonometrikus egyenletből a $\cos(\omega_0 t)/\sin(\omega_0 t)$, vagy a $\sin(\omega_0 t)/\cos(\omega_0 t)$ hányadost lehet kifejezni és egy t értékre megoldani, majd visszahelyettesíteni, azonban ügyelni kell arra, hogy a kapott érték minimum is lehet (ilyenkor a maximum a $t + T_0/2$ időben fog fellépni).

2.2.1.2. A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás

A szabadrezgés feladatának (2.52) szerinti általános megoldásának ismeretében a következő feladat a (2.40) szerinti kezdeti feltételek kielégítése. Ehhez felhasználjuk a (2.57) sebességfüggvényt is. A t_0 időt behelyettesítve az elmozdulás- és sebességfüggvénybe az eredménynek rendre az x_0-lal és v_0-lal kell megegyeznie:

$$\begin{aligned} A\cdot\cos(\omega_0 t_0)+B\cdot\sin(\omega_0 t_0)&=x_0\\ -A\omega_0\cdot\sin(\omega_0 t_0)+B\omega_0\cdot\cos(\omega_0 t_0)&=v_0 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Osszuk le a második egyenletet ω_0-lal és írjuk át a két egyenletet az alábbi mátrixos alakra:

$$\begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t_0) & \sin(\omega_0 t_0)\\ -\sin(\omega_0 t_0) & \cos(\omega_0 t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A\\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0\\ \frac{v_0}{\omega_0} \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

A fenti felírás előnye, hogy az együtthatómátrix ortogonális[20], így a megoldáshoz elegendő a mátrix transzponáltjával szorozni balról:

$$\begin{bmatrix} A\\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t_0) & -\sin(\omega_0 t_0)\\ \sin(\omega_0 t_0) & \cos(\omega_0 t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0\\ \frac{v_0}{\omega_0} \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

A műveletet elvégezve a két paraméterre az alábbi képletet kapjuk:

$$\begin{aligned} A&=\cos(\omega_0 t_0)\cdot x_0-\sin(\omega_0 t_0)\cdot\frac{v_0}{\omega_0}\\ B&=\sin(\omega_0 t_0)\cdot x_0+\cos(\omega_0 t_0)\cdot\frac{v_0}{\omega_0}, \end{aligned} \tag{2.70}$$

azaz a megoldás kezdeti értékeket kielégítő alakja:

$$x(t)=\left[\cos(\omega_0 t_0)\cdot x_0-\sin(\omega_0 t_0)\cdot\frac{v_0}{\omega_0}\right]\cos(\omega_0 t)+\left[\sin(\omega_0 t_0)\cdot x_0+\cos(\omega_0 t_0)\cdot\frac{v_0}{\omega_0}\right]\sin(\omega_0 t) \tag{2.71}$$

A peremfeltételek megadásának egy speciális esete, amikor a (2.40) kezdeti feltételeket a $t_0=0$ pillanatban írjuk elő[21]. Ilyenkor a $\cos 0=1$ és $\sin 0=0$ behelyettesítés elvégzése után a (2.70) kifejezés egyszerűbbé válik:

$$A=x_0,\qquad B=\frac{v_0}{\omega_0}. \tag{2.72}$$

Ezt felhasználva a (2.52) általános megoldásban, a (2.39) differenciálegyenlet $x(0)=x_0$ és $\dot{x}(0)=v_0$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldása:

$$x(t)=x_0\cos(\omega_0 t)+\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t). \tag{2.73}$$

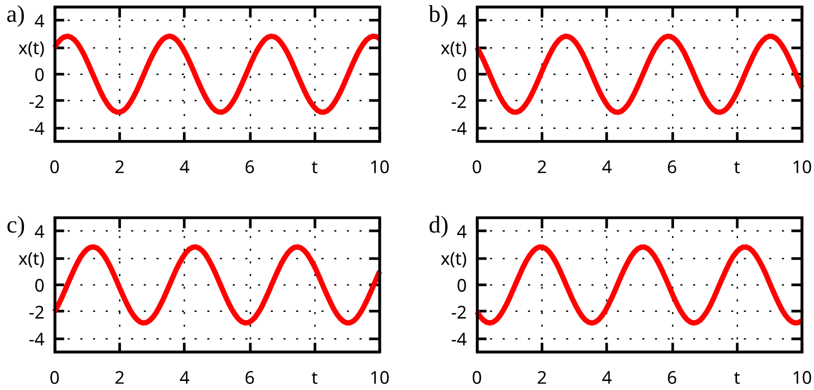
A függvényt különböző kezdeti feltételek mellett ábrázoltuk a 2.13. ábrán.

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás paramétereinek (2.72) szerinti értékeit behelyettesítve (2.64) képletébe könnyen kiolvasható, hogy a rezgés amplitúdója

$$C=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \tag{2.74}$$

[20] Egy $\underline{\underline{A}}$ mátrix ortogonális, ha az inverze megegyezik a transzponáltjával, azaz $\underline{\underline{A}}^{-1}=\underline{\underline{A}}^T$, és ilyenkor $\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}^T=\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}^{-1}=\underline{\underline{I}}$.

[21] Ezt úgy is elérhetjük, hogy úgy toljuk el az időskála kezdőpontját, hogy a $t_0=0$ teljesüljön.



2.13. ábra. Harmonikus rezgés különböző kezdeti feltételek mellett egy $\omega_0 =$ 2rad/s sajátkörfrekvenciájú rendszerben a) $x_0 = 2$m, $v_0 = 5$m/s; b) $x_0 = 2$m, $-v_0 = 5$m/s; c) $-x_0 = 2$m, $v_0 = 5$m/s; d) $-x_0 = 2$m, $-v_0 = 5$m/s.

lesz. Kicsit hosszabb számolással könnyen belátható az is, hogy a nem $t_0 = 0$ pillanatban előírt kezdeti feltételekre (2.70) szerint meghatározott paraméterekkel is a (2.74) képlettel számolható az amplitúdó. Ez a kapcsolat ráadásul nem korlátozódik a kezdeti feltételek pillanatában előírt elmozdulásra és sebességre, hanem bármely t pillanatra igaz, hogy:

$$C = \sqrt{x^2(t) + \left(\frac{v(t)}{\omega_0}\right)^2}. \tag{2.75}$$

Utóbbi állítás bizonyításához a (2.52) és (2.57) függvényeket kell behelyettesíteni, a négyzetremelések elvégzése után pedig egyszerűsíteni a kifejezést.

Megjegyezzük, hogy a $t \neq 0$ pillanathoz megadott $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$ kezdeti feltételeknél is használható a (2.73) egyenlethez hasonlóan egyszerű formula, ha az időskálát eltoljuk t_0-lal. A megoldásfüggvény ebben az esetben

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0(t - t_0)) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_0)). \tag{2.76}$$

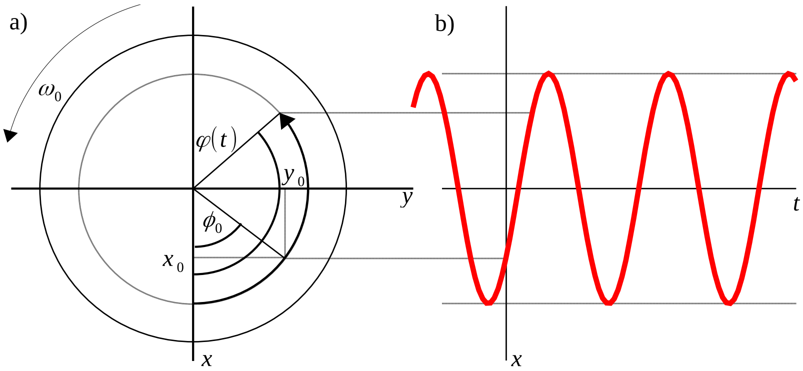
alakban írhatjuk, ami természetesen azonos a (2.71) képletében levezetettel.

2.2.1.3. A harmonikus rezgőmozgás és a körmozgás közötti analógia

Vizsgáljuk meg az xy-koordinátarendszer origója körül ω_0 szögsebességgel forgó merev test egy pontjának a mozgását (lásd a 2.14.a) ábrát). Jelölje x_0 és y_0 a pont $t = 0$ időpillanatbeli koordinátáit. A pont egyenletes körmozgást fog végezni a $C = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ sugarú körön. A $t = 0$ pillanatban az x-tengelyhez képesti ϕ_0 elfordulását a 2.14.a) ábra szerint a

$$\tan\phi_0 = \frac{y_0}{x_0} \tag{2.77}$$

képletből számolhatjuk, azzal a megkötéssel, hogy a 0 és π között kiszámított arkusz-tangens függvény eredményéhez negatív y_0 esetén, illetve zérus y_0 és negatív x_0 esetén még π-t hozzá kell adnunk.



2.14. ábra. Harmonikus rezgés és körmozgás közötti analógia a) az ω_0 szögsebességgel forgó test egy pontja körmozgást végez, b) a körmozgás tetszőleges irányú vetülete egy harmonikus mozgásnak felel meg.

Ezt a kezdeti szögelfordulást is figyelembe véve a pont elfordulása a t pillanatban

$$\varphi(t) = \phi_0 + \omega_0 t \tag{2.78}$$

lesz, az x- és y-koordinátái pedig:

$$x(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t + \phi_0), \qquad y(t) = C \cdot \sin(\omega_0 t + \phi_0). \tag{2.79}$$

A 2.2.1.1 szakasz végén tett megállapításunk alapján a pont mozgásának ezek a vetületei egy-egy harmonikus rezgőmozgásnak felelnek meg (lásd pl. az x-irányt a 2.14.b) ábrán), de bármilyen más irányú vetület esetén hasonló következtetést vonhatnánk le. Ráadásul a $\phi_0 = -\varphi_0$ behelyettesítéssel az $x(t)$ függvény azonos lesz a (2.60) szerinti alakkal.

A pont kezdeti x_0 és y_0 koordinátái egyértelműen meghatározzák a C és φ_0, így ezeken keresztül az A és B paramétereket, vagyis a sík minden pontja egyetlen kezdetifeltétel-párhoz tartozó harmonikus függvényt határoz meg:

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = -y_0\omega_0. \tag{2.80}$$

Az ω_0 sajátkörfrekvenciával rezgő test bármilyen kezdeti feltételek melletti elmozdulásához található egy olyan pontja az origó körül ω_0 szögsebességgel forgó testnek, melynek az x-koordinátája minden pillanatban azonos a rezgő test kitérésével. A harmonikus rezgőmozgás és a körmozgás közötti fenti kapcsolat miatt szerepel a sajátkörfrekvencia elnevezésében a körre való utalás[22].

2.2.1.4. A szerkezetre ható erő számítása

A modell felírásakor a rugóerőre, illetve a rugalmas szerkezet által kifejtett erőre bevezetett (2.7) képlet szerint a rugóról a testre ható erő a t pillanatban egy $-k \cdot x(t)$ nagyságú erő lesz, ami az elmozdulással ellentétes irányba működik. A hatás-ellenhatás törvénye alapján a rugóra ennek ellentettje, azaz egy

$$F(t) = k \cdot x(t) \tag{2.81}$$

[22] Egy másik lehetséges magyarázat, hogy a szó a német *Eigenkreisfrequenz* szó tükörfordítása, akkor viszont az összetett szó *Kreis*, azaz kör elemére lesz érvényes a fenti magyarázat.

nagyságú, az elmozdulással azonos irányba mutató erő fog hatni. Rugalmas szerkezet esetén a rugó–rugalmas szerkezet analógia alapján szintén egy $k \cdot x(t)$ nagyságú erő hat a szerkezetre a szabadságfok helyén[23]. Ebből a kvázistatikus erőből már a statikából ismert módszerekkel lehet a t időben kiszámolni tetszőleges pont igénybevételeit, alakváltozásait.

A helyettesítő erő számításának módszere a k helyettesítő rugómerevség fizikai jelentésének felhasználásával is levezethető. A szabadságfok egységnyi elmozdulását egy, a szabadságfokra működtetett k nagyságú erő eredményezi. Az egységnyi elmozdulás $x(t)$-szeresét a szuperpozíció elve alapján egy $k \cdot x(t)$ nagyságú erő hozza létre, ami azonos a (2.81) képlettel. Ebbe behelyettesítve a $t_0 = 0$ pillanatban előírt kezdeti feltételeket kielégítő (2.73) szerinti megoldást, azt kapjuk, hogy:

$$F(t) = k \cdot \left(x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) \tag{2.82}$$

A további mennyiségeket már ebből a statikusnak tekintett teherből lehet számolni.

A szabadrezgés miatt kialakuló maximális igénybevételek az $F(t)$ erő szélsőértékéből keletkeznek, célszerű számítási menete az erő egy maximumértékének

$$F^{max} = k \cdot x^{max} \tag{2.83}$$

meghatározása után az ebből származó igénybevétel abszolútértékének számítása. A kezdeti feltételeket kielégítő megoldást felhasználva a maximális erő a rezgés amplitúdójára vonatkozó (2.74) kifejezést felhasználva úgy számolható, hogy

$$F^{max} = k \cdot \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0} \right)^2}. \tag{2.84}$$

2.2.2. Csillapított rendszer szabadrezgése

A csillapítatlan rendszer szabadrezgésének differenciálegyenlete a (2.22) differenciálegyenletből a szabadrezgés miatti $q(t) = 0$ behelyettesítése után az alábbi alakú lesz:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \tag{2.85}$$

melynek olyan $x(t)$ megoldását keressük, ami kielégíti az

$$x(t_0) = x_0, \qquad \dot{x}(t_0) = v_0 \tag{2.86}$$

kezdeti feltételeket, azaz a t_0 időpillanatban a szabadságfok kitérése és sebessége előírt értékű, rendre x_0 és v_0 kell legyen.

Megjegyzés: a (2.85) differenciálegyenletet lehetséges

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0, \tag{2.87}$$

alakban is írni, így a legmagasabb deriváltnak egységnyi az együtthatója, igaz, az egyes tagok fizikai jelentése így nem látszik.

[23] A modellezési elvek határain belül, azaz ha a folytonos szerkezet tömegét a szabadságfokba koncentráljuk, vagy elhanyagoljuk.

2.2.2.1. Általános megoldás

A (2.85) differenciálegyenlet megoldását keressük

$$x(t) = d \cdot e^{\lambda t} \tag{2.88}$$

alakban. Itt d és λ egyelőre ismeretlen, de állandó paraméterek. A feltételezett megoldásfüggvény első és második deriváltját előállítjuk[24]:

$$\dot{x}(t) = d \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t}, \qquad \ddot{x}(t) = d \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}, \tag{2.89}$$

majd behelyettesítjük a (2.85) egyenletbe:

$$md \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + cd \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} + kd \cdot e^{\lambda t} = 0. \tag{2.90}$$

Kiemelve $d \cdot e^{\lambda t}$ azt kapjuk, hogy:

$$(m \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + k) d \cdot e^{\lambda t} = 0, \tag{2.91}$$

ami akkor lesz bármely t pillanatban igaz, ha a zárójelen belüli kifejezés nulla[25], amit a másodfokú egyenlet megoldóképletével megoldva λ-ra azt kapjuk, hogy:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \tag{2.92}$$

A további vizsgálatok előtt vezessük be a ρ mérőszámot

$$\rho = \frac{c}{2 \cdot m} \tag{2.93}$$

a tömegre fajlagosított csillapítás jellemzésére. Felismerve, hogy a $\frac{k}{m}$ hányados a (2.47) képlet szerint a csillapítás nélküli azonos rendszer sajátkörfrekvenciájának a négyzete, a két λ paramétert egyszerűbben is írhatjuk:

$$\lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2} \tag{2.94}$$

A csillapítás további jellemzésére vezessük be a kritikus csillapítás értékét az alábbi definícióval:

$$c_{kr} = 2\sqrt{km} \tag{2.95}$$

A kritikus csillapítás tömegre fajlagosított értéke

$$\rho_{kr} = \frac{c_{kr}}{2 \cdot m} = \frac{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}}{2 \cdot m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0 \tag{2.96}$$

lesz. A kritikus csillapítást felhasználva a csillapítás c értékét a ξ *csillapítási hányad* segítségével is megadhatjuk:

$$c = \xi \cdot c_{kr}. \tag{2.97}$$

---

[24] Az exponenciális függvény deriválásakor a láncszabályt használjuk, ezért jelenik meg szorzótényezőként a λ, mint a belső függvény t szerinti deriváltja

[25] $m \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + k = 0$

aminek a felhasználásával a korábban bevezetett tömegre fajlagosított csillapítás kifejezhető a csillapítási hányad és a csillapítás nélküli sajátkörfrekvencia segítségével:

$$\rho = \frac{\xi \cdot 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}}{2 \cdot m} = \xi \omega_0. \tag{2.98}$$

Megjegyzés: ezzel a mozgás differenciálegyenletének (2.87) szerinti alakja

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0 \dot{x}(t) + \omega_0^2 \frac{k}{m} x(t) = 0, \tag{2.99}$$

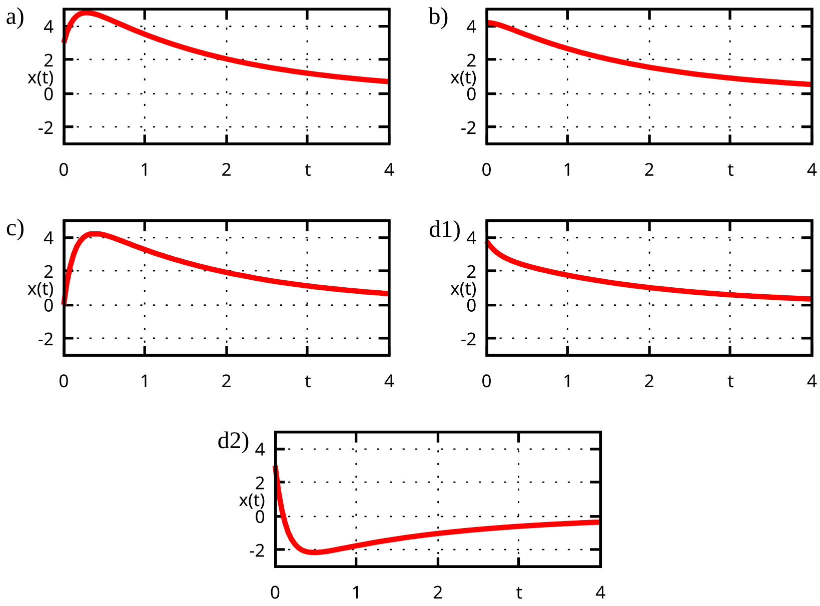
lesz.

A továbbiakban a (2.94) eredményének felhasználásakor három esetet kell megkülönböztetni:

- *Nagy csillapítás:* ha $c > c_{kr}$, $\rho > \rho_{kr}$, ill. $\xi > 1$[26].
Ilyenkor a (2.94) megoldásban a gyökjel alatt pozitív szám szerepel, ezért λ_1 és λ_2 két (negatív) valós szám lesz. A mozgásegyenlet általános megoldása:
$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \tag{2.100}$$
ahol a valós A és B paramétereket a kezdeti feltételekből lehet meghatározni. A kitevőkben szereplő negatív λ_1 és λ_2 miatt az általános megoldás mindkét tagja időben exponenciálisan csökkenő abszolútértékű monoton függvény lesz. A (2.100) szerinti megoldásfüggvénynek azonos előjelű A és B esetén minden t-re azokkal megegyező előjele lesz, így a megoldásfüggvény is monoton lesz. Olyan kezdeti feltételek esetén, amikből ellenkező előjelű A és B paraméterek adódnak a (2.100) szerinti $x(t)$ függvénynek pontosan egy zérushelye, és egy, azt időben követő szélsőértékhelye van (bár előfordulhat, hogy ezek egyike, vagy mindegyike a kezdeti értéket megadó t_0 pillanat előtt következik be). A szélsőértéket követően az elmozdulásfüggvény már monoton lesz, így megállapíthatjuk, hogy nagy csillapítás esetén tényleges rezgés (azaz oda-vissza mozgás) nem alakul ki. A lehetséges kialakuló elmozdulásfüggvények jellegét a 2.15 ábrán mutatjuk be.

- *Kritikus csillapítás:* ha $c = c_{kr}$, $\rho = \rho_{kr}$, ill. $\xi = 1$[26].
Ilyenkor a (2.94) megoldásban a gyökjel alatt nulla szerepel, ezért a $\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_0$ megoldás multiplicitása kettő. A mozgásegyenlet általános megoldásakor ezt úgy tudjuk figyelembe venni, hogy a korábban feltételezett $e^{\lambda t}$ mellett a $t \cdot e^{\lambda t}$ függvényt is felhasználjuk:
$$x(t) = A \cdot e^{-\omega_0 t} + B \cdot t \cdot e^{-\omega_0 t}, \tag{2.101}$$
ahol a valós A és B paramétereket a kezdeti feltételekből lehet meghatározni. A $t \cdot e^{-\omega_0 t}$ függvénynek $t = 0$-nál van zérushelye és a $t > 1/\omega_0$ tartományban monoton csökkenő függvény lesz, kellően nagy t esetén tehát a (2.101) megoldás is két csökkenő abszolútérékű monoton függvény összege lesz, azaz kritikus csillapítás esetén sem alakul ki tényleges rezgés. A mozgás jellege a 2.15. ábrán bemutatottak valamelyikéhez lesz hasonló.

[26] A három feltételből vagy mindegyik teljesül, vagy egyik sem.



2.15. ábra. Nagy csillapítású rendszer mozgása különböző kezdeti feltételek mellett a) $x_0 > 0$ és $v_0 > 0$, b) $x_0 > 0$ és $v_0 = 0$, c) $x_0 = 0$ és $v_0 > 0$, d1) $x_0 > 0$ és $v_0 < 0$, d2) $x_0 > 0$ és $v_0 < 0$.

- *Kis csillapítás:* ha $c < c_{kr}$, $\rho < \rho_{kr}$, ill. $\xi < 1$[26].
  Ilyenkor a (2.94) megoldásban a gyökjel alatt negatív szám szerepel, ezért λ_1 és λ_2 megoldások komplex konjugált párok lesznek. A mozgásegyenlet általános megoldásához vezessük be a csillapított sajátkörfrekvenciát a csillapítás nélküli sajátkörfrekvencia $\sqrt{1-\xi^2}$-szereseként:

$$\omega_0^* = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}, \tag{2.102}$$

és alakítsuk át a (2.94) kifejezés képzetes tagját:

$$\begin{aligned}\sqrt{\rho^2-\omega_0^2} &= \sqrt{-\cdot(\omega_0^2-\rho^2)} = \sqrt{(-1)}\cdot\sqrt{\omega_0^2-(\xi\omega_0)^2}\\ &= i\cdot\sqrt{\omega_0^2(1-\xi^2)} = i\cdot\omega_0\sqrt{1-\xi^2} = \boxed{i\cdot\omega_0^*}.\end{aligned} \tag{2.103}$$

A mozgásegyenlet általános megoldása ezután:

$$x(t) = d_1\cdot e^{(-\xi\omega_0+i\omega_0^*)t} + d_2\cdot e^{(-\xi\omega_0-i\omega_0^*)t}. \tag{2.104}$$

Bontsuk fel az exponenciális kitevőkben szereplő tagokat két-két exponenciális tag szorzatára:

$$x(t) = d_1\cdot e^{(-\xi\omega_0)t}\cdot e^{+i\omega_0^*t} + d_2\cdot e^{(-\xi\omega_0)t}\cdot e^{-i\omega_0^*t}. \tag{2.105}$$

és emeljük ki a valós kitevőjű tagot:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\cdot\left(d_1\cdot e^{+i\omega_0^*t} + d_2\cdot e^{-i\omega_0^*t}\right). \tag{2.106}$$

A zárójelen belüli kifejezést a csillapítatlan rezgéseknél látott módon átalakíthatjuk egy harmonikus függvénnyé a (2.49)-(2.52) egyenletek lépéseit követve. E harmonikus rezgés körfrekvenciája ω_0^*. Ezzel a kis csillapítású egyszabadságfokú rendszer szabadrezgésének általános megoldása:

$$\boxed{x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \left(A \cdot \cos(\omega_0^* t) + B \cdot \sin(\omega_0^* t)\right).} \tag{2.107}$$

Az általános megoldás tehát az exponenciálisan lecsengő $e^{-\xi\omega_0 t}$ függvény és egy harmonikus függvény szorzata. Összehasonlítva a csillapítatlan rendszer szabadrezgésének (2.52) szerinti megoldásával azt állapíthatjuk meg, hogy a harmonikus függvényben szereplő csillapított sajátkörfrekvencia miatt a harmonikus tag periódusideje nagyobb lesz:

$$T_0^* = \frac{2\pi}{\omega_0^*} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}}, \tag{2.108}$$

miközben az amplitúdó sem marad állandó, hanem folyamatosan csökken.

A logaritmikus dekrementum Vizsgáljuk meg a kis csillapítású rendszerben a szabadságfok kitérését két, egymástól T_0^*-gal eltérő pillanatban! Ha a kitérések értéke ebben a pillanatban nem 0, akkor a hányadosuk[27]:

$$\frac{x(t)}{x(t+T_0^*)} = \frac{e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \left(A \cdot \cos(\omega_0^* t) + B \cdot \sin(\omega_0^* t)\right)}{e^{-\xi\omega_0 (t+T_0^*)} \cdot \left(A \cdot \cos(\omega_0^*(t+T_0^*)) + B \cdot \sin(\omega_0^*(t+T_0^*))\right)}. \tag{2.109}$$

Felbontva a $t + T_0^*$ összegeket és behelyettesítve a (2.108) szerinti $\omega_0^* T_0^* = 2\pi$-t:

$$\frac{x(t)}{x(t+T_0^*)} = \frac{e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \left(A \cdot \cos(\omega_0^* t) + B \cdot \sin(\omega_0^* t)\right)}{e^{-\xi\omega_0 t} \cdot e^{-\xi\omega_0 T_0^*} \cdot \left(A \cdot \cos(\omega_0^* t + 2\pi) + B \cdot \sin(\omega_0^* t + 2\pi)\right)} \tag{2.110}$$

A szinusz- és koszinuszfüggvények periodicitása miatt a zárójeles tagok a számlálóban és a nevezőben azonosak. Ezekkel és az azonos exponenciális kifejezésekkel egyszerűsítve:

$$\frac{x(t)}{x(t+T_0^*)} = \frac{1}{e^{-\xi\omega_0 T_0^*}} = e^{\xi\omega_0 T_0^*} = e^{2\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \tag{2.111}$$

A hányados tehát a kiválasztott t pillanattól függetlenül egy, csak a ξ csillapítási hányadtól (azaz a csillapítástól) függő érték, ami akár a csillapítás jellemzésére is használható. A gyakorlatban nem magát a hányadost, hanem annak természetes alapú logaritmusát használjuk, amit ϑ-val jelölünk és *logaritmikus dekrementum*nak hívunk:

$$\vartheta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T_0^*)}\right). \tag{2.112}$$

A logaritmikus dekrementumot a (2.111) összefüggés alapján kiszámolhatjuk a csillapítási hányad segítségével is:

$$\vartheta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{2.113}$$

[27]Ha a hányadosuk 0, akkor a L'Hôpital-szabályt kellene használni azonos eredménnyel.

A szerkezeti anyagoknál jellemzően egynél lényegesen kisebb csillapítási hányadok fordulnak elő. (Inkább a $\xi \approx 0,1$-es nagyságrend a jellemző.) Ebben a tartományban a $\sqrt{1-\xi^2}$ nevező 1-nek vehető, így ilyenkor közelítőleg:

$$\vartheta \approx 2\pi\xi. \tag{2.114}$$

A logaritmikus dekrementum gyakorlati haszna a szerkezetdiagnosztikában jelentős. Már meglévő szerkezetek esetén roncsolásmentesen lehet anyagjellemzőket meghatározni a szabadrezgés, illetve annak lecsengése segítségével.

2.2.2.2. A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás

A (2.85) differenciálegyenlet (2.107) általános megoldásának A és B paramétereit úgy kell meghatározni, hogy a megoldás kielégítse a (2.86) kezdeti feltételeket. A sebességfüggvény a (2.107) általános megoldás idő szerinti deriváltjaként adódik[28]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = -\xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t}\cdot\left(A\cdot\cos(\omega_0^* t) + B\cdot\sin(\omega_0^* t)\right) + \\ +\omega_0^* e^{-\xi\omega_0 t}\cdot\left(-A\cdot\sin(\omega_0^* t) + B\cdot\cos(\omega_0^* t)\right).\end{aligned} \tag{2.115}$$

A kezdeti feltételeket behelyettesítve az egyenletrendszert az alábbi alakban tudjuk felírni:

$$\begin{aligned}x_0 &= e^{-\xi\omega_0 t_0}\cdot\left(A\cdot\cos(\omega_0^* t_0) + B\cdot\sin(\omega_0^* t_0)\right)\\ v_0 &= \omega_0 e^{-\xi\omega_0 t_0}\cdot\Big[A\cdot\Big(-\xi\cos(\omega_0^* t_0) - \sqrt{1-\xi^2}\sin(\omega_0^* t_0)\Big) + \\ &\quad +B\cdot\Big(-\xi\sin(\omega_0^* t_0) + \sqrt{1-\xi^2}\cos(\omega_0^* t_0)\Big)\Big].\end{aligned} \tag{2.116}$$

Mindezt átírhatjuk mátrixos alakra:

$$e^{\xi\omega_0 t_0}\begin{bmatrix} x_0 \\ \frac{v_0}{\omega_0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0^* t_0) & \sin(\omega_0^* t_0) \\ -\sqrt{1-\xi^2}\sin(\omega_0^* t_0) - \xi\cos(\omega_0^* t_0) & \sqrt{1-\xi^2}\cos(\omega_0^* t_0) - \xi\sin(\omega_0^* t_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B\end{bmatrix} \tag{2.117}$$

Aminek a megoldásához a mátrix inverzével kell jobbról szoroznunk az egyenletet[29]. Ennek eredménye:

$$\begin{bmatrix} A \\ B\end{bmatrix} = \frac{e^{\xi\omega_0 t_0}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\begin{bmatrix} \sqrt{1-\xi^2}\cos(\omega_0^* t_0) - \xi\sin(\omega_0^* t_0) & -\sin(\omega_0^* t_0) \\ \sqrt{1-\xi^2}\sin(\omega_0^* t_0) + \xi\cos(\omega_0^* t_0) & \cos(\omega_0^* t_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ \frac{v_0}{\omega_0}\end{bmatrix}. \tag{2.118}$$

A feladatot most is jelentősen megkönnyíti, ha a kezdeti feltételeket a $t_0 = 0$ pillanatban írjuk elő. Ebben az esetben a két paraméter értéke:

$$A = x_0, \qquad B = \frac{v_0}{\omega_0^*} + \frac{\xi x_0}{\sqrt{1-\xi^2}}, \tag{2.119}$$

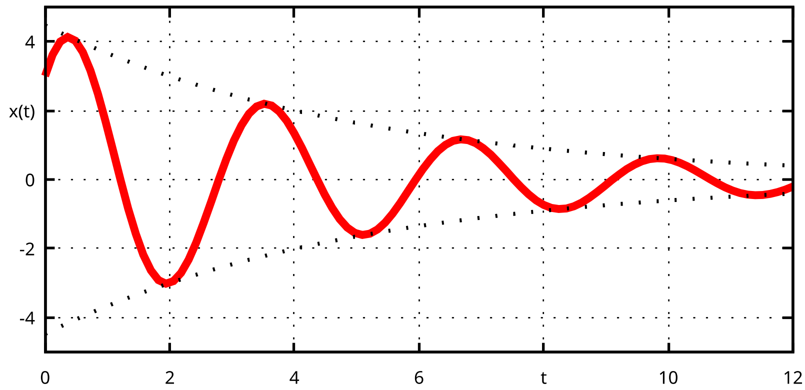
azaz az $x(0) = x_0$ és $\dot{x}(0) = v_0$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\cdot\left(x_0\cdot\cos(\omega_0^* t) + \left(\frac{v_0}{\omega_0^*} + \frac{\xi x_0}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\cdot\sin(\omega_0^* t)\right). \tag{2.120}$$

---

[28] Felhasználva a szorzatderiválásra vonatkozó szabályt *és* a láncszabályt is.

[29] A 2×2-es $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ mátrix inverze $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}$, a determináns jelen esetben $\sqrt{1-\xi^2}$.



2.16. ábra. Csillapított rendszer szabadrezgése: az elmozdulásfüggvény (2.120) képlettel számolt függvénye az exponenciális burkolóval.

Az így kapott rezgést a 2.16.ábrán szemléltetjük, szaggatott vonallal jelölve az exponenciális burkolót. Ahogyan az a sebességfüggvény (2.115) képletéből is kiolvasható, úgy az ábrán is látható, hogy az elmozdulások lokális szélsőértékei (azaz amikor $\dot{x}(t) = 0$) nem akkor lépnek fel, amikor az $A\cos(\omega_0^* t) + B\sin(\omega_0^* t)$ harmonikus függvénynek szélsőértéke van. Utóbbi akkor következik be, amikor a függvény éppen érinti az exponenciális burkolót, és rendre a szélsőértékek után fordul elő.

Ha a kezdeti feltételek nem $t = 0$ pillanatban voltak előírva, akkor a csillapítatlan rendszernél látott eltolást (lásd (2.76)) a csillapított rendszernél is alkalmazhatjuk, ekkor a (2.120) egyenlet alakja az alábbi lesz:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0(t-t_0)} \cdot \left(x_0 \cdot \cos(\omega_0^*(t-t_0)) + \left(\frac{v_0}{\omega_0^*} + \frac{\xi x_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \cdot \sin(\omega_0^*(t-t_0)) \right). \tag{2.121}$$

Az exponenciális és a harmonikus függvények felbontása alapján belátható, hogy itt is a (2.118) képlete szerinti együtthatókat kaptuk az általános megoldáshoz.

Végül megjegyezzük, hogy a $\xi = 0$ csillapítatlan esetben minden képlettel visszakapjuk a 2.2.1. szakaszban kapott eredményeinket.

2.2.3. Energiák az egyszabadságfokú rendszer szabarezgése közben

A szabadrezgés során a szabadságfok oda-vissza mozgása miatt az anyagi pont sebessége, valamint a rugó megnyúlása folyamatosan változik az időben. Előbbi miatt a mozgási energia, utóbbi miatt a rugóban (rugalmas szerkezetben) felhalmozódott alakváltozási energia változik az időben. A mozgási, vagy kinetikus energia a

$$K(t) = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2(t) \tag{2.122}$$

képlettel számolható, míg az alakváltozási energia az

$$U(t) = \frac{1}{2} k \cdot x^2(t) \tag{2.123}$$

képlettel számolható. A rezgésegyenlet általános megoldásának ismeretében tanulságos lehet ezeknek a részletesebb vizsgálata.

2.2.3.1. Csillapítatlan rendszer szabadrezgése

Helyettesítsük be a (2.39) differenciálegyenlet (2.52) általános megoldását és annak (2.57) idő szerinti deriváltját az alakváltozási energia (2.123) és a mozgási energia (2.122) képletébe:

$$U(t) = \frac{1}{2}k \cdot \left(A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\right)^2 \tag{2.124}$$

$$K(t) = \frac{1}{2}m \cdot \omega_0^2 \left(-A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)\right)^2 \tag{2.125}$$

Alakítsuk át az alakváltozási energia (2.124) képletében a négyzetes tagot az alábbiak szerint[30]:

$$\begin{aligned}
&\left(A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\right)^2 = \\
&\quad A^2\cos^2(\omega_0 t) + B^2\sin^2(\omega_0 t) + 2AB\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) = \\
&\left(\frac{A^2+B^2}{2} + \frac{A^2-B^2}{2}\right)\cos^2(\omega_0 t) + \left(\frac{A^2+B^2}{2} - \frac{A^2-B^2}{2}\right)\sin^2(\omega_0 t) + \\
&\quad + 2AB\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) = \\
&\frac{A^2+B^2}{2}\left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right) + \frac{A^2-B^2}{2}\left(\cos^2(\omega_0 t) - \sin^2(\omega_0 t)\right) + \\
&\quad + 2AB\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) = \\
&\quad \frac{A^2+B^2}{2} + \frac{A^2-B^2}{2}\cos(2\omega_0 t) + AB\sin(2\omega_0 t)
\end{aligned} \tag{2.126}$$

Azaz az eredmény egy konstans tag, amely körül a $2\omega_0$ körfrekvenciájú két harmonikus függvénynek megfelelően „rezeg” a mennyiség. E „rezgésnek” az amplitúdója:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\left(\frac{A^2-B^2}{2}\right)^2 + (AB)^2} = \sqrt{\frac{A^4+B^4-2A^2B^2}{4} + \frac{4A^2B^2}{4}} = \\
&\quad = \sqrt{\frac{A^4+B^4+2A^2B^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{A^2+B^2}{2}\right)^2} = \frac{A^2+B^2}{2},
\end{aligned} \tag{2.127}$$

azaz éppen az átlagos értékel egyezik meg. Ezt felhasználva az alakváltozási energia képletében:

$$U(t) = \frac{1}{2}k \cdot \left(\frac{A^2+B^2}{2} + \frac{A^2-B^2}{2}\cos(2\omega_0 t) + AB\sin(2\omega_0 t)\right) \tag{2.128}$$

Az is olyan, periódikusan változó függvény lesz, ami a $\frac{k}{2}\frac{A^2+B^2}{2}$ átlagérték körül $\frac{k}{2}\frac{A^2+B^2}{2}$ amplitúdó szerint változik.

[30] Közben felhasználva a $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ és a $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ azonosságokat.

Most alakítsuk át a mozgási energia (2.125) képletében a négyzetes tagot az alábbiak szerint:

$$
\begin{aligned}
&(-A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t))^2 = \\
&\qquad A^2\sin^2(\omega_0 t) + B^2\cos^2(\omega_0 t) - 2AB\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) = \\
&\left(\frac{A^2+B^2}{2} + \frac{A^2-B^2}{2}\right)\sin^2(\omega_0 t) + \left(\frac{A^2+B^2}{2} - \frac{A^2-B^2}{2}\right)\cos^2(\omega_0 t) - \\
&\qquad - 2AB\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) = \\
&\frac{A^2+B^2}{2}\left(\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)\right) + \frac{A^2-B^2}{2}\left(\sin^2(\omega_0 t) - \cos^2(\omega_0 t)\right) - \\
&\qquad - 2AB\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t) = \\
&\qquad \frac{A^2+B^2}{2} - \frac{A^2-B^2}{2}\cos(2\omega_0 t) - AB\sin(2\omega_0 t)
\end{aligned}
\tag{2.129}
$$

Az eredmény most is egy konstans tag, amely körül a $2\omega_0$ körfrekvenciájú két harmonikus függvénynek megfelelően „rezeg” a mennyiség. E „rezgésnek” az amplitúdója:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\left(-\frac{A^2-B^2}{2}\right)^2 + (-AB)^2} = \sqrt{\frac{A^4+B^4-2A^2B^2}{4} + \frac{4A^2B^2}{4}} = \\
&\qquad = \sqrt{\frac{A^4+B^4+2A^2B^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{A^2+B^2}{2}\right)^2} = \frac{A^2+B^2}{2},
\end{aligned}
\tag{2.130}
$$

azaz éppen az átlagos értékel egyezik meg. Ezt felhasználva a mozgási energia képletében:

$$
K(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 \cdot \left(\frac{A^2+B^2}{2} - \frac{A^2-B^2}{2}\cos(2\omega_0 t) - AB\sin(2\omega_0 t)\right) \tag{2.131}
$$

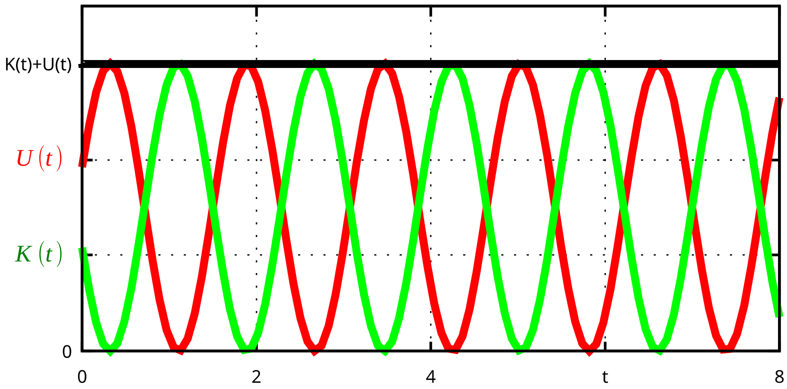
ez is olyan, periódikusan változó függvény lesz, ami a $\frac{m\omega_0^2}{2}\frac{A^2+B^2}{2}$ átlagérték körül $\frac{m\omega_0^2}{2}\frac{A^2+B^2}{2}$ amplitúdó szerint változik.

A két energia összegét *mechanikai energiának* nevezzük. A csillapítatlan rendszer szabadrezgése során külső erő nem hat, a rugóerő pedig úgynevezett potenciális erő (a potenciálfüggvénye éppen az U-val egyezik meg, ezért a mechanikai energia állandóságának tétele szerint az összegük minden időpillanatban ugyanakkora. Valóban, felhasználva a $k = m\omega_0^2$ összefüggést és összegezve a (2.128) és (2.131) egyenleteket, az egyszerűsítések elvégzése után azt kapjuk, hogy:

$$
U(t) + K(t) = konst. = \frac{k}{2}\cdot\left(A^2+B^2\right) = \frac{m\omega_0^2}{2}\cdot\left(A^2+B^2\right). \tag{2.132}
$$

Azt is tudjuk, hogy az $A^2 + B^2$ összeg a rezgés amplitúdójának négyzetével egyenlő, a sebesség maximuma pedig a kitérés maximumának ω_0-szorosa. Ezeket felhasználva a mechanikai energiát:

$$
U(t) + K(t) = \frac{k \cdot x_{max}^2}{2} = \frac{m \cdot \dot{x}_{max}^2}{2} \tag{2.133}
$$



2.17. ábra. A mozgási (zöld), alakváltozási (piros) és mechanikai (fekete) energia időbeli változása egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer szabadrezgése során.

alakban is számolhatjuk. A két képlet közül az első tag az alakváltozási, a második a mozgási energia maximumát adják meg. E kettő egymással egyenlő és rendre akkor lépnek fel, amikor a másik értéke éppen a minimális, azaz 0 lesz. A 2.17.ábrán mutatjuk a három energia fenti képletek szerinti időbeli lefutását.

2.2.3.2. Sebességgel arányos csillapítású rendszer szabadrezgése

Most a (2.85) differenciálegyenlet (2.107) általános megoldását és annak (2.115) idő szerinti deriváltját helyettesítsük be az alakváltozási energia (2.123) és a mozgási energia (2.122) képletébe:

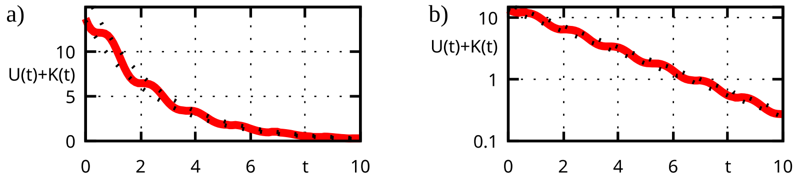
$$U(t) = \frac{1}{2}k \cdot e^{-2\xi\omega_0 t} \cdot [A \cdot \cos(\omega_0^* t) + B \cdot \sin(\omega_0^* t)]^2 \tag{2.134}$$

$$\begin{aligned} K(t) = \frac{1}{2}m \cdot \omega_0^2 \cdot e^{-2\xi\omega_0 t} \cdot \Big[&\Big(-A\xi + B\sqrt{1-\xi^2}\Big)\cos(\omega_0^* t) + \\ &\Big(-A\sqrt{1-\xi^2} - B\xi\Big)\sin(\omega_0^* t)\Big]^2 . \end{aligned} \tag{2.135}$$

A két energiafüggvényben közös, hogy egy $k/2$ nagyságú konstans, az $e^{-2\xi\omega_0 t}$ exponenciális tag, és egy ω_0^* körfrekvenciájú harmonikus függvény négyzetének a szorzata. A szögletes zárójeleken belüli két harmonikus függvény amplitúdója azonos ($A^2 + B^2$), ezért a négyzetre emelés után mindkét függvény nulla és az amplitúdó négyzete között fog változni. A két harmonikus függvény fázisának eltérése azonban a csillapítás miatt nem $\pi/2$, így a négyzeteik összege nem konstans.

Emiatt a mechanikai energia

$$\begin{aligned} U(t) + K(t) = \frac{k}{2}e^{-2\xi\omega_0 t} \cdot \Big(&[A \cdot \cos(\omega_0^* t) + B \cdot \sin(\omega_0^* t)]^2 + \\ \Big[\Big(-A\xi + B\sqrt{1-\xi^2}\Big)\cos(\omega_0^* t) + &\Big(-A\sqrt{1-\xi^2} - B\xi\Big)\sin(\omega_0^* t)\Big]^2 \Big) \end{aligned} \tag{2.136}$$



2.18. ábra. Kis csillapítású rendszer mechanikai energiája: a) exponenciális lecsengés közelében váltakozó érték az idő függvényében; b) az exponenciális lecsengés logaritmikus skálán egyenes.

nem exponenciálisan cseng le, hanem egy exponenciális alsó és felső burkoló között, ahogy az a 2.18.a) ábrán látható. A görbén $T_0^*/2$ időnként követik egymást vízszintes érintőjű pontok: az energiaveszteség a csillapítóelemben történik, amikor a pont megáll egy-egy maximális vagy minimális kitérésnél, akkor egy pillanatig nincsen veszteség. A 2.18.b) ábrán szintén a mechanikai energia időbeni lecsengését ábrázoltuk, de a függőleges tengelyen az energia természetes alapú logaritmusát tüntettük fel. Ezen az ábrázolási módon az alsó és felső burkolók egyenesek, így még jobban felismerhető az, hogy az exponenciális lecsengés során a csökkenés az aktuális értékkel arányos.

2.2.4. Súrlódásos csillapítás

A 2.19.a) ábra szerinti rendszerben a csillapítást a mozgó test és a talaj közötti súrlódás okozza. Feltételezzük, hogy a súrlódás Coulomb-féle száraz súrlódás, vagyis csúszás esetén a súrlódási erő egy, a mozgás irányával ellentétesen mutató μmg erő, míg tapadás esetén egy μmg-nél nem nagyobb erő lesz, ahol μ a súrlódási tényező. A 2.19.b) ábra szerinti elkülönítés alapján felírhatjuk a mozgásegyenletet:

$$m\ddot{x}(t) = -f_S(t) - f_r(t), \tag{2.137}$$

és átrendezhetjük az ismeretleneket egy oldalra, sőt, a rugóerőt is behelyettesíthetjük:

$$m\ddot{x}(t) + f_S(t) + kx(t) = 0. \tag{2.138}$$

A súrlódási erő esetén viszont nem lehet egyszerű behelyettesítéssel élni. Ha feltételezzük, hogy mozog a test, akkor kifejezhető a súrlódási erő, hiszen a sebesség előjele meghatározza az erő irányát, így:

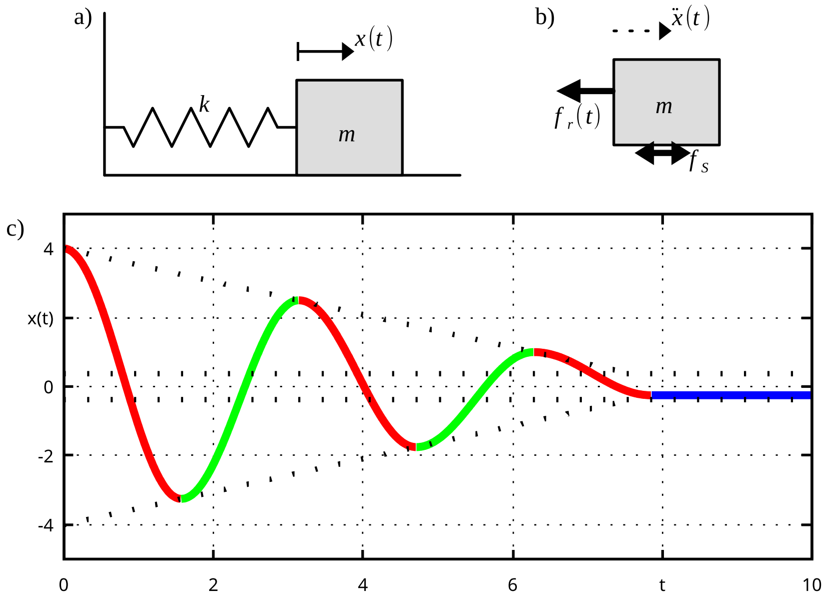
$$f_S(t) = \mu mg\frac{|\dot{x}(t)|}{\dot{x}(t)} \tag{2.139}$$

és ezt felhasználhatjuk a differenciálegyenletben:

$$m\ddot{x}(t) + \mu mg\frac{|\dot{x}(t)|}{\dot{x}(t)} + kx(t) = 0. \tag{2.140}$$

A kapott egyenlet viszont már nem lineáris, ezért a hagyományos eszközeinket nem használhatjuk a megoldáshoz, ráadásul a kitérés szélsőértékeinél, amikor megáll a test, mindig egy külön statikai feladatban kell eldöntenünk:

$$f_S(t) + kx(t) = 0 \rightarrow f_S(t) = -kx(t) \rightarrow |f_S(t)| \overset{?}{\leq} \mu mg, \tag{2.141}$$



2.19. ábra. Súrlódással csillapított szerkezet a) rugó-tömeg modell, b) az elkülönített szerkezet, c) a rendszer kitérése az idő függvényében.

hogy állva marad-e, vagy megmozdul-e a test.

Ennél egyszerűbben járhatunk el, ha a mozgás irányától függően szakaszonként írjuk fel a differenciálegyenletet. Pozitív sebesség esetén mindaddig, amíg a test meg nem áll, a mozgás differenciálegyenlete

$$m\ddot{x}(t) + \mu mg + kx(t) = 0 \tag{2.142}$$

alakban írható. Negatív sebesség esetén mindaddig, amíg a test meg nem áll, a mozgás differenciálegyenlete

$$m\ddot{x}(t) - \mu mg + kx(t) = 0 \tag{2.143}$$

alakban írható. A zérus sebesség esetén a (2.141) egyenlet szerint kell eldönteni, hogy álló helyzetben marad-e a test. Az egyenlőtlenség átalakításából látszik, hogy ha a megállás pillanatában

$$-\frac{\mu mg}{k}, \leq |x(t)| \leq \frac{\mu mg}{k}, \tag{2.144}$$

akkor a test állva marad, különben pedig az aktuális kitéréssel ellentétes irányba kezd mozogni.

Mozgás esetén a (2.142) és (2.143) egyenletek megoldását kezelhetjük gerjesztett rezgések megoldásaként is:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = -\mu mg, \tag{2.145}$$

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = \mu mg, \tag{2.146}$$

vagy felhasználhatjuk a függőlegesen felfüggesztett rugó esetében a 2.1.6.2. alpontban tapasztaltakat. A mozgás egy-egy szakaszában a teljes elmozdulás mindig a $-\mu mg$, illetve μmg erő miatti statikus elmozdulásnak és az ezen elmozdulás, mint egyensúlyi helyzet körüli csillapítatlan szabadrezgésnek az összegeként adódik. A szabadrezgések sajátkörfrekvenciája mindkét esetben $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

A 2.19.c) ábra mutatja az elmozdulások idő szerinti változását. A zölddel jelölt szakaszokon a sebesség pozitív, így a (2.145) egyenletnek megfelelően a $\frac{-\mu mg}{k}$-val eltolt koordináta-rendszerben láthatunk mindig egy-egy fél koszinuszhullámot. A pirossal jelölt szakaszokon a sebesség negatív, így a (2.146) egyenletnek megfelelően a $\frac{\mu mg}{k}$-val eltolt koordináta-rendszerben láthatunk mindig egy-egy fél koszinuszhullámot. A maximális kitérések most időben lineárisan csökkennek mindaddig, amíg az egyik szakasz végén a megállás pillanatában már kisebb lesz a kitérés miatti rugóerő, mint a tapadó súrlódás maximuma, így onnantól kezdve a test helyben marad a kék vonal szerint.

2.3. Egyszabadságfokú rendszerek gerjesztett rezgése

2.3.1. Megoldási módszerek

A gerjesztett rendszer rezgésfeladatának megoldása a (2.22) inhomogén differenciálegyenlet megoldását jelenti. Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása két részből tevődik össze: az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásából és a kiegészítő differenciálegyenlet általános megoldásából. Utóbbi a szabadrezgés feladat általános megoldása, így tartalmazza azt a két paramétert, amivel a kezdeti feltételeket tudjuk kielégíteni. A kapott megoldást a szerkezet *válasz*ának nevezzük:

$$x(t) = x_g(t) + x_0(t), \tag{2.147}$$

ahol a g index az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldását jelöli[31], míg a 0 index a kiegészítő differenciálegyenlet megoldása[32].

A partikuláris megoldást kereshetjük függvényszerű alakban, vagy előre kiválasztott diszkrét t_i időpillanatokban. Előbbi esetben az az elvárásunk, hogy a megoldás minden pillanatban elégítse ki a (2.22) differenciálegyenletet. Utóbbi esetben csak a t_i időpillanatokban várjuk el az adott pillanatban kiszámolt elmozdulás-, sebesség- és gyorsulásértékektől, hogy kielégítsék a differenciálegyenletet.

Ha a megoldást függvény alakjában keressük, akkor a kiegészítő differenciálegyenlet általános megoldása azonos a szabadrezgés-feladat általános megoldásával, azaz csillapítatlan esetben a (2.52), kis csillapítással csillapított esetben a (2.107) képlet szerinti harmonikus, vagy exponenciálisan lecsengő harmonikus függgvény. Emlékeztetőül megismételjük e két függvényt:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 t) \\ x_0(t) &= e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \left(A \cdot \cos(\omega_0^* t) + B \cdot \sin(\omega_0^* t)\right). \end{aligned} \tag{2.148}$$

[31] A differenciálegyenlet a *g*erjesztést miatt inhomogén, erre utal az index.
[32] A kiegészítő differenciálegyenlet homogén, azaz a jobb oldala *0*, erre utal az index.

A szabadrezgés-feladat általános megoldásában szereplő A és B paramétereket most is a kezdeti feltételeket kielégítő módon kell meghatározni. Ügyelni kell viszont arra, hogy a kezdeti feltételeket az $x(t)$ függvénynek kell kielégítenie, ezért a t_0 kezdőpontban előírt kezdeti elmozdulás és sebesség esetén a

$$x_0 = x_g(t_0) + x_0(t_0), \qquad v_0 = \dot{x}_g(t_0) + \dot{x}_0(t_0) \tag{2.149}$$

egyenletrendszerből kell az A, B értékeket számolni, és az egyszerűbb, $t_0 = 0$ esetre korábban levezetett (2.72), vagy (2.119) képletek is csak azzal a módosítással használhatók, hogy x_0 helyére $x_0 - x_g(0)$, míg v_0 helyére $v_0 - \dot{x}_g(0)$ értékét kell behelyettesíteni. Az A, B paraméterek értéke tehát függ a partikuláris megoldástól de a végső $x(t)$ függvény már nem.

Ha a megoldást diszkrét időpillanatokban keressük, akkor a kiegészítő differenciálegyenlet általános megoldását külön már nem kell keresnünk. Az első időlépést megelőző pillanatban a kitérést és a sebességet a kezdeti feltételeknek megfelelően kell felvenni, majd ezt követően már minden egyes lépés közvetlenül a teljes megoldást szolgáltatja az adott időpillanatban.

2.3.2. Harmonikus gerjesztés

A gerjesztések egy speciális csoportja a *harmonikus gerjesztés*, ezért először azt mutatjuk meg, hogy miből eredhet ilyen típusú gerjesztés. Tételezzünk fel egy gépet, amiben forgó részek mozognak és az állandó ω szögsebességgel forgómozgást végző M tömegű test tömegközéppontja *excentrikus*: nem esik a forgástengelyre, hanem attól valamilyen r_S távolságra van (lásd a 2.20.a) ábrát). A tömegközéppont a külpontosság miatt egy r_S sugarú körpályán végez egyenletes körmozgást, ezért a tömegközéppont gyorsulása az $\omega^2 r_S$ nagyságú *centripetális* (a kör középpontja felé mutató) gyorsulás lesz (lásd a 2.20.b) ábrát). A súlyponttétel értelmében a forgó testre ható erők eredője a test tömegének és a tömegközéppontja gyorsulásának a szorzatával egyenlő, azaz egy, a forgástengely felé mutató $M\omega^2 r_S$ nagyságú erő lesz. Ez az erő a forgástengelyről, azaz közvetve az azt megtámasztó szerkezetről adódik át a testre. A hatás-ellenhatás törvénye alapján a tengelyre ennek az $M\omega^2 r_S$ erőnek az ellentettje hat, azaz egy, a tengelyből a tömegközéppont felé mutató erő. A 2.20.c) ábrát felhasználva ez az erő:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} M\omega^2 r_S \cos(\varphi(t)) \\ M\omega^2 r_S \sin(\varphi(t)) \end{bmatrix} = M\omega^2 r_S \begin{bmatrix} \cos(\omega t - \varphi_0) \\ \sin(\omega t - \varphi_0) \end{bmatrix}. \tag{2.150}$$

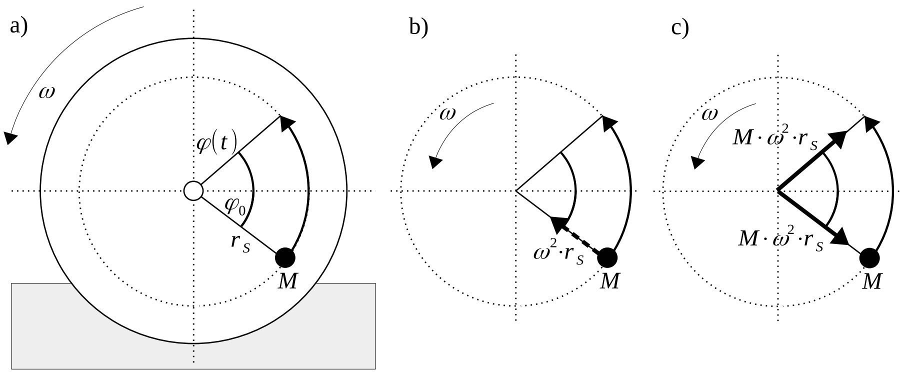
Látszik, hogy bármelyik irányban egy $q_0 = M\omega^2 r_S$ amplitúdónak és egy ω körfrekvenciájú harmonikus függvénynek a szorzata adódik át a szerkezetre, így a szabadságfok irányába eső komponens a harmonikus gerjesztőerő, amit az alábbi alakok egyikével adhatunk meg:

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \cos(\omega t), \qquad & q(t) &= q_0 \cos(\omega t - \varphi_0), \\ q(t) &= q_0 \sin(\omega t), \qquad & q(t) &= q_0 \sin(\omega t - \varphi_0). \end{aligned} \tag{2.151}$$

2.3.3. Periódikus gerjesztés

Vannak olyan terhek is, melyek ugyan nem harmonikus függvény szerint változnak, de periódikusak, azaz létezik egy olyan T periódusidő, melyre igaz, hogy

$$q(t + T) = q(t). \tag{2.152}$$



2.20. ábra. A forgómozgást végző külpontos tömeg okozta gerjesztőerő: a.) a külpontos tömeg; b.) a körmozgást végző súlypont gyorsulása; c.) a tengelyre ható, változó irányú erő.

Ha egy ilyen T létezik, akkor persze végtelen sok lehet, teljes indukcióval belátható, hogy T bármely (akár negatív) egész számszorosára is igaz (2.152). A továbbiakban a periódikus mozgás periódusidejének a legkisebb pozitív T értékét tekintjük.

Periódikus gerjesztést eredményezhet egy hengerben mozgó dugattyú (lásd a 2.21.a) ábrát), amit egy l hosszúságú ferde rúddal hajtunk meg, aminek a másik végpontja egy r sugarú körpályán mozog ω szögsebességgel. A dugattyú távolsága a forgás tengelyétől

$$x(\varphi) = r\cos(\varphi) + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2(\varphi)}, \tag{2.153}$$

ami φ-ben láthatóan periódikus, így egyenletes körmozgás, azaz $\varphi(t) = \omega t$ esetén a mozgás időben periódikus lesz. A tömeg kitérését, sebességét és gyorsulását mutatjuk be a 2.21.b)-d) ábrákon, szaggatott vonallal jelezve a harmonikus mozgás görbéjét. Látszik, hogy a deriválás fokszámának növekedésével a harmonikus függvénytől való eltérés is egyre jelentősebb. A tengely terhelését a dugattyú tömegének és a gyorsulásnak a szorzataként kapjuk.

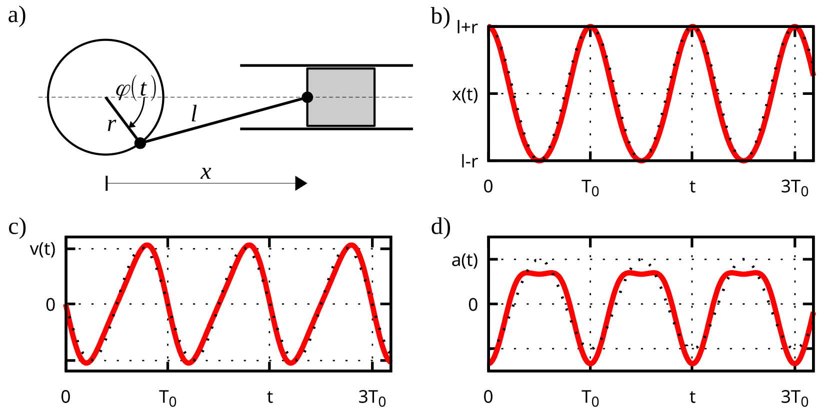
A periódikus terheket a Fourier-soruk segítségével fel lehet írni harmonikus függvények összegeként:

$$q(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\cos(j\omega t) + b_j\sin(j\omega t), \tag{2.154}$$

ahol $\omega = 2\pi/T$. Az a_j, illetve b_j együtthatókat a $q(t)$ függvény $\cos(j\omega t)$, illetve $\sin(j\omega t)$ függvényekkel T időtartamon számolt szorzatintegrálja segítségével számolhatjuk[33]:

$$a_j = \frac{2}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} q(t)\cos(j\omega t)dt, \qquad b_j = \frac{2}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} q(t)\sin(j\omega t)dt. \tag{2.155}$$

[33]Az egyes szinusz-, illetve koszinuszfüggvények ugyanis *ortogonálisak* egymásra: eltérő függvények szorzatintegrálja egy teljes periódus alatt 0 lesz.



2.21. ábra. Dugattyú által a tengelyre kifejtett erő: a) a modell; b) a dugattyú periódikus kitérése; c) a dugattyú periódikus sebessége; d) a dugattyú periódikus gyorsulása.

2.4. Harmonikusan gerjesztett egyszabadságfokú rendszerek rezgése

2.4.1. Harmonikusan gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése

A harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgésének differenciálegyenlete

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = q_0 \cos(\omega t), \tag{2.156}$$

melynek olyan $x(t)$ megoldását keressük, ami kielégíti az

$$x(t_0) = x_0, \qquad \dot{x}(t_0) = v_0 \tag{2.157}$$

kezdeti feltételeket, azaz a t_0 időpillanatban a szabadságfok kitérése és sebessége előírt értékű, rendre x_0 és v_0 kell legyen.

2.4.1.1. Általános megoldás

Keressük a megoldást a gerjesztésére hasonlító időfüggő alakban:

$$x_g(t) = x_{g0} \cos(\omega t), \tag{2.158}$$

ahol x_{g0} a *válasz amplitúdója*. A feltételezett alak idő szerinti második deriváltja:

$$\ddot{x}_g(t) = -\omega^2 x_{g0} \cos(\omega t). \tag{2.159}$$

Az elmozdulás és a gyorsulás feltételezett alakját helyettesítsük be a (2.156) differenciálegyenletbe:

$$-\omega^2 m x_{g0} \cos(\omega t) + k x_{g0} \cos(\omega t) = q_0 \cos(\omega t). \tag{2.160}$$

Mivel ennek minden t pillanatban igaznak kell lennie, ezért egyszerűsíthetünk $\cos(\omega t)$-vel:

$$-\omega^2 m x_{g0} + k x_{g0} = q_0, \tag{2.161}$$

azaz

$$(k - \omega^2 m) x_{g0} = q_0, \tag{2.162}$$

A továbbiakban tételezzük fel, hogy $k \neq \omega^2 m$, így az egyenletet megoldhatjuk az x_{g0} amplitúdóra:

$$x_{g0} = \frac{q_0}{k - \omega^2 m}. \tag{2.163}$$

A nevezőből emeljük ki k-t:

$$x_{g0} = \frac{q_0}{k\left(1 - \frac{\omega^2 m}{k}\right)}, \tag{2.164}$$

és az m/k hányadost[34] helyettesítsük a sajátkörfrekvencia négyzetének reciprokával:

$$x_{g0} = \frac{q_0}{k\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \tag{2.165}$$

Az amplitúdót felhasználva a (2.158) képletben feltételezett megoldásra:

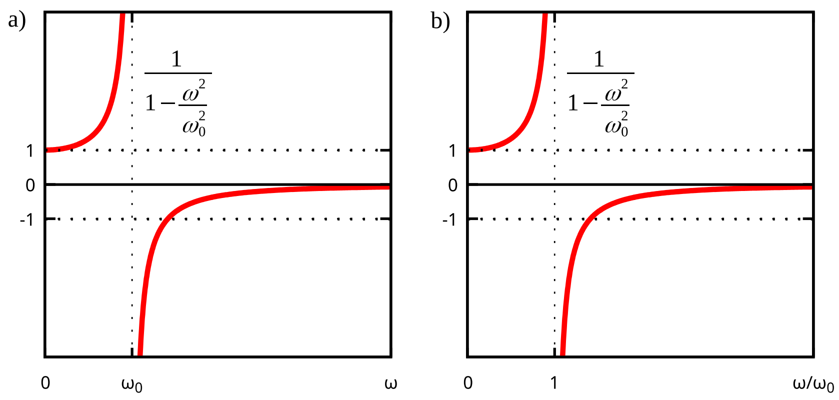
$$\boxed{x_g(t) = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega t)} \tag{2.166}$$

adódik. A szerkezet válasza tehát három tag szorzataként adódik:

- Az $x_{st} = q_0/k$ hányados a gerjesztőerő amplitúdója, mint statikus erő által okozott elmozdulással egyezik meg.
- A statikus eltolódást szorzó $\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ tényező fejezi ki, hogy a harmonikus gerjesztés miatt a statikus eltolódás hányszorosa lesz az amplitúdó. Az amplitúdó ezen változása a dinamikus viselkedés következménye, ezért szokás rá *dinamikus tényező*ként is hivatkozni.
- Az időfüggést a gerjesztés időfüggésével megegyező harmonikus függvény ($\cos(\omega t)$) adja.

A dinamikus hatást kifejező tényezőt mutatja a 2.22. ábra A gerjesztőerő körfrekvenciájának kis értékénél 1-ről indul a függvény, majd folyamatosan növekszik, hiszen a nevező csökken. Amikor a gerjesztőerő körfrekvenciája eléri a szerkezet sajátkörfrekvenciáját, a függvény aszimptotikusan végtelenhez tart. A sajátkörfrekvenciánál nagyobb gerjesztőerő-körfrekvenciák esetén a függvény a mínusz végtelentől tart a negatív oldalról a nullához. A függvény előjele a (2.166) megoldásban arra utal, hogy a szabadságfok kitérése és a gerjesztőerő iránya egymáshoz képest milyen. A sajátkörfrekvenciánál kisebb gerjesztőerő-körfrekvencia esetén az előjel pozitív, azaz a kitérés az erő irányával azonos irány: a rendszer *azonos fázisban* rezeg a gerjesztéssel. Ilyenkor a dinamikus hatás mindig növeli a statikus eltolódást. A sajátkörfrekvenciánál nagyobb

[34] ami a $k/m = \omega_0^2$ reciproka



2.22. ábra. A statikus eltolódást szorzó $\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ tényező a) a gerjesztőerő körfrekvencia függvényében, b) a gerjesztőerő körfrekvenciája és a sajátkörfrekvencia hányadosának függvényében.

gerjesztőerő-körfrekvencia esetén az előjel negatív, azaz a kitérés az erő irányával ellentétes irány: a rendszer *ellenfázisban* rezeg a gerjesztéshez képest[35].

Ha ráadásul $\omega > \sqrt{2}\omega_0$, akkor a dinamikus szorzótényező abszolútértéke kisebb lesz egynél, azaz a rezgés amplitúdója *kisebb* lesz, mint a gerjesztés amplitúdója által okozott statikus eltolódás. Ismert körfrekvenciájú gerjesztés esetén ezt bizonyos esetekben ki is lehet használni: olyan szerkezetet kell kialakítani, aminek a sajátkörfrekvenciája kellően alacsony. Ezt két módon lehet elérni: vagy a tömeget kell növelni, de egyben biztosítani, hogy a megnövelt önsóly ne okozzon teherbírási problémákat, vagy a merevséget kell csökkenteni, ellenőrizve a használhatóságot és a stabilitást. Mindkét esetben figyelembe kell venni az önsúly miatti kezdeti statikus eltolódást, ami akár a szokásosnál lényegesen nagyobb is lehet.

Rezonancia A (2.165) amplitúdó levezetése során feltételeztük, hogy $k \neq m\omega^2$, azaz a gerjesztőerő körfrekvenciája nem egyezik meg a szerkezet sajátkörfrekvenciájával: $\omega \neq \omega_0$. Amennyiben mégis ez történik, azaz $\omega = \omega_0$, azt *rezonanciának* nevezzük. Ilyenkor a partikuláris megoldást

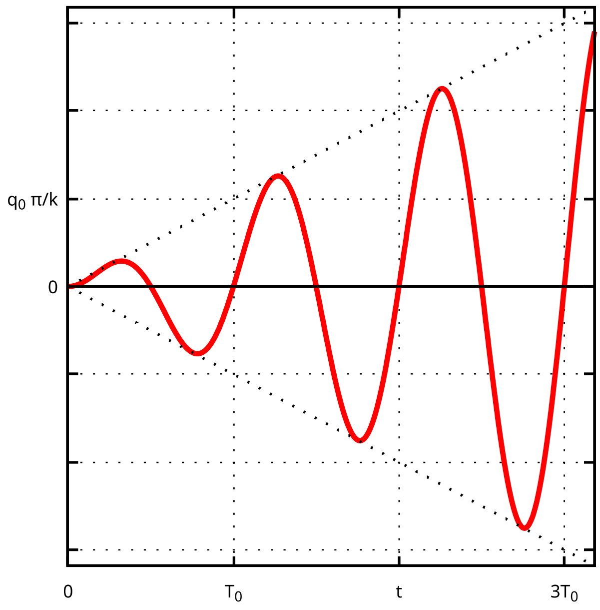
$$x_g(t) = a \cdot t \cdot \sin(\omega t) \tag{2.167}$$

alakban kell keresni, aminek megoldása:

$$x_g(t) = \frac{q_0}{2\sqrt{km}} \cdot t \cdot \sin(\omega t) = \frac{q_0}{2m\omega_0} \cdot t \cdot \sin(\omega t) \tag{2.168}$$

lesz, azaz a lineáris $\frac{q_0}{2\sqrt{km}} \cdot t$ függvény és ellentettje által határolt, folyamatosan, akár a végtelenig növekvő amplitúdójú rezgés alakul ki (lásd a 2.23. ábrát). Ezt az esetet mindenképpen el kell kerülni, hiszen a nagy elmozdulások a szerkezet

[35]A gerjesztésénél kisebb sajátkörfrekvencia esetén a tömegpont nem tudja elég gyorsan követni a gerjesztést, mert még az előző irányú gerjesztésre válaszol, ezért a gerjesztéssel ellentétes lesz a kitérés.



2.23. ábra. Csillapítatlan rendszer rezonanciája.

tönkremenetelét okozzák, de a gyakorlatban már a rezonancia közeli állapotot is érdemes elkerülni. Ezt adott teher esetén a szerkezet sajátkörfrekvenciájának alakításával lehet elérni, amit a szerkezet *elhangolás*ának nevezünk.

2.4.1.2. A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás

A (2.157) szerinti kezdeti feltételeket a (2.166) partikuláris és a (2.52) homogén megoldás összegével kell kielégíteni, azaz a megoldás általános alakja:

$$x(t) = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega t) + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t). \tag{2.169}$$

A sebességfüggvény ennek idő szerinti deriváltja:

$$v(t) = -\omega \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \sin(\omega t) - \omega_0 A\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t), \tag{2.170}$$

így a két paraméter meghatározására szolgáló egyenletrendszer az alábbi:

$$x_0 = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega t_0) + A\cos(\omega_0 t_0) + B\sin(\omega_0 t_0), \tag{2.171}$$

$$v_0 = -\omega \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \sin(\omega t_0) - \omega_0 A\sin(\omega_0 t_0) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t_0). \tag{2.172}$$

Ha a kezdeti feltételeket a $t_0 = 0$ pillanatban adjuk meg, akkor (2.171)-(2.172) megoldása:

$$A = x_0 - \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}, \qquad B = \frac{v_0}{\omega_0}, \tag{2.173}$$

a mozgás differenciálegyenletének a kezdeti feltételeket kielégítő megoldása pedig:

$$x(t) = \frac{q_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t) + \left(x_0 - \frac{q_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \quad (2.174)$$

Egy valós szerkezetben természetesen mindig van valamilyen csillapítás, ami miatt a szabadrezgésnek megfelelő részei a megoldásnak (azaz az $\omega_0 t$-tól függő harmonikus függvénnyel szorzódó tagok) hosszú távon lecsengenek[36]. A megmaradó, időben csak ωt-től függő részt *állandósult rezgésrész*nek, vagy röviden állandósult rezgésnek nevezzük[37]. Az állandósult rezgés:

$$x_{all}(t) = \frac{q_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t) \quad (2.175)$$

a szerkezet hosszútávú gerjesztésre adott hosszútávú válasza.[38] Ennek időfüggését a -1 és 1 között változó $\cos(\omega t)$ függvény adja meg, míg a legnagyobb kitérése az ezt szorzó tag abszolútértéke lesz:

$$x_{all} = \frac{q_0}{k}\frac{1}{\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}. \quad (2.176)$$

A fenti kifejezésben a q_0/k statikus elmozdulást szorzó tagot *rezonanciatényező*nek nevezzük, és μ-vel jelöljük:

$$\mu = \frac{1}{\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}, \quad (2.177)$$

így az állandósult rezgés során a rezgés amplitúdója:

$$x_{all} = \frac{q_0}{k}\mu. \quad (2.178)$$

A 2.24. ábra mutatja a rezonanciatényezőt a gerjesztőerő körfrekvenciájának, illetve a gerjesztő- és sajátkörfrekvencia hányadosának függvényében. A két ábra a 2.22. ábra függvényeinek abszolútértékével megegyező függvényeket mutatja.

A rezonanciatényező segítségével az állandósult rezgésrész (2.175) szerinti képlet átírható:

$$x_{all}(t) = \frac{q_0}{k}\mu\cos(\omega t - \varphi) \quad (2.179)$$

alakra, ahol φ a *válasz fáziskésése a gerjesztéshez képest*: a sajátkörfrekvenciánal alacsonyabb körfrekvenciájú gerjesztés esetén $\varphi = 0$, míg a sajátkörfrekvenciánal magasabb körfrekvenciájú gerjesztés esetén $\varphi = \pi$.

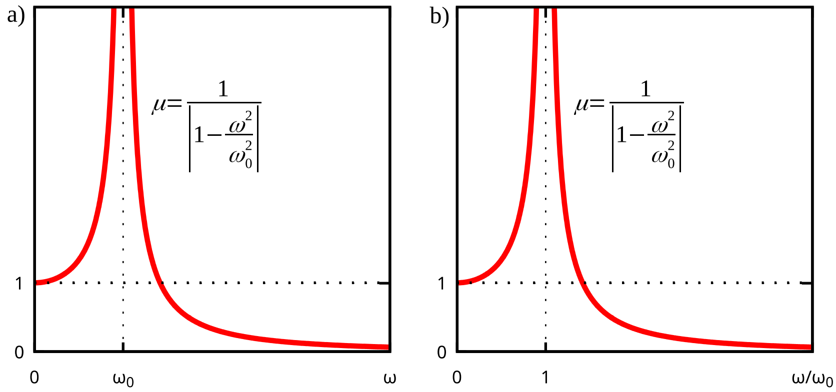
Ahogy a partikuláris megoldás levezetés során kizártuk a rezonancia esetét[39], úgy *csillapítatlan rendszerben a rezonanciatényező sincs értelmezve a rezonancia esetén.* Valóban, a (2.168) szerinti megoldásból nem emelhető ki a rezonanciatényező, ugyanakkor a $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$ tag miatt tekinthetjük úgy a rezonancia esetét, mint amikor a fáziskésés $\varphi = \pi/2$.

[36] E lecsengés időtartama a csillapítás mértékétől és a körfrekvenciáktól függ.

[37] A lecsengő rész elnevezése pedig *tranziens rész.*

[38] Az állandósult rezgésrész másik lehetséges származtatása, ha az $x(t_0) = x_g(t_0)$ és $v(t_0) = \dot{x}_g(t_0)$ kezdeti feltételeket írjuk elő, ahol $x_G(t)$ egy olyan partikuláris megoldás, amiben nincsen szabadrezgés miatti tag.

[39] Azaz amikor $\omega = \omega_0$.



2.24. ábra. A csillapítatlan rendszer rezonanciatényezője a) a gerjesztőerő körfrekvencia függvényében, b) a gerjesztőerő körfrekvenciája és a sajátkörfrekvencia hányadosának függvényében.

Lebegés A rezonanciához közeli állapotban a (2.169) szerinti megoldásban két, közel azonos körfrekvenciájú rezgés összegeként adódik a szerkezet válasza. Mivel a két körfrekvencia csak kismértékben tér el, ezért van a rezgésnek olyan időszaka, amikor a két amplitúdó azonos előjellel szorzódik egy 1 közeli számmal, de olyan is, amikor ellenkező előjellel szorzódnak. Előbbi esetben a két maximum közel összegződik, míg utóbbi esetben közel kioltják egymást. Az eredmény egy olyan rezgés lesz, aminek az amplitúdója periódikusan változik. Ezt a jelenséget *lebegés*nek nevezzük.

A jelenséget egy egyszerű példán szemléltetjük. Legyen az elmozdulásfüggvény alakja az alábbi:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) + \cos(\omega t). \tag{2.180}$$

Vezessük be a két körfrekvencia átlagát és különbségét az alábbiak szerint:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega + \omega_0}{2}, \qquad \Delta\omega = \omega_0 - \omega, \tag{2.181}$$

Amikkel a két köfrekvencia is kifejezhető:

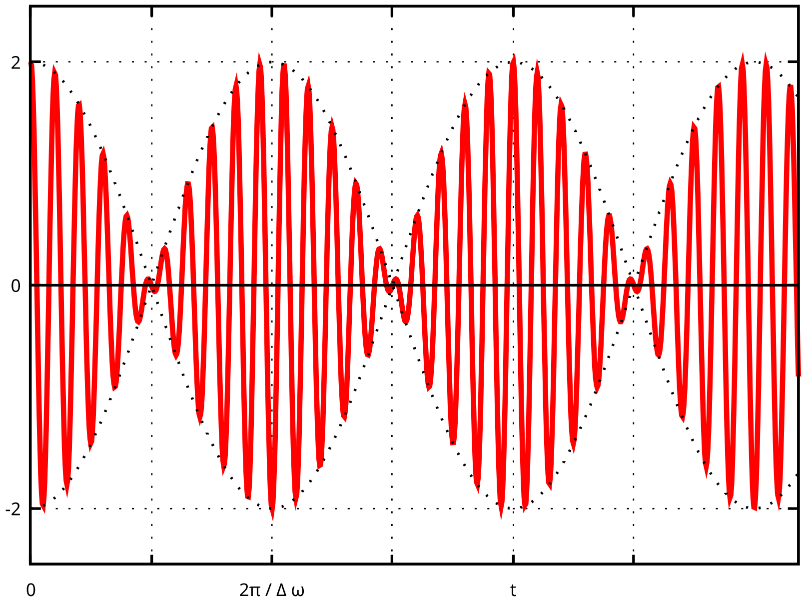
$$\omega_0 = \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}, \qquad \omega = \bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}. \tag{2.182}$$

Ezeket felhasználva (2.180)-ben a szögek összegére és különbségére vonatkozó trigonometrikus azonosságok[40] segítségével azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} x(t) = \cos\left(\left(\bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) + \cos\left(\left(\bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) \\ = 2 \cdot \cos\left(\bar{\omega}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right). \end{aligned} \tag{2.183}$$

Azaz a két körfrekvencia közelében levő átlagos körfrekvencia szerint változó függvény szorzódik egy, a kis frekvenciakülönbség miatt hosszú periódusidejű

[40] $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.



2.25. ábra. A lebegés jelensége a rezonanciához közeli állapotban. A (2.183) függvény eredménye, ha $\Delta\omega = \bar{\omega}/10$.

harmonikus függvénnyel[41]. A két függvényt és összegüket mutatja a 2.25. ábra. A jelenség akkor is megmarad, ha a két amplitúdó, vagy a két harmonikus függvény nem azonos, legfeljebb az amplitúdó hosszútávú hullámzása nem a nulla körül következik be.

2.4.1.3. Szerkezet helyettesítő statikus terhe

Végül nézzük meg, hogyan számítható a rugalmas szerkezetet terhelő helyettesítő statikus erő a harmonikus gerjesztés alatt. A helyettesítő teher a modell rugójában ébredő erő, ami mozdulatlan támasz esetén (2.7) szerint számolható, behelyettesítve a (2.169) szerinti elmozdulást.

Az állandósult rezgés kialakulása után a fenti rugóerő a (2.175) elmozdulást felhasználva:

$$f_{r,all}(t) = k \cdot \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega t). \tag{2.184}$$

A k/k-val való egyszerűsítés után az

$$f_{r,all}(t) = q_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega t) \tag{2.185}$$

képletből azt olvashatjuk ki, hogy a rugóerő, azaz a rugalmas szerkezetet terhelő helyettesítő statikus erő a gerjesztőerő amplitúdójához képest ugyanazzal a $\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ tényezővel szorzódik, ami a válasz amplitúdója és a gerjesztés amplitúdója által okozott statikus elmozdulás között is használható (lásd (2.166)). Azt

[41] A két tagból az előbbit gyors, utóbbit lassú dinamikának is nevezik.

is láttuk, hogy az állandósult rezgés során csak a kialakuló rezgés amplitúdóját kell számítani, az azonos, vagy ellenfázisban rezgést a sajátkörfrekvencia és a gerjesztőerő körfrekvenciájának egymáshoz való viszonyából is ki tudjuk olvasni. Ezért a helyettesítő teher amplitúdóját a

$$f_{r,all} = q_0 \cdot \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|} \tag{2.186}$$

képlettel is számolhatjuk, amiben felhasználva a rezonanciatényező (2.177) szerinti definícióját, az amplitúdó:

$$f_{r,all} = q_0 \cdot \mu. \tag{2.187}$$

A szerkezetet tehát a gerjesztőerő amplitúdójának rezonanciatényezőszeresével kell statikusan terhelni ahhoz, hogy az igénybevételek szélsőértékeit az állandósult rezgésből meghatározzuk.

2.4.1.4. Gerjesztőerő megadása más harmonikus függvénnyel

Ha a gerjesztőerő időfüggése $\sin(\omega t)$ alakú, azaz a mozgásegyenlet alakja:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = q_0 \sin(\omega t), \tag{2.188}$$

akkor a megoldást is szinuszos alakban kell keresni:

$$x_g(t) = x_{g0} \sin(\omega t), \tag{2.189}$$

aminek megoldása:

$$x_g(t) = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \sin(\omega t). \tag{2.190}$$

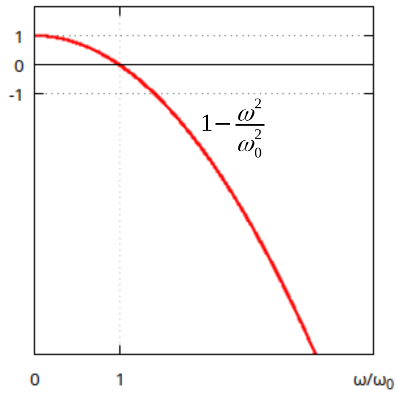
A megoldás tehát itt is ugyanazzal a dinamikus hatást kifejező tényezővel szorozza a statikus eltolódást, mint (2.166) esetén, egyedül az időfüggést kifejező tagot kell módosítani a gerjesztésnek megfelelően.

2.4.1.5. Csillapítatlan rendszer harmonikus kényszerrezgése

A gerjesztett rezgések egy speciális csoportjában a szabadságfok mozgását írjuk elő, és az ezen mozgást létrehozó terhet keressük, azaz azt, hogy milyen erővel kényszeríthetjük rá a tömeget az előírt mozgásra. Ezt a fajta rezgést *kényszerrezgés*nek nevezzük, és a feladat az előzőekben bemutatott feladat inverzeként kezelhető. Keressük tehát a (2.156) egyenlet jobb oldalát, ha az elmozdulás a (2.158) képlettel adott. Az erő amplitúdója és az elmozdulás amplitúdója közötti összefüggést a (2.165) egyenletből tudjuk felírni:

$$q_0 = x_{g0}k\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right). \tag{2.191}$$

Az $x_{g0}k$ szorzat a kényszerrezgés amplitúdóját statikusan létrehozó erő, ennek $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$-szerese a rezgés létrehozásához szükséges erő amplitúdója. Ezt a tényezőt ábrázoltuk a 2.26. ábrán. Látható, hogy a sajátkörfrekvenciánál alacsonyabb körfrekvenciájú gerjesztés esetén most is azonos fázisban van a rezgés



2.26. ábra. A kényszerrezgés nagyítótényezője a gerjesztés körfrekvenciájának függvényében.

és a kényszerítő erő, míg a sajátkörfrekvenciánál magasabb körfrekvenciájú gerjesztés esetén ellenfázisban van a két mennyiség. A függvénynek zérushelye van $\omega = \omega_0$ esetén. Az most nem rezonanciát jelent, hanem szabadrezgést: ekkor a csillapítatlan rendszer a sajátkörfrekvenciájával végez rezgést, ezért nem szükséges gerjesztőerő.

2.4.2. Harmonikusan gerjesztett csillapított rendszer

A harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgésének differenciálegyenlete

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = q_0 cos(\omega t), \tag{2.192}$$

melynek olyan $x(t)$ megoldását keressük, ami kielégíti az

$$x(t_0) = x_0, \qquad \dot{x}(t_0) = v_0 \tag{2.193}$$

kezdeti feltételeket, azaz a t_0 időpillanatban a szabadságfok kitérése és sebessége előírt értékű, rendre x_0 és v_0 kell legyen.

2.4.2.1. Általános megoldás

Keressük a megoldást a gerjesztésére hasonlító, de ahhoz képest φ_0 szöggel késő, időfüggő alakban:

$$x_g(t) = x_{g0}\cos(\omega t - \varphi_0), \tag{2.194}$$

ahol x_{g0} a *válasz amplitúdója*, φ_0 pedig a *válasz késése*. A feltételezett alak idő szerinti első és második deriváltja:

$$\dot{x}_g(t) = -\omega x_{g0}\sin(\omega t - \varphi_0). \tag{2.195}$$

$$\ddot{x}_g(t) = -\omega^2 x_{g0}\cos(\omega t - \varphi_0). \tag{2.196}$$

Az elmozdulás és a gyorsulás feltételezett alakját helyettesítsük be a (2.192) differenciálegyenletbe:

$$-\omega^2 m x_{g0}\cos(\omega t - \varphi_0) - \omega c x_{g0}\sin(\omega t - \varphi_0) + k x_{g0}\cos(\omega t - \varphi_0) = q_0\cos(\omega t). \tag{2.197}$$

Ennek minden t pillanatban igaznak kell lennie, de az időfüggő tagok különbözőek, ezért nem egyszerűsíthetünk velük közvetlenül. Ehelyett alakítsuk át az $\omega t - \varphi$ különbségek trigonometrikus függvényeit[42]:

$$\begin{aligned}(k-\omega^2 m)x_{g0}(\cos(\omega t)\cos(\varphi_0)+\sin(\omega t)\sin(\varphi_0))\\ -\omega c x_{g0}(\sin(\omega t)\cos(\varphi_0)-\cos(\omega t)\sin(\varphi_0)) = q_0\cos(\omega t).\end{aligned} \tag{2.198}$$

és válasszuk szét a $\cos(\omega t)$-s és $\sin(\omega t)$-s tagokat:

$$\begin{aligned}\left\{\left[(k-\omega^2 m)\cos(\varphi_0)+\omega c\sin(\varphi_0)\right]x_{g0}-q_0\right\}\cos(\omega t)+\\ \left\{\left[(k-\omega^2 m)\sin(\varphi_0)-\omega c\cos(\varphi_0)\right]x_{g0}\right\}\sin(\omega t)=0.\end{aligned} \tag{2.199}$$

A fenti egyenlet csak akkor teljesülhet minden t esetére, ha a kapcsos zárójelekben levő kifejezések külön-külön nullával egyenlők[43]:

$$\begin{aligned}\left[(k-\omega^2 m)\cos(\varphi_0)+\omega c\sin(\varphi_0)\right]x_{g0}-q_0=0\\ \left[(k-\omega^2 m)\sin(\varphi_0)-\omega c\cos(\varphi_0)\right]x_{g0}=0.\end{aligned} \tag{2.200}$$

A második egyenletben x_{g0} nem nulla, ezért a

$$(k-\omega^2 m)\sin(\varphi_0)-\omega c\cos(\varphi_0)=0 \tag{2.201}$$

egyenletből kifejezhető a késés fázisának tangense:

$$\mathrm{tg}\varphi_0=\frac{\omega c}{k-\omega^2 m} \tag{2.202}$$

illetve maga a szög:

$$\varphi_0=\mathrm{arctg}\frac{\omega c}{k-\omega^2 m} \tag{2.203}$$

A fázisszöget a $[0;\pi)$ közötti tartományban számítjuk, hogy mindig késést jelentsen.

Következő lépésben (2.200) első egyenletébe helyettesítjük vissza a késés fázisszögét. A fázisszög harmonikus függvényeit a tangenssel kifejezve[44]:

$$\left[(k-\omega^2 m)\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega c}{k-\omega^2 m}\right)^2}}+\omega c\frac{\frac{\omega c}{k-\omega^2 m}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega c}{k-\omega^2 m}\right)^2}}\right]x_{g0}=q_0. \tag{2.204}$$

A zárójeles kifejezést hozzuk közös nevezőre és bővítsük a törtet $\frac{k-\omega^2 m}{k-\omega^2 m}$-val:

$$\left[\frac{(k-\omega^2 m)^2+(\omega c)^2}{\sqrt{(k-\omega^2 m)^2+(\omega c)^2}}\right]x_{g0}=q_0. \tag{2.205}$$

[42] $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

[43] Hiszen ha $\cos(\omega t)=0$, és így $\sin(\omega t)=\pm1$, akkor az első sorban levő kifejezés nullával szorzódik, tehát a második sorban a kapcsos zárójelen belül nullának kell lenni, míg ha $\sin(\omega t)=0$, és így $\cos(\omega t)=\pm1$, akkor a második sorban levő kifejezés nullával szorzódik, tehát az első sorban a kapcsos zárójelen belül kell nullának lenni

[44] $\sin\alpha=\frac{\pm\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$, $\cos\alpha=\frac{\pm1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$

A tört számlálójában a nevező négyzete szerepel, így azt egyszerűsíthetjük,

$$x_{g0}\sqrt{(k-\omega^2 m)^2+(\omega c)^2}=q_0. \tag{2.206}$$

majd megoldhatjuk az egyenletet a válasz amplitúdójára:

$$x_{g0}=\frac{q_0}{\sqrt{(k-\omega^2 m)^2+(\omega c)^2}}=\frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2\frac{m}{k}\right)^2+\left(\frac{\omega c}{k}\right)^2}}. \tag{2.207}$$

Felhasználva, hogy $\omega_0^2=k/m$, valamint $c=\xi 2\sqrt{km}$, a szorzótényező egyszerűsíthető:

$$x_{g0}=\frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}. \tag{2.208}$$

Behelyettesítve a kapott amplitúdót és fázisszöget a megoldás (2.194) szerinti feltételezett alakjába a harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés partikuláris megoldása:

$$x_g(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\cos\left(\omega t-\operatorname{arctg}\frac{\omega c}{k-\omega^2 m}\right). \tag{2.209}$$

A szerkezet válasza tehát a csillapítatlan esethez hasonlóan három tag szorzataként adódik:

- Az $x_{st}=q_0/k$ hányados a gerjesztőerő amplitúdója, mint statikus erő által okozott elmozdulással egyezik meg.
- A statikus eltolódást szorzó $\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ tényező fejezi ki, hogy a harmonikus gerjesztés miatt a statikus eltolódás hányszorosa lesz az amplitúdó.
- Az időfüggést a gerjesztés időfüggésével megegyező frekvenciájú harmonikus függvény adja, mely azonban a φ_0 fázisszöggel (azaz φ_0/ω idővel) késik a gerjesztéshez képest.

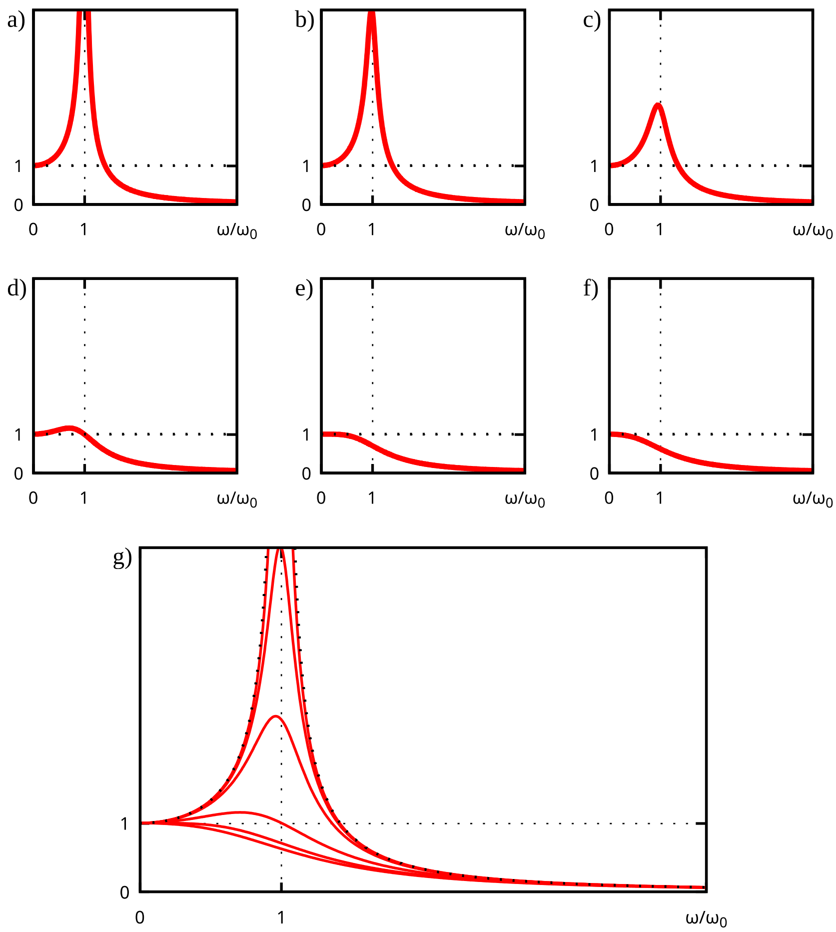
A dinamikus hatást kifejező tényezőt mutatja különböző csillapítási hányadok esetén a 2.27. ábra. Ez a tényező mindig pozitív, ezért a válasz fázisától függetlenül adja meg a statikus amplitúdó növekményét, azaz a

$$\boxed{\mu=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}}. \tag{2.210}$$

értéke a *csillapított rendszer rezonanciatényezője.* A rezonanciatényezővel kifejezve a partikuláris megoldást:

$$x_g(t)=x_{st}\mu\cos\left(\omega t-\varphi_0\right). \tag{2.211}$$

A rezonanciatényező (2.210) szerinti alakjából levonhatjuk az alábbi következtetéseket:



2.27. ábra. A csillapított rendszer rezonanciatényezője ξ néhány értékénél. a) $\xi = 0.05$, b) $\xi = 0.1$, c) $\xi = 0.2$, d) $\xi = 0.5$, e) $\xi = \sqrt{0.5}$, f) $\xi = 0.8$. g) Az a)-f) függvények, és a csillapítatlan rendszer rezonanciatényezője egy közös ábrán.

- Ugyanakkora frekvenciahányados mellett a nagyobb csillapítás esetén nagyobb a nevező, így kisebb a rezonanciatényező.
- Amennyiben a csillapítás nem nulla, akkor a nevező mindig pozitív, azaz nem lehet nulla, ezért a rezonanciatényező mindig véges nagyságú lesz.
- A rezonanciatényező a maximumát annál a gerjesztőerő-körfrekvenciánál veszi fel, ahol a körfrekvencia szerinti első deriváltja éppen nulla.
- A szélsőérték helyét analitikusan kifejtve[45] megállapítható, hogy nagyobb csillapítás esetén a szélsőérték kisebb körfrekvenciánál lép fel (azaz a maximum balra tolódik).
- Ha $\xi \geq \sqrt{0,5}$, akkor az egyetlen szélsőérték az $\omega = 0$-nál kialakuló maximum. Ilyenkor a csillapítás nagy értéke miatt bármilyen gerjesztés esetén a válasz amplitúdója kisebb lesz, mint a gerjesztés amplitúdójából számolható statikus elmozdulás lenne, azaz a dinamikus hatás nem növeli a statikus elmozdulást, hanem mindig csökkenti azt. Emiatt a $\xi = \sqrt{0,5}$ értékét *eszményi*, vagy *ideális csillapítás*nak nevezzük. Az ideális csillapítás fizikai értékét a $c_i = \sqrt{0,5}c_{kr} = \sqrt{km}$ képlettel számolhatjuk.
- Az építőmérnöki gyakorlatban jellemző anyagok esetén ξ értéke lényegesen kisebb 1-nél. Ilyenkor a szélsőérték a gerjesztőerő körfrekvenciájának ω_0-közeli értékénél fel, és értéke is ahhoz közeli. Ezért csillapított rendszernél is az $\omega = \omega_0$ esetet nevezzük *rezonanciának*, és a rezonanciatényező maximumának értékét közelíthetjük az ott számított

  $$\mu_{max} \approx \frac{1}{2\xi} \tag{2.212}$$

  értékkel. Ezzel a maximummal tehát a gerjesztőerő körfrekvenciájától függetlenül egy felső becslést adhatunk a kialakuló rezgés amplitúdójára.

2.4.2.2. A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás

A (2.192) differenciálegyenlet (2.193) kezdeti feltételeket kielégítő megoldása a (2.211) szerinti partikuláris megoldás és a szabadrezgés-feladatnak (kis csillapítás esetén) a (2.107) szerinti általános megoldásának összege:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \cdot (A \cdot \cos(\omega_0^* t) + B \cdot \sin(\omega_0^* t)) + \frac{q_0}{k}\mu \cos(\omega t - \varphi_0)\,. \tag{2.213}$$

Az általános megoldás A és B paraméterét kell úgy meghatározni, hogy az $x(t)$ függvény kielégítse a kezdeti feltételeket.

A teljes megoldás alakjából most egyértelműen látszik, hogy a tranziens rész idővel lecseng, azaz hosszú távon csak az *állandósult rezgésrész*, azaz az

$$x_{all}(t) = \frac{q_0}{k}\mu \cos(\omega t - \varphi_0)\,. \tag{2.214}$$

függvény marad, melynek amplitúdója, azaz az

$$x_{all} = \frac{q_0}{k}\mu. \tag{2.215}$$

[45] A levezetést az olvasóra bízzuk.

az érdekes.

A szerkezet igénybevételeinek számításához a helyettesítő statikus erőt a rugóban és a csillapítóelemben ébredő erők összegeként kell előállítani. A rugóban ébredő erő az

$$f_r(t) = kx_{all}(t) = q_0\mu\cos(\omega t - \varphi_0) \tag{2.216}$$

képlettel számolható, melynek maximuma

$$f_{r,max} = q_0\mu. \tag{2.217}$$

A csillapítóelemben ébredő erő az

$$f_{cs}(t) = c\dot{x}_{all}(t) = -c\omega\frac{q_0}{k}\mu\sin(\omega t - \varphi_0) \tag{2.218}$$

képlettel számolható, melynek maximuma

$$f_{cs,max} = q_0\frac{\omega c}{k}\mu = q_0\mu 2\xi\frac{\omega}{\omega_0}. \tag{2.219}$$

A két erő egymáshoz képest $\pi/2$ fázissal van eltolva, így az összegzésüknél a (2.65) szerinti levezetéssel élve a helyettesítő statikus erő maximuma:

$$f_{st,max} = q_0\mu\sqrt{1 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \tag{2.220}$$

2.4.2.3. Komplex harmonikus gerjesztés *

Komplex analízis használatával a csillapított rendszer partikuláris megoldását más úton is megtalálhatjuk. Ehhez tételezzük fel, hogy a $q_c(t) = q_0\cos(\omega t)$ gerjesztésre a szerkezet válasza $x_c(t)$, míg a $q_s(t) = q_0\sin(\omega t)$ gerjesztésre a szerkezet válasza $x_s(t)$. A lineáris szerkezetben érvényes a szuperpozíció elve, azaz a $q_c(t)$ és $q_s(t)$ gerjesztőerők bármely lineáris kombinációjára az $x_c(t)$ és $x_s(t)$ függvények azonos kombinációja lesz a válasz[46]. Matematikailag ez akár nem valós kombinációkra is igaz. A

$$\tilde{q}(t) = q_0\left(\cos(\omega t) + i\cdot\sin(\omega t)\right) \tag{2.221}$$

komplex gerjesztés a $q_c(t)$ gerjesztőerő 1-szeresének és a $q_s(t)$ gerjesztőerő i-szeresének összege, ahol i a képzetes egység. Ennek megfelelően a válasz is komplex lesz, az x_c függvény 1-szeresének és az $x_s(t)$ függvény i-szeresének összege:

$$\tilde{x}(t) = x_c(t) + i\cdot x_s(t). \tag{2.222}$$

A válaszban tehát a valós rész a $q_c(t)$ gerjesztésre, míg a képzetes rész a $q_s(t)$ gerjesztésre adott válasz lesz. Írjuk fel a (2.221) képlet szerinti komplex gerjesztőerőt az *Euler*-féle átírással[47] az alábbi alakba:

$$\tilde{q}(t) = q_0\left(\cos(\omega t) + i\cdot\sin(\omega t)\right) = q_0 e^{i\omega t}. \tag{2.223}$$

[46] Legegyszerűbb példa: a $q_0\cos(\omega t) + q_0\sin(\omega t)$ gerjesztésre az $x_c(t) + x_s(t)$ függvény lesz a válasz.

[47] $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

Erre a gerjesztőerőre keressük az

$$m\ddot{\tilde{x}}(t) + c\dot{\tilde{x}}(t) + k\tilde{x}(t) = q_0 e^{i\omega t} \tag{2.224}$$

differenciálegyenlet komplex partikuláris megoldását, aminek a valós része lesz a koszinuszos, a képzetes része pedig a szinuszos gerjesztésre adott válasz..

Keressük a megoldást a gerjesztőerőhöz hasonló alakban:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_{g0} e^{i\omega t}. \tag{2.225}$$

A feltételezett alak idő szerinti első és második deriváltjai:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = i\omega\tilde{x}_{g0} e^{i\omega t}, \qquad \ddot{\tilde{x}}(t) = -\omega^2 \tilde{x}_{g0} e^{i\omega t}. \tag{2.226}$$

Helyettesítsük be ezeket a (2.224) differenciálegyenletbe:

$$-\omega^2 m\tilde{x}_{g0} e^{i\omega t} + i\omega c\tilde{x}_{g0} e^{i\omega t} + k\tilde{x}_{g0} e^{i\omega t} = q_0 e^{i\omega t}, \tag{2.227}$$

és egyszerűsítsük $e^{i\omega t}$-vel:

$$-\omega^2 m\tilde{x}_{g0} + i\omega c\tilde{x}_{g0} + k\tilde{x}_{g0} = q_0. \tag{2.228}$$

A komplex válasz amplitúdóját tehát a

$$(k - \omega^2 m + i\omega c)\tilde{x}_{g0} = q_0 \tag{2.229}$$

egyenlet megoldásaként kapjuk, ahol a $k - \omega^2 m + i\omega c$ mennyiséget *komplex dinamikus merevség*nek nevezzük. Ez a komplex szám még az $\omega = \omega_0$ rezonancia esetén sem lesz nulla, ezért oszthatunk vele, majd emeljük ki a nevezőből k-t:

$$\tilde{x}_{g0} = \frac{q_0}{k - \omega^2 m + i\omega c} = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2 m}{k} + i\frac{\omega c}{k}}. \tag{2.230}$$

A nevezőben levő komplex számtól úgy szabadulhatunk meg, ha a komplex konjugáltjával szorzunk. Ennek eredménye:

$$\tilde{x}_{g0} = \frac{q_0}{k} \frac{1 - \frac{\omega^2 m}{k} - i\frac{\omega c}{k}}{\left(1 - \frac{\omega^2 m}{k}\right)^2 + \left(\frac{\omega c}{k}\right)^2}. \tag{2.231}$$

Helyettesítsük be az $1/\omega_0^2 = m/k$ és a $1\xi/\omega_0 = c/k$ értékeket:

$$\tilde{x}_{g0} = \frac{q_0}{k} \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - i2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \tag{2.232}$$

majd bontsuk fel a pozitív nevezőt a négyzetgyöke szorzataira:

$$\tilde{x}_{g0} = \frac{q_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - i2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}. \tag{2.233}$$

A középső tört a (2.210) képletben bevezetett rezonanciatényező, így

$$\tilde{x}_{g0} = \frac{q_0}{k}\mu \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - i2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}. \tag{2.234}$$

A teljes megoldás ennek a komplex amplitúdónak az $e^{i\omega t}$-szerese. Írjuk fel ezt az időfüggő megoldást a harmonikus függvényekkel:

$$\tilde{x}_g(t) = \frac{q_0}{k}\mu \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - i2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} . \left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right). \tag{2.235}$$

Ennek valós része a koszinuszos, képzetes része a szinuszos gerjesztésre adott válasz. Valós eredményt a valósszor-valós, illetve a képzetesszer-képzetes tagok adnak:

$$x_c(t) = \frac{q_0}{k}\mu \left[\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \cos(\omega t) + \frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \sin(\omega t) \right], \tag{2.236}$$

képzetes eredményt pedig a valós-szor-képzetes, illetve a képzetes-szer-valós tagok adnak:

$$x_s(t) = \frac{q_0}{k}\mu \left[\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \sin(\omega t) + \frac{-2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \cos(\omega t) \right], \tag{2.237}$$

A szögletes zárójelekben levő harmonikus függvények amplitúdója (2.236), illetve (2.237) esetén is 1, és átírhatók $\cos(\omega t - \varphi_0)$, illetve $\sin(\omega t - \varphi_0)$ alakra[48], ahol a válasz fáziskésésének szöge:

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \tag{2.238}$$

A komplex analízissel kapott eredmények természetesen azonosak a 2.4.2 szakaszban levezetett eredményekkel, ennek a megközelítésnek többszabadságfokú- és folytonos szerkezetek esetén lesz komoly előnye.

2.4.3. Periódikus gerjesztések szuperpozíciója

2.4.3.1. Harmonikus gerjesztések szuperpozíciója

Legyen a csillapítatlan, vagy csillapított rendszer (2.24), vagy (2.26) szerinti differenciálegyenletében a teherfüggvény az alábbi:

$$q(t) = \sum_{j=1}^{n} q_j \cos\left(\omega_j t - \varphi_j\right), \tag{2.239}$$

azaz különböző amplitúdójú, körfrekvenciájú és fázisú terhek összege. A rendszerünk lineáris, ezért a szuperpozíció elvét használva a partikuláris megoldást

[48] Az alábbi trigonometrikus azonosságok felhasználásával: $\cos(\omega t - \varphi_0) = \cos(\omega t)\cos(\varphi_0) + \sin(\omega t)\sin(\varphi_0)$, valamint $\sin(\omega t - \varphi_0) = \sin(\omega t)\cos(\varphi_0) - \cos(\omega t)\sin(\varphi_0)$

a (2.166), vagy a (2.209) megoldások alapján írhatjuk fel. Csillapítatlan esetben:

$$x_g(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega_j^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega_j t - \varphi_j), \tag{2.240}$$

csillapított esetben pedig:

$$x_g(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_j^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega_j^2}{\omega_0^2}}} \cos\left(\omega_j t - \varphi_j - \operatorname{arctg} \frac{\omega_j c}{k - \omega_j^2 m}\right). \tag{2.241}$$

Látszik, hogy minden egyes teherkomponenshez egy statikus eltolódás és a rezonanciatényező szorzatával képzett harmonikus komponens tartozik a válaszban, ráadásul csillapított esetben a különböző frekvenciájú teherkomponensekhez különböző fáziskésés tartozik.

A kezdeti feltételeket ebben az esetben is a teljes megoldással, azaz csillapítatlan esetben a (2.52) és a (2.240) összegével:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 t) + x_g(t) \tag{2.242}$$

csillapított esetben pedig a (2.107) és a (2.240) összegével:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(A \cdot \cos(\omega_0^* t) + B \cdot \sin(\omega_0^* t)\right) + x_g(t) \tag{2.243}$$

kell kielégíteni.

A gerjesztés általános ω_j körfrekvenciái esetén a szabadrezgésből származó tagok lecsengése után sem lesz az állandósult rezgésrész periódikus, ezért a szélsőértékre csak felső becslést adhatunk. Amennyiben a válasz mindegyik harmonikus komponensének azonos előjelű szélsőértéke azonos pillanatban lép fel, akkor a maximumot az amplitúdók abszolútértékeinek összegéből számolhatjuk:

$$x_g^{max} = \sum_{j=1}^{n} \frac{|q_j|}{k} \mu_j, \tag{2.244}$$

ahol μ_j a j-edik gerjesztőerő-körfrekvenciához tartozó rezonanciatényező.

A szerkezetre ható maximális erőt csillapítatlan esetben a (2.7) alapján az

$$f_r^{max} = \sum_{j=1}^{n} |q_j| \mu_j \tag{2.245}$$

képlettel számíthatjuk. Csillapított esetben a rugóban és a csillapítóelemben ébredő erőket is számolnunk kell a (2.220) képlet alapján, azaz a felső határt az

$$f_r^{max} = \sum_{j=1}^{n} |q_j| \mu_j \sqrt{1 + 4\xi_J^2 \frac{\omega_j^2}{\omega_0^2}} \tag{2.246}$$

képlettel számolhatjuk.

2.4.3.2. Periódikus gerjesztésekre adott válasz

Korábban láttuk, hogy minden (2.152) alakban megadott periódikus gerjesztőerő Fourier-sorba fejthető (2.154) alakban. Az így megadott függvényben az összegzett harmonikus függvények rendre átírhatók

$$q(t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \cos(j\omega t - \varphi_j) \tag{2.247}$$

alakra. A j-edik teherkomponenshez az $\omega_j = j\omega$ körfrekvencia tartozik, azaz a periódikus gerjesztés is kezelhető harmonikus gerjesztések összegeként, amint azt a 2.4.3.1 alpontban bemutattuk. Eszerint az állandósult rezgésrész csillapítatlan esetben az

$$x_{all}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{k} \frac{1}{1 - \frac{j^2\omega^2}{\omega_0^2}} \cos(j\omega t - \varphi_j), \tag{2.248}$$

alakban adódik. (A válasz csillapított esetben is periódikus lesz, de a rezonanciatényezőben és a fáziskésésben a csillapítás hatását figyelembe kellene venni.)

Bár a Fourier-sorból származó képlet végtelen összegzést tartalmaz, ugyanezt az eredményt használhatjuk akkor is, ha a (2.239) szerinti gerjesztőerő komponensei körfrekvenciáinak hányadosai mind racionális számok. Ekkor található olyan ω körfrekvencia, melynek minden ω_j körfrekvencia egész számszorosa, tehát a terhet kezelhetjük (2.247) szerinti alakban, akár úgy, hogy több q_j amplitúdó is nullával lenne egyenlő.

Azt is könnyű kiolvasni a (2.248) képletből, hogy a gerjesztőerő magasabb frekvenciájú komponenseihez már nullához tartó rezonanciatényező tartozik, azaz ezeknek a komponenseknek a hatása tipikus esetben elhanyagolható.

A (2.248) válaszban a maximum keresésekor most kihasználhatjuk a periodicitást, és az abszolútértékek összegzése helyett egy pontosabb (esetleg alacsonyabb és így gazdaságosabb tervezést eredményező) szélsőértéket találhatunk, ha egy tetszőleges $T = 2\pi/\omega$ időtartamból kiválasztjuk a maximumot[49].

2.5. Általánosan gerjesztett egyszabadságfokú rendszerek rezgése

Az előző fejezetben ismertetett harmonikus gerjesztés matematikailag pontosan kezelhető, a tényleges gerjesztések többsége azonban nem harmonikus, gyakran még csak nem is periódikus. Ezeknek az általános erővel gerjesztett rendszereknek a megoldására mutatunk három jellegzetes módszert. A harmonikus gerjesztés természetesen csak egy speciális esete az általános gerjesztésnek, ezért az ismertetésre kerülő módszerek mindegyike használható annak megoldására is, és közelítés esetén a módszer pontossága is ellenőrizhető.

2.5.1. Megoldásfüggvény feltételezése

Függvényszerűen ismert $q(t)$ teher esetén az egyik lehetséges módszer a partikuláris megoldás keresésére: valamilyen, kellő számú paramétert tartalmazó

[49] Vagy egy $T/2 = \pi/\omega$ időtartamon belül az abszolútérték maximumát

formában feltételezzük a megoldásfüggvény alakját[50], majd a mozgás differenciálegyenletébe behelyettesítve úgy határozzuk meg a paraméterek értékét, hogy azok minden időpillanatban kielégítsék a differenciálegyenletet. Harmonikus gerjesztés esetén korábban pontosan ezt tettük, amikor a partikuláris megoldást harmonikus alakban kerestük.

A módszer előnye, hogy akár szakaszonként is megadható a teherfüggvény, és szakaszonként a partikuláris megoldás, ilyenkor egy-egy szakaszon az általános megoldás paramétereinek meghatározásához a kezdeti feltételeket a szakasz elején az előző szakasz végpontjában számolt elmozdulás- és sebességértékek adják.

2.5.1.1. Konstans teher

Legyen a csillapítatlan rendszert terhelő teherfüggvény értéke q_0, és a $t = 0$ pillanatban legyen a kitérés és az elmozdulás is nulla, azaz oldjuk meg a

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = q_0 \tag{2.249}$$

differenciálegyenletet az

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0 \tag{2.250}$$

kezdeti feltételek mellett.

A partikuláris megoldás feltételezett alakja legyen a teherhez hasonlóan egy konstans függvény:

$$x_g(t) = b. \tag{2.251}$$

Ennnek idő szerinti első és második deriváltja zérus, így a (2.249) egyenletbe behelyettesítve megkapjuk a b paraméter értékét:

$$m \cdot 0 + k \cdot b = q_0, \qquad \rightarrow \qquad b = \frac{q_0}{k}. \tag{2.252}$$

Az általános megoldás a partikuláris megoldás és a kiegészítő egyenlet általános megoldásának összege:

$$x(t) = x_g(t) + x_0(t) = \frac{q_0}{k} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t), \tag{2.253}$$

aminek A és B paramétereivel kell kielégíteni a (2.250) szerinti kezdeti feltételeket. A $\cos 0 = 1$ és $\sin 0 = 0$ azonosságokat felhasználva:

$$\frac{q_0}{k} + A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0, \tag{2.254}$$

$$0 - \omega_0 A \cdot 0 + \omega_0 B \cdot 1 = 0. \tag{2.255}$$

Ezek megoldása

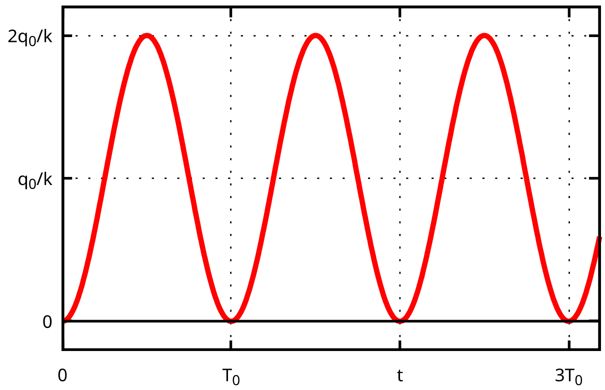
$$A = -\frac{q_0}{k}, \qquad B = 0, \tag{2.256}$$

így a feladat kezdeti értékeket kielégítő megoldása:

$$x(t) = \frac{q_0}{k}\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right), \tag{2.257}$$

A megoldásfüggvényt a 2.28. ábrán mutatjuk, látszik, hogy a statikus tehernek megfelelő q_0/k egyensúlyi helyzet körül alakul ki egy szabadrezgés, ahogy ezt korábban a 2.1.6.2 alpontban is bemutattuk.

[50] A feltételezett alak német elnevezése (Ansatz) után ezt ansatz-függvénynek is szokás hívni.



2.28. ábra. Állandó teherrel terhelt egyszabadságfokú rendszer rezgése.

2.5.1.2. Lineárisan változó teher

Legyen a csillapítatlan rendszert terhelő teherfüggvény értéke $q_0 \cdot t$, és a $t = 0$ pillanatban legyen a kitérés és az elmozdulás is nulla, azaz oldjuk meg a

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = q_0 \cdot t \tag{2.258}$$

differenciálegyenletet az

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0 \tag{2.259}$$

kezdeti feltételek mellett[51].

A partikuláris megoldás feltételezett alakja legyen a teherhez hasonlóan egy lineárisan változó függvény:

$$x_g(t) = b \cdot t. \tag{2.260}$$

Ennek idő szerinti első deriváltja b, második deriváltja zérus, így a (2.258) egyenletbe behelyettesítve megkapjuk a b paraméter értékét:

$$m \cdot 0 + k \cdot b \cdot t = q_0 \cdot t, \qquad \rightarrow \qquad b = \frac{q_0}{k}. \tag{2.261}$$

Az általános megoldás a partikuláris megoldás és a kiegészítő egyenlet általános megoldásának összege:

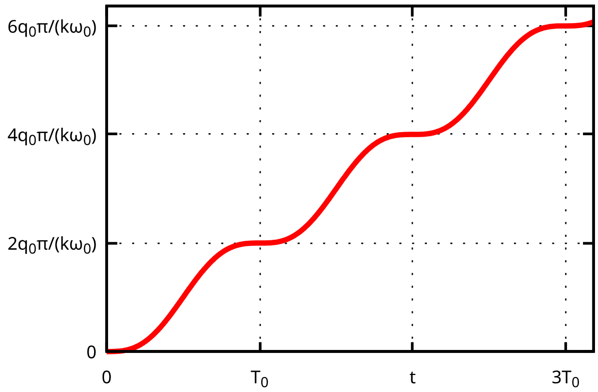
$$x(t) = x_g(t) + x_0(t) = \frac{q_0}{k} \cdot t + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t), \tag{2.262}$$

aminek A és B paramétereivel kell kielégíteni a (2.259) szerinti kezdeti feltételeket. A $\cos 0 = 1$ és $\sin 0 = 0$ azonosságokat felhasználva:

$$\frac{q_0}{k} \cdot 0 + A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0, \tag{2.263}$$

$$\frac{q_0}{k} - \omega_0 A \cdot 0 + \omega_0 B \cdot 1 = 0. \tag{2.264}$$

[51] Felhívjuk a figyelmet, hogy ennek a q_0-nak más a szerepe, és így a mértékegysége is, mint az előző alpontban használt q_0-nak, ami aztán majd módosítja a megoldásban bevezetett b paraméter szerepét és mértékegységét is



2.29. ábra. Lineárisan változó teherrel terhelt egyszabadságfokú rendszer rezgése.

Ezek megoldása

$$A = 0, \qquad B = -\frac{q_0}{k\omega_0}, \tag{2.265}$$

így a feladat kezdeti értékeket kielégítő megoldása:

$$x(t) = \frac{q_0}{k}t - \frac{q_0}{k\omega_0}\sin(\omega_0 t), \tag{2.266}$$

A megoldásfüggvényt a 2.29. ábrán mutatjuk, látszik, hogy most a kvázistatikus tehernek megfelelő $q_0/k \cdot t$ egyensúlyi helyzet körül alakul ki egy szabadrezgés.

Bár az előző két példa azt sugallhatja, hogy az időben négyzetesen változó $q(t) = q_0 \cdot t^2$ teherre hasonló módon található megoldás, ha azt $x_g(t) = b \cdot t^2$ alakban keressük, a feltételezett alakot és deriváltjait behelyettesítve azt tapasztalnánk, hogy b értéke az időtől függő mennyiség lenne, ami viszont a derivált előállítását befolyásolná, ezért más ansatz-függvényt kellene keresni.

2.5.1.3. Lépcsőzetesen megugró teherintenzitás

Legyen a teherfüggvény értéke a $t < 0$ tartományban 0, a $0 \leq t$ tartományban q_0:

$$q(t) = \begin{cases} 0, ha & t < 0 \\ q_0, ha & 0 \leq t. \end{cases} \tag{2.267}$$

Ekkor természetesen a megoldásfüggvényt is szakaszonként kell megadnunk.

A $t < 0$ esetben a rendszer terheletlen, így annak rezgése egy szabadrezgés-feladat megoldása.Tegyük fel, hogy az

$$x(t) = 0 \tag{2.268}$$

függvény kielégíti az erre az időszakra felírható kezdeti feltételeket.

A $0 \leq t$ esetben a rendszert egy konstans erő gerjeszti, így a partikuláris megoldás a 2.5.1.1. alpontban látott módon

$$x_g(t) = \frac{q_0}{k} \tag{2.269}$$

lesz. Az általános megoldás paramétereinek számításához a $t < 0$ időszak (2.268) megoldásfüggvényének és első deriváltjának a $t = 0$ pillanatbeli behelyettesítési értékeit kell kezdeti értékként előírnunk a $t = 0$ pillanatban. Ez azonos megoldást eredményez a 2.5.1.1. alpontban levezetett eredménnyel, de az most csak a $0 \leq t$ tartományban érvényes, így a teljes megoldás:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , ha \quad t < 0 \\ \frac{q_0}{k}\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right) & , ha \quad 0 \leq t. \end{cases} \tag{2.270}$$

2.5.1.4. Téglalap-teher

Legyen a teherfüggvény értéke a $t < 0$ tartományban 0, a $0 \leq t \leq T$ tartományban q_0, majd a $T < t$ tartományban ismét 0:

$$q(t) = \begin{cases} 0, ha & t < 0 \\ q_0, ha & 0 \leq t \leq T \\ 0, ha & T < t. \end{cases} \tag{2.271}$$

A megoldásfüggvényt természetesen most is szakaszonként kell megadnunk.

Ha a mozgás kezdetére zérus kezdeti feltételeket írunk elő, akkor az első két szakasz a 2.5.1.3. alpontban leírtak szerintiek lesznek a $t < 0$ és a $0 \leq t \leq T$ tartományokon:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , ha \quad t < 0 \\ \frac{q_0}{k}\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right) & , ha \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases} \tag{2.272}$$

A $T < t$ tartományon a zérus teher miatt a partikuláris megoldás $x_g(t) = 0$, így az általános megoldás egy szabadrezgésnek felel meg:

$$x(t) = 0 + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t). \tag{2.273}$$

A kezdeti feltételeket a szakasz kezdetén $t = T$ pillanatban írjuk elő a (2.272) egyenlet második függvénye és annak első deriváltja segítségével:

$$x(T) = \frac{q_0}{k}\left(1 - \cos(\omega_0 T)\right), \qquad \dot{x}(T) = \frac{q_0 \omega_0}{k}\sin(\omega_0 T). \tag{2.274}$$

Fentiekből az A és B paraméterek az alábbi egyenletrendszerből határozhatók meg:

$$A\cos(\omega_0 T) + B\sin(\omega_0 T) = \frac{q_0}{k}\left(1 - \cos(\omega_0 T)\right), \tag{2.275}$$

$$-A\omega_0\sin(\omega_0 T) + B\omega_0\cos(\omega_0 T) = \frac{q_0\omega_0}{k}\sin(\omega_0 T). \tag{2.276}$$

Az egyenletrendszert a 2.2.1.2. alpontban bemutatott módon oldhatjuk meg könnyen, azaz átírjuk mátrixos alakra:

$$\begin{bmatrix} \cos(\omega_0 T) & \sin(\omega_0 T) \\ -\sin(\omega_0 T) & \cos(\omega_0 T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{q_0}{k} \begin{bmatrix} 1 - \cos(\omega_0 T) \\ \sin(\omega_0 T) \end{bmatrix} \tag{2.277}$$

majd az együtthatómátrix ortogonalitását kihasználva a megoldáshoz elegendő a mátrix transzponáltjával szorozni balról az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{q_0}{k} \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 T) & -\sin(\omega_0 T) \\ \sin(\omega_0 T) & \cos(\omega_0 T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \cos(\omega_0 T) \\ \sin(\omega_0 T) \end{bmatrix} \tag{2.278}$$

A műveletet elvégezve a két paraméterre az alábbi képleteket kapjuk:

$$A = \frac{q_0}{k}\left(\cos(\omega_0 T) - \cos^2(\omega_0 T) - \sin^2(\omega_0 T)\right) = \frac{q_0}{k}\left(\cos(\omega_0 T) - 1\right),$$
$$B = \frac{q_0}{k}\left(\sin(\omega_0 T) - \sin(\omega_0 T)\cos(\omega_0 T) + \cos(\omega_0 T)\sin(\omega_0 T)\right) = \frac{q_0}{k}\sin(\omega_0 T). \tag{2.279}$$

Végül, (2.279) eredményét felhasználva (2.273) képletében a (2.272) megoldás kiegészíthető:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & ,ha \quad t < 0 \\ \frac{q_0}{k}\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right) & ,ha \quad 0 \le t \le T \\ \frac{q_0}{k}\left[\left(\cos(\omega_0 T) - 1\right)\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 T)\sin(\omega_0 t)\right] & ,ha \quad T < t. \end{cases} \tag{2.280}$$

A kapott eredményből az utolsó szakasz egy harmonikus rezgés, melynek maradó amplitúdója a teherintenzitás által okozott q_0/k statikus elmozdulás mellett a terhelés T időtartamától függ. A maradó amplitúdót az A és B paraméterekből számolva:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{q_0}{k}\sqrt{\left(\cos(\omega_0 T) - 1\right)^2 + \sin^2(\omega_0 T)}. \tag{2.281}$$

A négyzetre emeléseket kifejtve és a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ trigonometrikus azonosságot felhasználva a maradó amplitúdó az alábbi alakban írható:

$$C = \frac{q_0}{k}\sqrt{2 - 2\cos(\omega_0 T)}. \tag{2.282}$$

A maradó amplitúdó minimumértéke 0. Ez akkor fordul elő, ha a $\cos(\omega_0 T) = 1$, azaz $\omega_0 T$ egészszerese 2π-nek, vagyis a terhelés T időtartama a rendszer T_0 periódusidejének egészszerese. A maradó amplitúdó maximuma a $\cos(\omega_0 T) = -1$ esetben alakul ki. Ilyenkor az amplitúdó értéke a teher által okozott statikus kitérés kétszerese: $2q_0/k$. Ez akkor fordul elő, ha $\omega_0 T$ valamilyen páratlan egészszerese π-nek, azaz a terhelés a T_0 periódusidő valamilyen $\frac{2j-1}{2}$-szereséig tart, ahol j tetszőleges pozitív egész.

2.5.1.5. Hullám-teher

Legyen a teherfüggvény értéke a $t < 0$ tartományban 0, a $0 \le t \le T$ tartományban egy q_0 amplitúdójú szinuszhullám, majd a $T < t$ tartományban ismét 0:

$$q(t) = \begin{cases} 0 & ,ha \quad t < 0 \\ q_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) & ,ha \quad 0 \le t \le T \\ 0 & ,ha \quad T < t. \end{cases} \tag{2.283}$$

A megoldásfüggvényt természetesen most is szakaszonként kell megadnunk.

A $t < 0$ tartományon legyen a kezdeti feltételeket kielégítő megoldás az

$$x(t) = 0. \tag{2.284}$$

A $0 \le t \le T$ tartományon egy $\omega = \frac{2\pi}{T}$ körfrekvenciájú harmonikus gerjesztőerő működik q_0 amplitúdóval. Tételezzük fel, hogy nincs rezonancia. Ekkor $\omega \ne \omega_0$ azaz $T_0 \ne T$, és a partikuláris megoldás

$$x_g(t) = \frac{q_0}{k}\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\sin(\omega t) \tag{2.285}$$

A kezdeti feltételekhez a (2.284) függvény és deriváltja behelyettesítési értéke kell $t = 0$ pillanatban. Mindkettő nulla, így a kezdeti feltételeket kielégítő megoldás a $0 \le t \le T$ tartományon:

$$x(t) = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right]. \tag{2.286}$$

Végül, a $T < t$ tartományon a test ismét szabadrezgést végez. Kezdeti feltételei a (2.284) függvényből és annak deriváltjából:

$$x(T) = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \frac{\omega}{\omega_0} (-1) \sin(\omega_0 T). \tag{2.287}$$

$$\dot{x}(T) = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 \left[1 - \cos(\omega_0 T)\right]. \tag{2.288}$$

Az $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ alakú általános megoldás paraméterei fenti kezdeti feltételekből az alábbi képletből

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \frac{\omega}{\omega_0} \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 T) & -\sin(\omega_0 T) \\ \sin(\omega_0 T) & \cos(\omega_0 T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(\omega_0 T) \\ 1 - \cos(\omega_0 T) \end{bmatrix} \tag{2.289}$$

számítható:

$$A = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \frac{\omega}{\omega_0} \left(-\sin(\omega_0 T)\right). \tag{2.290}$$

$$B = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \frac{\omega}{\omega_0} \left(-1 - \cos(\omega_0 T)\right). \tag{2.291}$$

Fenti eredményeket összegezve a rendszer egyetlen szinuszhullámra adott válasza:

$$x(t) = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \cdot \\ \cdot \begin{cases} 0 & ,ha \quad t < 0 \\ \left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right] & ,ha \quad 0 \le t \le T \\ \frac{\omega}{\omega_0} \left[-\sin(\omega_0 T)\cos(\omega_0 t) - (1 + \cos(\omega_0 T))\sin(\omega_0 t) \right] & ,ha \quad T < t. \end{cases} \tag{2.292}$$

Az utolsó szakasz most is egy szabadrezgés, aminek az amplitűdója a részletek megadása nélkül:

$$C = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{2 + 2\cos\left(2\pi \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{2.293}$$

Tekintettel arra, hogy $\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{T}{T_0}$, a gyök alatti kifejezésnek olyankor van maximuma, amikor a gerjesztés ideje a periódusidő egészszerese. A többi szorzótényező ennek a szélsőértéknek a helyét csak kis mértékben módosítja. A maradó rezgés amplitúdója zérus is lehet, ha $\cos\left(2\pi \frac{\omega_0}{\omega}\right) = -1$. Ez akkor fordul elő, ha a gerjesztés időtartama a sajátperiódus $\frac{2j-1}{2}$-szerese, ahol j tetszőleges pozitív egész szám.

Természetesen a rezonancia esetén a fenti képlet nem használható. A gerjesztés véges időtartama miatt viszont akkor is csak véges amplitúdójú lenne a maradó rezgés, és a legnagyobb amplitúdót akkor érnénk el.

2.5.2. Duhamel-integrál

Tegyük fel, hogy ismerjük a teher $q(t)$ függvényét, de annak komplexitása miatt nem tudunk rá megoldásfüggvényt feltételezni. A rendszer válasza ettől még természetesen létezik, de a fizikai bizonyságon túl ennek matematikai bizonyítása is adható. Használjuk ehhez a szuperpozíció elvét.

Bontsuk fel a $q(t)$ teherfüggvényt időben elemien rövid $d\tau$ ideig ható terhek összegére. Ha egy-egy ilyen teher hatására fel tudjuk írni a rendszer válaszát, akkor a teljes terhelésre adott választ a kérdéses pillanat előtt működő elemi terhekre adott elemi válaszok összességeként állíthatjuk elő.

Jelölje $dx_\tau(t)$ a $(\tau; \tau + d\tau)$ időtartam alatt működő $q(\tau)$ teher[52] hatására kialakuló mozgást ahol $t = \tau$ pillanatig a kitérés és a sebesség is nulla. Az időskála eltolásával erre használhatnánk a 2.5.1.4. pontban levezetett eredményt a $T = d\tau \to 0$ határátmenettel, de inkább használjuk a mozgásmennyiség változásának tételét. A $d\tau$ időtartam alatt a $q(\tau)$ erő egy $q(\tau)d\tau$ nagyságú impulzust közöl a tömegponttal. A tömegpont mozgásmennyisége, azaz tömegének és sebességének a szorzata ennyivel változik, és mivel a tömeg állandó, ezért a változás a sebesség dv_τ elemi növekményét jelenti:

$$m \cdot dv_\tau = q(\tau)d\tau, \qquad dv_\tau = \frac{q(\tau)}{m}d\tau. \tag{2.294}$$

A $d\tau$ időtartam után a test szabadrezgésbe kezd, melynek kezdeti feltétele a zérus kezdeti kitérés és a dv_τ kezdeti sebesség. Csillapított rendszert feltételezve a $t > \tau + d\tau$ időszakra a kialakuló többletmozgás a (2.121) képletbe való behelyettesítés után:

$$dx_\tau(t) = \frac{dv_\tau}{\omega_0} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin\left(\omega_0^*(t-\tau)\right), \tag{2.295}$$

Amibe behelyettesítve a kezdeti sebességet (2.294)-ből:

$$dx_\tau(t) = \frac{q(\tau)d\tau}{m\omega_0^*} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin\left(\omega_0^*(t-\tau)\right). \tag{2.296}$$

Egy t időt megelőzően működő összes $q(\tau)$ erő hatásának a szuperponálásához ezeket az elemi hatásokat kell összegezni, azaz integrálni a kezdeti feltételek pillanatától a t ideig:

$$x_g(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{q(\tau)}{m\omega_0^*} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin\left(\omega_0^*(t-\tau)\right) d\tau. \tag{2.297}$$

Itt is igaz, hogy a gyakorlatban a kezdeti feltételeket gyakran a $t_0 = 0$ pillanatban írjuk elő zérus kitéréssel és sebességgel, ilyenkor a fenti integrál tovább egyszerűsödik és a teljes megoldást adja:

$$x(t) = \int_{0}^{t} \frac{q(\tau)}{m\omega_0^*} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin\left(\omega_0^*(t-\tau)\right) d\tau. \tag{2.298}$$

Az így levezetett kifejezést *Duhamel-integrál*nak nevezzük.

[52] A $d\tau$ időtartam legyen kellően (mérnökien) kicsiny ahhoz, hogy a q függvény változását ezen időtartam alatt már elhanyagolhassuk.

Csillapítatlan szerkezet esetén a (2.298) képletet két helyen egyszerűsíthetjük: a $\xi = 0$ miatt az exponenciális tag kitevője mindig 0 lesz, így az a szorzó tag 1 értéket vesz fel; az ω_0^* csillapított sajátkörfrekvencia pedig megegyezik az ω_0 csillapítatlan sajátkörfrekvenciával. Ezeket felhasználva a csillapítatlan rendszer esetén a Duhamel-integrál:

$$x(t) = \int_0^t \frac{q(\tau)}{m\omega_0} \sin\left(\omega_0(t-\tau)\right) d\tau. \tag{2.299}$$

2.5.1. Példa (Harmonikus gerjesztés Duhamel-integrállal). *Határozzuk meg a Duhamel-integrál kifejtésével a k merevségű, m tömegű egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer válaszát a $q(t) = q_0 \sin(\omega t)$ gerjesztésre.*

Megoldás
A rendszer sajátkörfrekvenciája $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Ezt felhasználjuk a (2.299) képletben, így az

$$x(t) = \frac{q_0}{m\omega_0} \int_0^t \sin\left(\omega\tau\right) \sin\left(\omega_0(t-\tau)\right) d\tau. \tag{2.300}$$

integrált kell kifejteni. A szorzat primitívfüggvényét felhasználva:

$$x(t) = \frac{q_0}{m\omega_0} \left[\frac{\omega \cos(\omega\tau)\sin(\omega_0(t-\tau)) + \omega_0 \sin(\omega\tau)\cos(\omega_0(t-\tau))}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \tag{2.301}$$

Ha nem áll fenn a rezonancia esete, akkor a nevező nem zérus. Tegyük fel, hogy esetünkben $\omega \neq \omega_0$. Ilyenkor az alsó és felső határokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$x(t) = \frac{q_0}{m\omega_0} \left[\frac{0 + \omega_0 \sin(\omega t) - \omega \sin(\omega_0 t) + -0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]_{\tau=0}^{\tau=t}. \tag{2.302}$$

kiemeléseket követően, és az $m\omega_0^2 = k$ behelyettesítést elvégezve végül azt kapjuk, hogy:

$$x(t) = \frac{q_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} (\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)). \tag{2.303}$$

Ez természetesen megfelel a (2.174) képlettel kapott eredménynek a szinuszos gerjesztés behelyettesítése után.

2.5.2. Példa (Téglalapteher Duhamel-integrállal). *Határozzuk meg a Duhamel-integrál kifejtésével a k merevségű, m tömegű egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer válaszát egy olyan impulzusteher hatására, a $0 < t < T$ időtartam alatt $q(t) = q_0$ intenzitású, azon kívül pedig nulla..*

Megoldás
A rendszer sajátkörfrekvenciája $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Ezt felhasználjuk a (2.299) képletben. A $0 < t < T$ tartományban az

$$x(t) = \frac{q_0}{m\omega_0} \int_0^t \sin\left(\omega_0(t-\tau)\right) d\tau, \tag{2.304}$$

míg a $T < t$ tartományban az

$$x(t) = \frac{q_0}{m\omega_0} \int_0^T \sin\left(\omega_0(t-\tau)\right) d\tau \tag{2.305}$$

integrált kell kifejteni, hiszen a $T < t$ időben $q(t) = 0$.

A $0 < t < T$ tartományban a primitívfüggvényt felhasználva:

$$x(t) = \frac{q_0}{m\omega_0} \left[\frac{\cos(\omega_0(t-\tau))}{\omega_0}\right]_{\tau=0}^{\tau=t}, \tag{2.306}$$

amibe az alsó és felső határokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$x(t) = \frac{q_0}{m\omega_0} \frac{1-\cos(\omega_0(t))}{\omega_0}, \tag{2.307}$$

vagy a $k = m\omega_0^2$ behelyettesítést elvégezve :

$$x(t) = \frac{q_0}{k}(1-\cos(\omega_0(t))). \tag{2.308}$$

A $0 < t < T$ tartományban a primitívfüggvényt felhasználva:

$$x(t) = \frac{q_0}{m\omega_0} \left[\frac{\cos(\omega_0(t-\tau))}{\omega_0}\right]_{\tau=0}^{\tau=T}, \tag{2.309}$$

amibe az alsó és felső határokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$x(t) = \frac{q_0}{m\omega_0} \frac{\cos(\omega_0(t-T)) - \cos(\omega_0(t))}{\omega_0}, \tag{2.310}$$

vagy a $k = m\omega_0^2$ behelyettesítést elvégezve :

$$x(t) = \frac{q_0}{k}(\cos(\omega_0(t-T)) - \cos(\omega_0(t))). \tag{2.311}$$

Mint látjuk, most nem volt szükség a két szakasz határán a kezdeti feltételek illesztésére.

2.5.3. Példa (Lineáris teher Duhamel-integrállal)**.** *Határozzuk meg a Duhamel-integrál kifejtésével a k merevségű, m tömegű egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer válaszát a $q(t) = q_0 \cdot t$ gerjesztésre.*

Megoldás
A rendszer sajátkörfrekvenciája $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Ezt felhasználjuk a (2.299) képletben, így az

$$x(t) = \frac{q_0}{m\omega_0} \int_0^t \tau \cdot \sin\left(\omega_0(t-\tau)\right) d\tau. \tag{2.312}$$

integrált kell kifejteni. A primitívfüggvényt felhasználva:

$$x(t) = \frac{q_0}{m\omega_0} \left[\frac{\sin(\omega_0(t-\tau)) + \omega_0\tau\cos(\omega_0(t-\tau))}{\omega_0^2} \right]_{\tau=0}^{\tau=t}, \tag{2.313}$$

amibe az alsó és felső határokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$x(t) = \frac{q_0}{m\omega_0} \frac{0 + \omega_0 t - \sin(\omega_0 t) - 0}{\omega_0^2} \tag{2.314}$$

vagy a $k = m\omega_0^2$ behelyettesítést elvégezve :

$$x(t) = \frac{q_0}{k}\left(t - \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\right). \tag{2.315}$$

ami természetesen megegyezik (2.266) képletével.

2.5.3. Time-history analízis

Előfordul, hogy a gerjesztőerő nem ismert függvényszerűen, hanem csak bizonyos diszkrét időpillanatokban, melyek között már valamilyen ismert változást tételezhetünk fel, vagy olyan sok szakaszra lehetne csak bontani a gerjesztőerő függvényét, hogy a szakaszonkénti megoldás a váltásonkénti kezdetiérték-számítás miatt már nem lenne célszerű. Ilyenkor időlépéses vizsgálatot lehet végezni: a megoldást (elmozdulásokat, sebességeket) csak diszkrét t_j időpillanatokban határozzuk meg oly módon, hogy a (2.147) differenciálegyenletet csak diszkrét időpillanatokban elégítjük ki. Gyakorlatilag az elmozdulás és a sebesség ismeretében a gyorsulást tudjuk meghatározni egy adott pillanatban, ami alapján a következő időpillanat elmozdulás- és sebességértékét számoljuk, azaz az egyes diszkrét időértékeken lépdelünk előre, hogy a teljes vizsgált időtartamon meghatározzuk a vizsgált pillanatokban a rendszer válaszát.

Attól függően, hogy az egyes lépésekben milyen elmozdulás- és sebességértékeket használunk, illetve melyik időpillanatban elégítjük ki a mozgásegyenletet, különféle módszerekről beszélhetünk. A másodrendű (2.147) differenciálegyenlet helyett a gyakorlatban legtöbbször két elsőrendű differenciálegyenletet oldunk meg. A sebesség jelölésére bevezetve a $v(t)$ függvényt ezek:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= \frac{q(t)}{m} - 2\xi\omega_0 v(t) - \omega_0^2 x(t) \end{aligned} \tag{2.316}$$

2.5.3.1. Cauchy-Euler-féle töröttvonal

A Caucy-Euler-féle töröttvonal-módszer esetén a t_j időpillanatokban ismerjük a $q_j = q(t_j)$ teherértékeket, amikből az $x_j = x(t_j)$ elmozdulásokat, és a $v_j = \dot{x}(t_j)$ sebességeket keressük ugyanezekben a pillanatokban úgy, hogy a kezdeti x_0 és v_0 értékeket ismerjük. A módszer ismertetéséhez egy lépést mutatunk be, mégpedig azt, hogy a t_{j+1} pillanatban érvényes x_{j+1} és v_{j+1} értékeket hogyan számítjuk. (A $j = 0$-ból induló első lépésre tekintettel ez a $j + 1$-edik időlépés.)

Az x_j, v_j értékekkel a (2.316) egyenletekből kiszámíthatjuk az elmozdulás és a sebesség idő szerinti első deriváltjait

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= v_j, \\ \dot{v}_j &= \frac{q_j}{m} - 2\xi\omega_0 v_j - \omega_0^2 x_j, \end{aligned} \tag{2.317}$$

majd az $x(t)$ és $v(t)$ függvényeket a $t = t_j$ pont körül sorba fejtjük:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_j) + \dot{x}(t_j) \cdot (t - t_j) + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_j) \cdot (t - t_j)^2 \dots \\ v(t) &= v(t_j) + \dot{v}(t_j) \cdot (t - t_j) + \frac{1}{2}\ddot{v}(t_j) \cdot (t - t_j)^2 \dots \end{aligned} \tag{2.318}$$

Jelöljük Δt_{j+1}-gyel a $j + 1$-edik időlépés $t_{j+1} - t_j$ hosszát. Ha ez a lépés kellően kicsiny ahhoz, hogy a sorbafejtéskor a másod- és magasabb fokú tagokat elhanyagoljuk, akkor a t_{j+1} pillanatban az elmozdulást és a sebességet az alábbi képletből számolhatjuk:

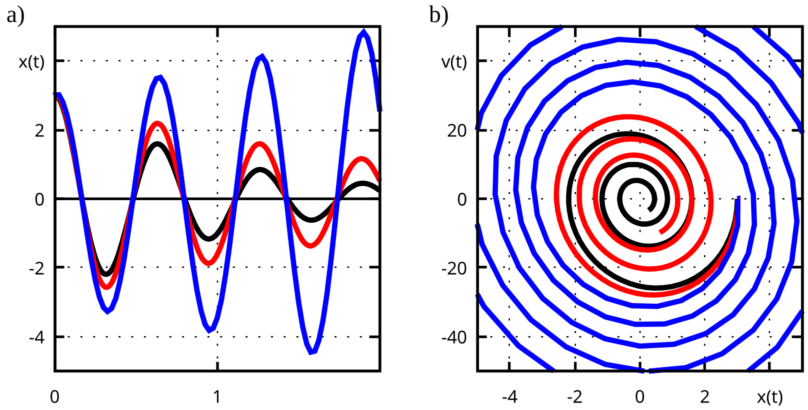
$$x_{j+1} = x_j + \dot{x}_j \cdot \Delta t_{j+1}, \qquad v_{j+1} = v_j + \dot{v}_j \cdot \Delta t_{j+1}, \tag{2.319}$$

ahol $\dot{x}_j$ és $\dot{v}_j$ értékét a (2.317) egyenletből számíthatjuk. A gyakorlatban az időlépés hosszát többnyire minden lépésben azonos Δt-re vesszük fel, ilyenkor a képlet tovább egyszerűsödik, és az időlépések j darabszámából egyértelműen számolható a $t_j = j \cdot \Delta t$ időpillanat értéke is.

A Cauchy-Euler-féle töröttvonalmódszer pontossága A módszer alkalmazása során egyetlen paraméterünk van, mégpedig az időlépés Δt hossza, így azt vizsgálhatjuk, hogy annak milyen hatása van a közelítés pontosságára. A Taylor-sorba fejtett függvények közelítésénél a Δt^2 nagyságrendű, és annál nagyobb kitevőjű tagokat hanyagoltuk el, így egyetlen lépésnek a hibája Δt^2 nagyságrendű[53]. Az időlépés nagyságát tehát felére csökkentve egy lépés hibája negyedére csökken. Látni kell azonban, hogy egy előre meghatározott t időtartamot $n = t/\Delta t$ lépésben tudunk kiszámolni, ezért a hibát n-szer egymás után követjük el, a korábbi hibákat továbbgörgetve, így a módszer hibája a teljes időtartamon már $\Delta t^2/\Delta t = \Delta t$ nagyságrendű[54]. Az időlépés nagyságát tehát felére csökkentve a teljes megoldás hibája felére csökken. Az időlépés azonban két okból sem csökkenthető tetszőleges mértékben: egyrészt a szükséges lépésszám, és így a számítási idő fordított arányban növekszik vele, másrészt a túl kicsit növekmények a számítógép véges számábrázolása miatt elvesznek.

[53] Ennek a tulajdonságnak a jelölésére használható az $\mathcal{O}$ jelölés (kiejtve *ordó*), ami egy függvény közelítésekor az elhanyagolás nagyságrendjének a becslésére szolgáló függvény jelölése. Esetünkben egy lépés hibája $\mathcal{O}(\Delta t^2)$.

[54] Az előző lábjegyzet jelölésmódját alkalmazva a számítás hibája $\mathcal{O}(\Delta t)$.



2.30. ábra. Csillapított rendszer szabadrezgése analitikusan, illetve numerikusan ($\omega_0 = 10$, $\xi = 0.1$, $x_0 = 3$, $v_0 = 0$, színek: analitikus, $\Delta t = 0.01$, $\Delta t = 0.01$): a) az elmozdulások az idő függvényében; b) a fázistér.

A Cauchy-Euler-féle töröttvonalmódszer stabilitása A Cauchy-Euler-féle töröttvonalmódszer használata során az időlépés megválasztásának egy másik korlátja, hogy túl nagy időlépés választása esetén előfordulhat, hogy a véges értékhez tartó $x(t)$ megoldás helyett egyre növekvő abszolútértékű értékeket kapunk eredményül. Mivel a módszer nagyobb időlépések esetén instabil, ezért a Cauchy-Euler-féle töröttvonalmódszerre azt mondjuk, hogy *feltételesen stabil*. A 2.30. ábrán szemléltetjük ezt egy csillapított szerkezet szabadrezgésével. Az a) ábra az idő függvényében mutatja az elmozdulást. A fekete folytonos vonal az analitikus megoldás, a piros, szegmensekből álló vonal egy stabil számítást eredményező időlépéses számítás eredménye, a kék, szegmensekből álló vonal pedig egy túl nagy időlépéshez tartozó instabil számítás eredménye, ahol az amplitúdó folyamatosan növekszik. A piros vonalon is látszik, hogy az amplitúdó csökkenése kisebb, míg a periódusidő hosszabb: mindkettő a numerikus számítás eredménye. A b) ábrán az ún. fázistérben, egy $x - v$-koordinátarendszerben ábrázoltuk a mozgást. A színes vonalaknál látszik, hogy minden pillanatban egy ottani analitikus megoldás érintője alkotja a következő szakaszt.

2.5.3.2. Centrális differenciák módszere

A centrális differenciák módszerével az előrelépés során egy-egy függvény változásának az irányát nem az adott szakaszának kezdőpontjában, hanem a szakasz középpontjában határozzuk meg. Így egy-egy lépés során nem az érintő, hanem egy szelő mentén haladunk, mely szelő közelítőleg párhuzamos az időlépés felében levő érintővel.

Az eljárásból következik, hogy az elmozdulásokat és a sebességeket $\Delta t/2$-vel eltolt pillanatokban kapjuk meg, azaz x_j-ből és $v_{j+0,5}$-ből kell számolnunk x_{j+1}-t, majd $v_{j+1,5}$-t. A (2.316) első egyenletét a $t = (j + 0,5)\Delta t$ pillanatban közelítjük:

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} = v_{j+0,5}, \qquad \to x_{j+1} = x_j + v_{j+0,5} \cdot \Delta t. \tag{2.320}$$

Ezután a (2.316) második egyenletét a $t = (j+1)\Delta t$ pillanatban közelítjük:

$$\begin{aligned} \frac{v_{j+1,5} - v_{j+0,5}}{\Delta t} &= \frac{q_{j+1}}{m} - 2\xi\omega_0 v_{j+0,5} - \omega_0^2 x_{j+1}, \\ \rightarrow v_{j+1,5} &= v_{j+0,5} + \left(\frac{q_{j+1}}{m} - 2\xi\omega_0 v_{j+0,5} - \omega_0^2 x_{j+1}\right) \cdot \Delta t. \end{aligned} \tag{2.321}$$

A módszer a Cauchy-Euler-módszerhez hasonlóan feltételesen stabil.

2.5.3.3. Runge-Kutta-módszerek

A Cauchy-Euler-féle töröttvonalmódszernek különböző javításai léteznek. Az ún. implicit Euler-módszer esetében a differenciálegyenletet a t_j pillanat helyett a t_{j+1} pillanatban elégítjük ki (így a későbbi időpontból *hátrafelé* számoljuk egy csonkolt Taylor-sorral az elmozdulásokat), és ez alapján számoljuk a következő lépést. Általánosságban a Runge-Kutta-módszerek sajátja, hogy a lépések irányának közelítéséhez közbenső lépéseket vesznek igénybe. Attól függően, hogy egy időlépést hány közbenső szakaszra bontunk, beszélhetünk különböző rendű Runge-Kutta-módszerekről.

A Runge-Kutta-módszerek előnye, hogy hierarchikusan ellenőrzési lehetőséget nyújtanak az időlépés hosszának ellenőrzésére. Eggyel magasabbrendű sémával végrehajtva ugyanazt a lépést ellenőrizhető, hogy a hiba kívül esik-e egy megkövetelt határon. Ha igen, akkor csökkenteni kell az időlépés hosszát. Emiatt lehet matematikai programokban, könyvtárakban ode23, ode45 nevű függvényeket találni: a nevek arra utalnak, hogy a közönséges differenciálegyenletet (ode) másod-, vagy negyedfokú Runge-Kutta-módszerrel oldja meg, ahol a lépésköz ellenőrzését harmad- vagy ötödfokú Runge-Kutta-módszerrel hajtja végre.

2.5.3.4. Newmark-módszer

A Newmark-módszer a szerkezetek dinamikájának vizsgálata során használt egyik leginkább kifinomult módszer. Az alapelve az, hogy a gyorsulás időlépésen belüli változására feltételezünk egy függvényt. Ennek a változásnak a segítségével paraméteresen kifejezzük a kezdőponti elmozdulás, sebesség, gyorsulás és a végponti elmozdulás segítségével a végponti sebességet és gyorsulást. Utóbbiakkal felírva a mozgásegyenletet a végpontban, behelyettesítés után egy, ismeretlenként csak a végponti elmozdulást tartalmazó egyenletet kapunk.

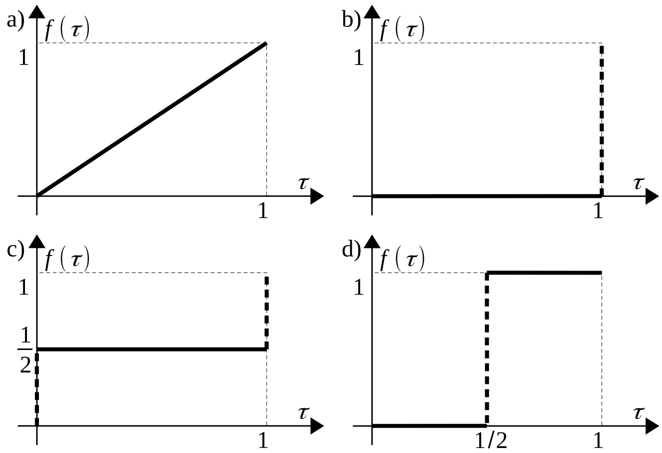
Jelölje a_j és a_{j+1} a gyorsulást az időlépés kezdő- és végpontjában. Az időlépés közben változzon a gyorsulás az alábbi függvény szerint:

$$a(t_j + \tau\Delta t) = a_j + (a_{j+1} - a_j) f(\tau). \tag{2.322}$$

Azaz bevezettünk egy dimenziótlan τ időt, ami az időlépés során 0 és 1 között változik, és egy $f(\tau)$ függvényt, ami a gyorsulás változásának függvénye. A valóságban az $f(\tau)$ függvény időlépésről-időlépésre változhat, a számításhoz viszont rögzítettnek tekintjük az alakját. (Pár lehetséges példát mutat a 2.31. ábra.)

A gyorsulásfüggvény ismeretében felírhatjuk a sebességfüggvényt is:

$$v(t_j + \tau\Delta t) = v_j + \int_{t_j}^{t_j+\tau\Delta t} a(t_j + T)\,dT. \tag{2.323}$$



2.31. ábra. A Newmark-módszer $f(\tau)$ függvényének néhány lehetséges alakja. a) lineáris, b) végig a kezdőpontbeli érték, c) átlagérték. d) lépcsőzetesen ugró.

A gyorsulás (2.322) szerinti képletét behelyettesítve és az integrálást elvégezve kihasználhatjuk, hogy az a_j, a_{j+1} értékek időben nem változnak, az idő és a dimenziótlan idő között pedig Δt szorzó van, így azt kapjuk, hogy:

$$v(t_j + \tau\Delta t) = v_j + a_j\tau\Delta t + (a_{j+1} - a_j)\Delta t \int_0^\tau f(\mathcal{T})d\mathcal{T}. \tag{2.324}$$

Vezessük be az alábbi jelölést:

$$g(\tau) = \int_0^\tau f(\mathcal{T})d\mathcal{T}. \tag{2.325}$$

Amennyiben az $f(\tau)$ függvényt rögzítettük, úgy a $g(\tau)$ függvény is ismertnek tekinthető, és így a sebességfüggvény az időlépés alatt:

$$v(t_j + \tau\Delta t) = v_j + a_j\tau\Delta t + (a_{j+1} - a_j)\Delta t \cdot g(\tau). \tag{2.326}$$

Jelölje α a $g(1)$ értéket. Ezt felhasználva a sebesség az időlépés végén:

$$v_{j+1} = v_j + a_j\Delta t + (a_{j+1} - a_j)\Delta t\alpha. \tag{2.327}$$

A sebességfüggvény ismeretében felírhatjuk az elmozdulásfüggvényt:

$$x(t_j + \tau\Delta t) = x_j + \int_{t_j}^{t_j+\tau\Delta t} v(t_j + T)dT. \tag{2.328}$$

A sebesség (2.326) szerinti képletét behelyettesítve és az integrálást elvégezve kihasználhatjuk, hogy a v_j, a_j, a_{j+1} értékek időben nem változnak, az idő és a dimenziótlan idő között pedig Δt szorzó van, így azt kapjuk, hogy:

$$x(t_j + \tau\Delta t) = x_j + v_j\tau\Delta t + a_j\frac{(\tau\Delta t)^2}{2} + (a_{j+1} - a_j)\Delta t^2 \int_0^\tau g(\mathcal{T})d\mathcal{T}. \tag{2.329}$$

Jelölje β az $\int_0^1 g(\mathcal{T})d\mathcal{T}$ értékét. Ezt felhasználva az elmozdulás az időlépés végén:

$$x_{j+1} = x_j + v_j\Delta t + a_j\frac{\Delta t^2}{2} + (a_{j+1} - a_j)\Delta t^2\beta. \tag{2.330}$$

Ezután fejezzük ki a sebesség és a gyorsulás végponti értékeit a végponti elmozdulás segítségével. A gyorsulás (2.330) alapján:

$$a_{j+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}x_{j+1} - \frac{1}{\beta\Delta t^2}x_j - \frac{1}{\beta\Delta t}v_j + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)a_j \tag{2.331}$$

majd ebből a sebesség (2.327) alapján:

$$v_{j+1} = \frac{\alpha}{\beta\Delta t}x_{j+1} - \frac{\alpha}{\beta\Delta t}x_j + v_j\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + a_j\Delta t\left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right) \tag{2.332}$$

Az így kifejezett mennyiségeket helyettesítsük be a mozgás differenciálegyenletébe a t_{j+1} pillanatban:

$$\begin{aligned} m \cdot \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}x_{j+1} - \frac{1}{\beta\Delta t^2}x_j - \frac{1}{\beta\Delta t}v_j + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)a_j\right] + \\ c \cdot \left[\frac{\alpha}{\beta\Delta t}x_{j+1} - \frac{\alpha}{\beta\Delta t}x_j + v_j\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + a_j\Delta t\left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right)\right] + \\ + k \cdot x_{j+1} = q_{j+1}. \end{aligned} \tag{2.333}$$

Az ismeretlen x_{j+1} együtthatóit egyik, az előző lépésből ismert mennyiségeket a másik oldalra rendezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left[k + \frac{\alpha}{\beta\Delta t}c + \frac{1}{\beta\Delta t^2}m\right]x_{j+1} = \\ q_{j+1} + m \cdot \left[+\frac{1}{\beta\Delta t^2}x_j + \frac{1}{\beta\Delta t}v_j - \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)a_j\right] + \\ + c \cdot \left[\frac{\alpha}{\beta\Delta t}x_j - v_j\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) - a_j\Delta t\left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.334}$$

A baloldalon az x_{j+1} együtthatóját hatékony merevségnek nevezzük:

$$k_{eff} = k + \frac{\alpha}{\beta\Delta t}c + \frac{1}{\beta\Delta t^2}m, \tag{2.335}$$

a jobb oldalt pedig hatékony tehernek (q_{eff}). Így a mozgásegyenlet a

$$k_{eff}x_{j+1} = q_{eff,j+1} \tag{2.336}$$

alakú lesz. Már itt kiemeljük,hogy a k_{eff} minden időlépésben azonos.

A Newmark-módszer stabilitása A Newmark-módszer stabilitása a Δt időlépésen túl az $f(\tau)$ függvénytől, azaz az abból származó α és β paraméterektől függ. Csillapítatlan esetben a stabilitás feltétele, hogy $\alpha \geq \frac{1}{2}$ legyen, de ez lehet még feltételesen stabil, azaz csak kellően kicsiny időlépésekre teljesülő eljárás. Feltétel nélküli stabil eljárásra vezet, ha $\beta \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)^2$.

Végül nézzük meg a 2.31. ábra függvényei esetén az α és β értékeket.

- A *lineárisan változó* $f(\tau)$ függvény esetén $\alpha = 1/2$ és $\beta = 1/6$, ez tehát feltételesen stabil eljárást eredményez.
- A *kezdőértéket állandónak tekintő* $f(\tau)$ függvény esetén $\alpha = 0$ és $\beta = 0$, ez tehát feltételesen instabil eljárást eredményez.
- A *két végpont közötti átlagértéket állandónak tekintő* $f(\tau)$ függvény esetén $\alpha = 1/2$ és $\beta = 1/4$, ez tehát feltétel nélkül stabil eljárást eredményez.
- A *két végpont közötti félidőben váltó* $f(\tau)$ függvény esetén $\alpha = 1/2$ és $\beta = 1/8$, ez tehát feltételesen stabil eljárást eredményez.

2.5.4. Válaszspektrum

A korábbiakban láttuk, hogy hogyan lehet számolni a szerkezet válaszát. Az $x(t)$ válaszfüggvény használata egyszerű, egy $kx(t)$ nagyságú kvázistatikus helyettesítő erő ugyanazt az elmozdulást hozná létre, így az abból származó igénybevételek a szerkezet igénybevételeinek időfüggését adja meg.

A méretezési gyakorlatban gyakran csak az igénybevételek szélsőértékére van szükségünk. Egy adott szerkezetre ható $q(t)$ teher esetén a teher hatására kialakuló igénybevételeket az alábbi lépésekben számolhatjuk:

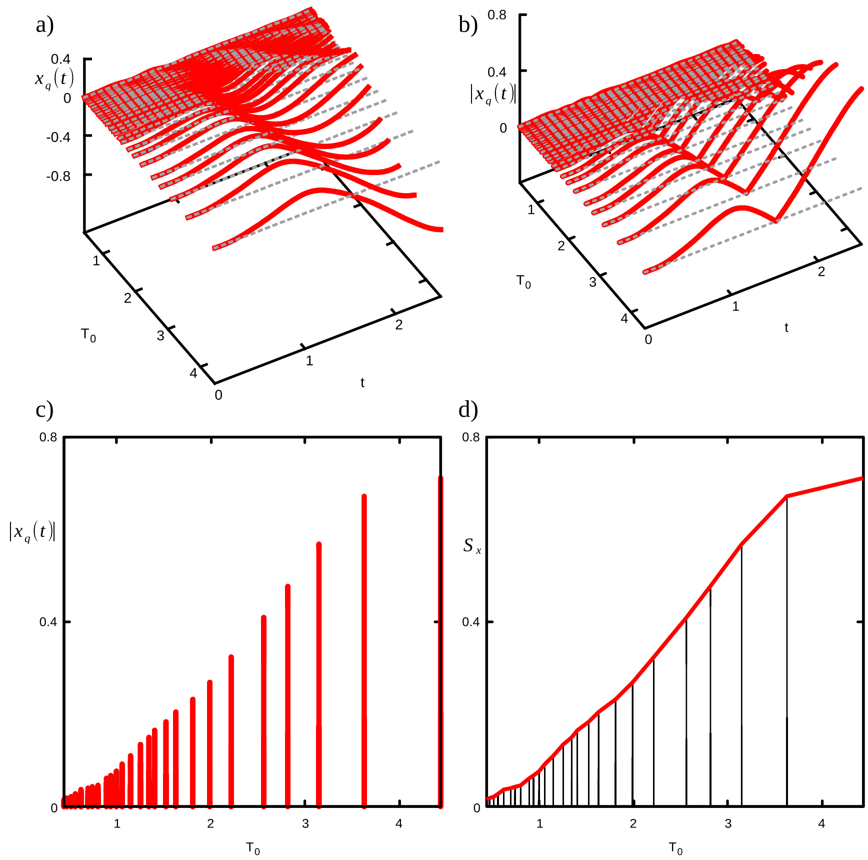
- A $q(t)$ teherből meghatározzuk a szerkezet $x(t)$ válaszát.
- A válasszal azonos kitérést a $kx(t)$ nagyságú kvázistatikus erő hozna létre. (Ezt az erőt minden egyes pillanatban egy statikus erőként kezeljük, így a számítás során a mozgó tömeg miatti tehetetlenségi hatásokat elhanyagoljuk.)
- A legnagyobb igénybevételeket a legnagyobb erő okozza, vagyis az időfüggő kvázistatikus erő helyett elegendő annak kx_{max} maximumát teherként alkalmazni a szerkezeten.
- (Rezgésfeladatról lévén szó a legnagyobb terhet általában tetszőleges előjellel elképzelhetőnek tartjuk, és a teherkombinációban vesszük figyelembe a két lehetséges irányt. Ilyenkor a maximális kitérést a legnagyobb abszolútértékű kitérésként értelmezzük, azaz $x_{max} = |x(t)|$

2.5.4.1. Elmozdulás válaszspektrum

Szerkezetcsaládok vizsgálatakor szükség lehet szerkezeti paraméterek függvényében több szerkezeten is az igénybevételek, vagy mint láttuk az elmozdulások szélsőértékeire. Ennek kezelésére vezessük be a *válaszspektrum* fogalmát. Tegyük fel, hogy azonos m tömegű, de különböző k merevségű szerkezeteknek meghatározzuk az $x_q(t)$ válaszát ugyanannak a $q(t)$ tehernek a hatására. A válaszok, és azok maximuma csak a merevségtől, vagy az azonos tömeg miatt a sajátkörfrekvenciától függ. Ugyanígy a válaszok maximuma is csak a sajátkörfrekvenciától függ, azaz:

$$x_{q,max}(\omega_0) = \max|x_q(t, \omega_0)| \tag{2.337}$$

A frekvenciafüggő mennyiségeknek a frekvenciafüggését a *spektrum*mal fejezzük ki. A gyakorlatban a frekvenciafüggést a sajátkörfrekvencia helyett a terhelt



2.32. ábra. Az elmozdulás válaszspektrum származtatása. a) Különböző szerkezetek válasza. b)-c) A válaszok abszolútértékei különböző nézetekben. d) A pálcikák közötti köztes értékek interpolációjával kiegészített válaszspektrum.

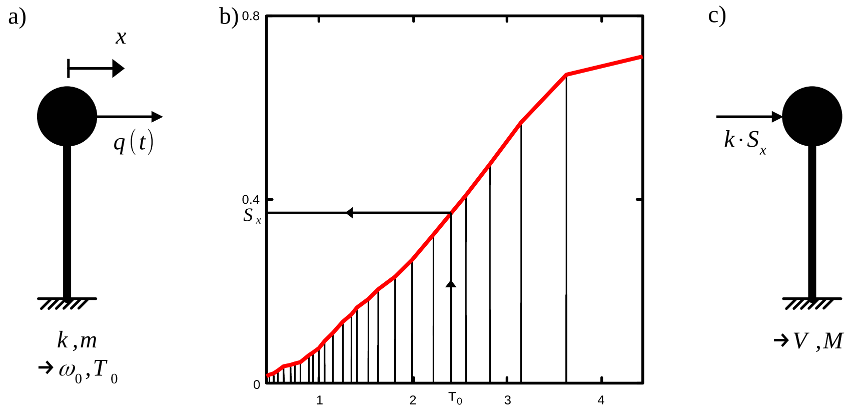
szerkezet sajátperiódusának függvényében szokták megadni, az így kapott

$$S_x(T_0) = \max|x_q(t, T_0)| \tag{2.338}$$

függvény a $q(t)$ teher *elmozdulás-válaszspektrum*a.

A válaszspektrum származtatását szemlélteti a 2.32. ábra. A különböző merevségek (és így sajátkörfrekvenciák, valamint sajátperiódusok) esetén számított $x(t)$ válaszfüggvények láthatók az a) ábrán. A b) ábrán ezek abszolútértékét ábrázoltuk, ami a zérusértékeknél látható törésekben jelenik meg. Az így kapott diagramokat a c) ábrán a T_0 tengely irányából nézve mutatjuk, ekkor az egyes pálcikák egy-egy szerkezet válaszának elmozdulás-idő diagramjai. Az elmozdulás válaszspektrum ezeknek a pálcikáknak a maximumértékei, amit végtelen sűrű pálcikakiosztással, vagy az egyes pontok közötti interpolációval tehetünk teljessé, utóbbit mutatja a d) ábra.

Az elmozdulás-válaszspektrum használata A (2.338 szerint definiált elmozdulás válaszspektrum használata az előállítás módja alapján magától értetődő. Az azonos m tömegű szerkezetnek meghatározzuk a k merevségét, majd



2.33. ábra. Az elmozdulás válaszspektrum használata. a) Szerkezet jellemzőinek számítása. b) A válaszspektrum értékének leolvasása. c) A szerkezet terhelés a maximális kitérést okozó statikus erővel.

a sajátkörfrekvenciáját és abból a periódusidejét. A periódusidő függvényében leolvassuk a 2.32.d) ábrából a hozzá tartozó legnagyobb elmozdulást, majd a szerkezetre működtetjük az ezt létrehozó

$$f_max = k \cdot S_x(T_0) \tag{2.339}$$

nagyságú erőt, és meghatározzuk az abból származó igénybevétel-szélsőértékeket. A teherkombinációk képzésekor ezeket a szélsőértékeket ± 1 szorzóval kell figyelembe vennünk, hogy a rezgés jelleget kövessük. Ezeket a lépéseket szemlélteti a 2.33. ábra

Megjegyezzük, hogy az $x(t)$ elmozdulásból származtatott elmozdulás-válaszspektrumhoz hasonló módon lehet az $\dot{x}(t)$ sebességből sebesség-válaszspektrumot, illetve az $\ddot{x}(t)$ gyorsulásból gyorsulás-válaszspektrumot képezni: különböző szerkezeteken a válaszból számítjuk az az abszolútérték maximumát és a periódusidő függvényében ábrázoljuk. Ezeket azonban az építőmérnöki gyakorlatban nem használjuk, ezért nem is mutatunk rá példát.

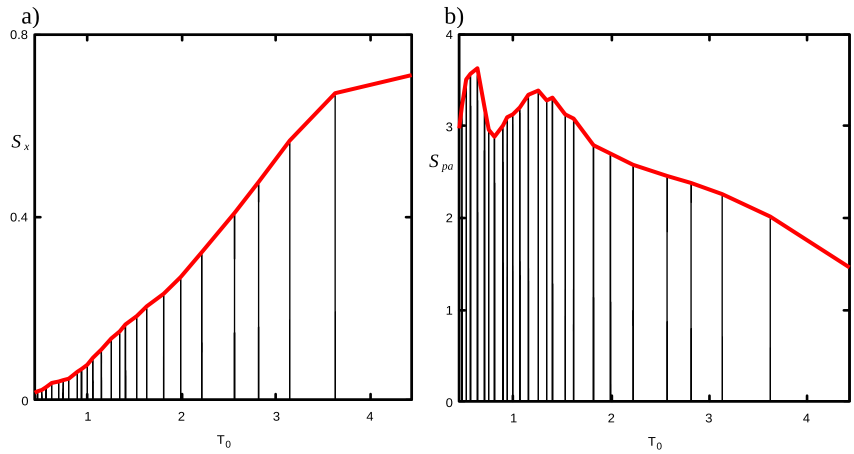
2.5.4.2. Pszeudogyorsulás, pszeudogyorsulás-válaszspektrum

Az előző pontban bemutatott elmozdulás-válaszspektrum használata során két olyan probléma van, ami nehezíti, vagy pontatlanná teszi a számítást. Az egyik, hogy az összes szerkezetnek, amire használni tudjuk a spektrumot, ugyanakkora tömegűnek kell lennie. A másik, hogy a növekvő T_0, azaz csökkenő merevség mellett az elmozdulások maximuma meredeken növekszik, így a kisebb értékeket csak pontatlanul tudjuk leolvasni, a nagyobb értékek akár a végtelenbe tartanak.

Mindkét problémán segít, ha bevezetjük a *pszeudogyorsulás* fogalmát, mint a kitérésnek és a sajátkörfrekvencia négyzetének a szorzatát:

$$a_p(t, \omega_0) = \omega_0^2 \cdot x_q(t, \omega_0). \tag{2.340}$$

A definíció alapján megállapíthatjuk, hogy a pszeudogyorsulás mértékegysége valóban m/s^2, de az előállítás módja szerint nem azonos a gyorsulással. A pszeudogyorsulásnak is meghatározhatjuk a szélsőértékét, és így a pszeudogyorsulás-



2.34. ábra. a) Elmozdulás-válaszspektrum. b) Pszeudogyorsulás-válaszspektrum.

válaszspektrumot a periódusidő függvényében. Könnyű belátni, hogy a pszeudogyorsulás-válaszspektrum az elmozdulás-válaszspektrumból a sajátkörfrekvencia négyzetével való szorzással kapható.

$$S_{pa}(T_0) = \max|\omega_0^2 \cdot x_q(t, T_0)| = \omega_0^2 \max|x_q(t, T_0)| = \omega_0^2 S_x(T_0) \tag{2.341}$$

A 2.34. ábrán mutatjuk egymás mellett a korábban látott elmozdulás-válaszspektrumot és a hozzá tartozó pszeudogyorsulás-válaszspektrumot. Látható, hogy a végtelenbe tartó szélsőértékek eltűntek.

A pszeudogyorsulás-válaszspektrum használata Korábban már láttuk, hogy az elmozdulás-válaszspektrum ismeretében az

$$f_{max} = k \cdot S_x(T_0) \tag{2.342}$$

képlettel számolhatjuk azt a statikus erőt, ami a rezgés közbeni legnagyobb igénybevételekkel azonos igénybevételeket okoz. Helyettesítsük be a fenti egyenletbe a $k = m\omega_0^2$ összefüggést

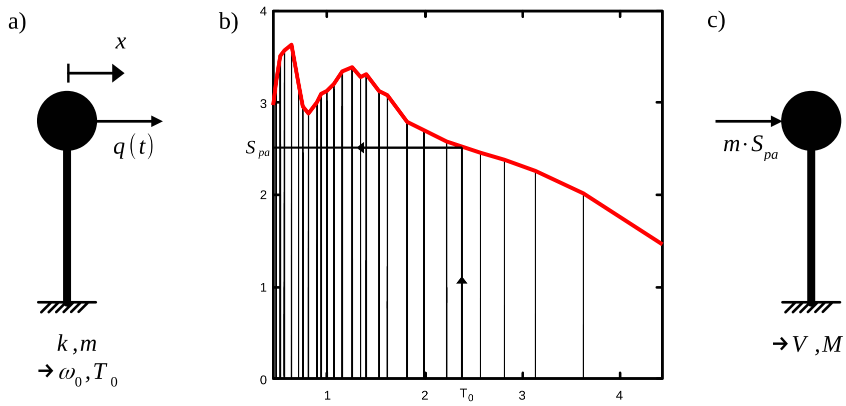
$$f_{max} = m \cdot \omega_0^2 \cdot S_x(T_0). \tag{2.343}$$

A képlet jobb oldalán levő két tag szorzata a pszeudogyorsulás-válaszspektrum (lásd (2.341)), azaz a helyettesítő statikus erőt a

$$f_{max} = m \cdot S_{pa}(T_0) \tag{2.344}$$

képlettel számolhatjuk, majd meghatározzuk az abból származó igénybevétel-szélsőértékeket. A teherkombinációk képzésekor ezeket a szélsőértékeket ± 1 szorzóval vesszük figyelembe, hogy a rezgés jelleget kövessük. Ezeket a lépéseket szemlélteti a 2.35. ábra

A különböző tömegű szerkezetek miatti eltérő számítás problémáját ezzel még nem oldottuk meg. Azonos periódusú, de különböző tömegű szerkezeteknek a tömegükkel fordítottan arányos az ugyanazon $q(t)$ teherre adott $x_q(t)$



2.35. ábra. A pszeudogyorsulás-válaszspektrum használata. a) Szerkezet jellemzőinek számítása. b) A válaszspektrum értékének leolvasása. c) A szerkezet terhelése a maximális kitérést okozó statikus erővel.

válasza, ezért a válaszspektrumokból is a tényplegeshez képest eltérő elmozdulás-, illetve pszeudogyorsulásértéket olvasnánk ki (nagyobb tömeg esetén nagyobbat, kisebb tömeg esetén kisebbet). A $q(t)$ dinamikus terhet helyettesítő erő esetén a leolvasott értéket ezért a referenciatömeghez képest megfelelően skálázni kell.

2.6. Támaszmozgással gerjesztett egyszabadságfokú rendszerek rezgése

2.6.1. A mozgásegyenlet alakja a támasz mozgása esetén

Vizsgáljuk meg, hogyan határozható meg a szerkezet mozgása, ha az egyszabadságfokú rendszerben a támasz $z(t)$ függvény szerint mozog[55]. Az egyszabadságfokú csillapítatlan rendszert és az elkülönítését ebben az állapotban mutatja a 2.36. ábra.

Írjuk fel Newton második mozgástörvényét:

$$-f_r(t) = m\ddot{x}(t). \tag{2.345}$$

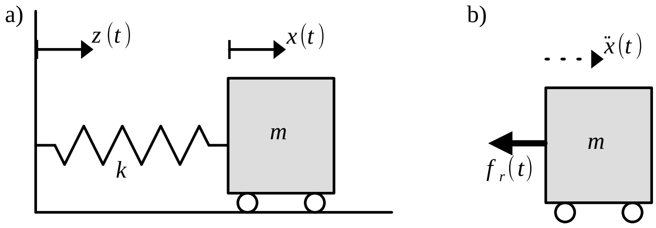
A rugóerő a rugó megnyúlásával arányos ((2.5) szerint $f_r(t) = ku(t)$, ahol $u(t)$ a rugó alakváltozása), így az ismeretleneket azonos oldalra rendezve azt kapjuk, hogy:

$$m\ddot{x}(t) + ku(t) = 0. \tag{2.346}$$

A rugó megnyúlása (a szerkezet rugalmas alakváltozása) a támasz mozgása miatt most nem azonos a tömeg elmozdulásával, ezért a megoldáshoz az egyiket ki kell fejezni a másikkal. Ennek megfelelően fogjuk előállítani az $x(t)$ elmozdulásra, illetve az $u(t)$ alakváltozásra vonatkozó differenciálegyenletet.

Mindkét eljárásnak az lesz a tanulsága, hogy a támaszrezgés gerjesztett rezgésként kezelhető.

[55] Emlékeztetünk rá, hogy helyettesítő rugó használatakor a támasz az a merevnek tekintet szerkezetnek a rugóhoz kapcsolódó pontját jelenti, így a tényleges támasz mozgása a topológiától függően eltérhet $z(t)$-től.



2.36. ábra. Támaszmozgással terhelt csillapítatlan rendszer. a) Tömeg-rugó modell. b) Elkülönítés.

2.6.1.1. Az elmozdulásokra vonatkozó mozgásegyenlet

Ha az elmozdulásfüggvényt és annak detriváltjait akarjuk megtartani az ismeretlenek között, akkor az $u(t)$ alakváltozást kell kifejeznünk az $x(t)$ és a $z(t)$ segítségével. A modellből kiolvasható, hogy a rugó megnyúlása[56]:

$$u(t) = x(t) - z(t). \tag{2.347}$$

Ha ezt behelyettesítjük a (2.346) egyenletbe és a $kz(t)$ tagot átvisszük a túloldalra, akkor a

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = kz(t) \tag{2.348}$$

differenciálegyenletet kapjuk, ami az elmozdulásra vonatkozó egyenlet a támasz $z(t)$ mozgása esetén.

Az egyenlet formailag egy gerjesztett rezgés differenciálegyenletével egyezik meg (lásd (2.25)), ahol a gerjeesztőerő a rugómerevségtől és a támasz mozgásától függ.

Az elmozdulásra vonatkozó differenciálegyenlet megoldásaként elsősorban az elmozdulásfüggvényt kapjuk meg, abból származtathatjuk a sebesség-, illetve a gyorsulásfüggvényt. Ennek megfelelően ezt a formát elsősorban akkor használjuk, ha ezen mennyiségekre van szükség (például a rugalmas megtámasztásra helyezett gép, vagy műszer megfelelő működéséhez korlátozni kell a környezetből átadódó rezgések miatti sebességet, vagy gyorsulást). Ugyan a (2.347) kifejezéssel a rugó alakváltozása is számolható, és abból a rugóerőt, igénybevételeket lehet számolni, ezeket a mennyiségeket egyszerűbb a következő alpontban leírt módszerrel számolni.

2.6.1. Példa (Elmozdulások harmonikus támaszmozgásból)**.** *Határozzuk meg a támasz $z(t) = z_0 \cos(\omega t)$ mozgása miatt kialakuló állandósult rezgés során az m tömegű és k merevségű rendszerben a szabadságfok legnagyobb kitérését, sebességét, gyorsulását!*

Megoldás
A támasz mozgása egy gerjesztőerővel helyettesíthető, azaz a feladatunk az

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = kz_0 \cos(\omega t) \tag{2.349}$$

[56] A két mennyiség közül $x(t)$ növelése növeli a megnyúlást, $z(t)$ növelése pedig összenyomódást eredményez, azaz csökkenti a megnyúlást, ezért az elsőnek pozitív, a másodiknak negatív az előjele.

megoldása. Ezt a 2.4.1. szakaszban vezettük le, a (2.175) szerinti megoldásban a q_0 helyére kell a kz_0-t beírnunk, azaz a válasz

$$x_{all}(t) = \frac{kz_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega t) = z_0 \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega t). \tag{2.350}$$

Az állandósult rezgésrész tehát egy harmonikus rezgés lesz, ahol a támasz amplitúdóját egy, a rezonanciatényezővel azonos taggal kell megszorozni, hogy a kitérés amplitúdóját megkapjuk, vagyis

$$\boxed{x_{max} = \mu \cdot z_0}. \tag{2.351}$$

A sebességet és a gyorsulást az idő szerinti első deriváltból kapjuk:

$$\dot{x}_{all}(t) = z_0 \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} (-\omega) \sin(\omega t), \tag{2.352}$$

$$\ddot{x}_{all}(t) = z_0 \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} (-\omega^2) \cos(\omega t), \tag{2.353}$$

a maximumok pedig rendre a támasz maximális sebességének és maximális gyorsulásának, valamint a rezonanciatényezőnek a szorzata lesz:

$$\boxed{v_{max} = \mu \cdot (\omega z_0)}, \qquad \boxed{a_{max} = \mu \cdot (\omega^2 z_0)}. \tag{2.354}$$

2.6.1.2. Az alakváltozásokra vonatkozó mozgásegyenlet

Ha az alakváltozásfüggvényt és annak deriváltjait akarjuk megtartani a (2.346) egyenletben, akkor ki kell küszöbölnünk az $\ddot{x}(t)$ gyorsulást. A (2.347) egyenletet az idő szerint kétszer deriválva

$$\ddot{u}(t) = \ddot{x}(t) - \ddot{z}(t) \tag{2.355}$$

adódik, amiből

$$\ddot{x}(t) = \ddot{u}(t) + \ddot{z}(t) \tag{2.356}$$

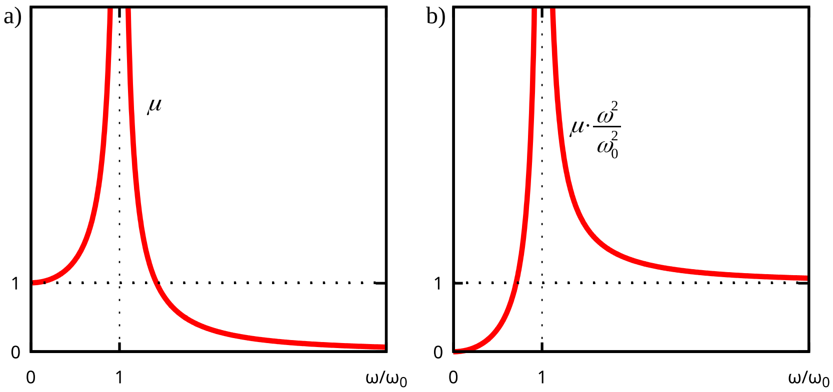
Ha ezt behelyettesítjük a (2.346) egyenletbe és az $m\ddot{z}(t)$ tagot átvisszük a túloldalra, akkor az

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{z}(t) \tag{2.357}$$

differenciálegyenletet kapjuk, ami az alakváltozásra vonatkozó egyenlet a támasz $z(t)$ mozgása esetén.

Az egyenlet formailag egy gerjesztett rezgés differenciálegyenletével egyezik meg (lásd (2.25)), ahol a gerjesztőerő a tömegtől és a támasz mozgásától (egészen pontosan annak gyorsulásától) függ.

Az alakváltozásra vonatkozó differenciálegyenlet megoldásaként elsősorban az alakváltozásfüggvényt kapjuk meg, abból származtathatjuk a helyettesítő terhet, illetve az igénybevételeket. Ennek megfelelően ezt a formát elsősorban akkor használjuk, ha ezen mennyiségekre van szükség (például a rugalmas megtámasztást nyújtó szerkezet méretezéséhez, vagy ellenőrzéséhez kell számolnunk



2.37. ábra. A harmonikus támaszmozgással terhelt rendszer szorzótényezői. a) Az elmozduláshoz szükséges μ szorzótényező . b) Az alakváltozáshoz szükséges $\mu\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ tényező.

annak igénybevételeit). Ugyan a (2.347) kifejezéssel a tömegpont mozgása is számolható, és abból a sebességet, gyorsulást lehet számolni, ezeket a mennyiségeket egyszerűbb az előző alpontban leírt módszerrel számolni.

2.6.2. Példa (Alakváltozások harmonikus támaszrezgésből)**.** *Határozzuk meg a támasz $z(t) = z_0\cos(\omega t)$ mozgása miatt kialakuló állandósult rezgés során az m tömegű és k merevségű rendszerben a rugó maximális megnyúlását és a maximális rugóerőt!*

Megoldás
A támasz mozgása egy gerjesztőerővel helyettesíthető, azaz a feladatunk az

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = m\omega^2 z_0\cos(\omega t) \tag{2.358}$$

differenciálegyenlet megoldása. (Az egyenletbe már behelyettesítettük a támaszmozgás második deriváltját, azaz a $\ddot{z}(t) = -z_0\omega^2\cos(\omega t)$ függvényt.) Ezt a 2.4.1. szakaszban vezettük le, a (2.175) szerinti megoldásban a q_0 helyére kell a $m\omega^2 z_0$ amplitúdót beírnunk, azaz a válasz

$$u_{all}(t) = \frac{m\omega^2 z_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t) = z_0\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t) \tag{2.359}$$

lesz. (Az átalakításnál felhasználtuk, hogy a sajátkörfrekvencia definíciójából $\omega_0^2 = k/m$.) Az állandósult rezgésrész tehát egy harmonikus rezgés lesz, ahol a támasz amplitúdóját egy, a rezonanciatényezővel azonos taggal, valamint az $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ taggal kell megszorozni, hogy a kitérés amplitúdóját megkapjuk, vagyis

$$\boxed{u_{max} = \mu\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cdot z_0}. \tag{2.360}$$

A maximális rugóerő ennek a k-szorosa, azaz

$$\boxed{f_{max} = \mu\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cdot k\cdot z_0}. \tag{2.361}$$

A szorzótényező megértéséhez és magyarázatához a 2.37 ábrán ábrázoltuk az elmozdulásra (2.37.a) ábra, lásd (2.351) képlet) és az alakváltozásra (2.37.b) ábra, lásd (2.360) képlet) kapott szorzótényezőt. A szélső helyzetekről azt állapíthatjuk meg, hogy alacsony gerjesztőfrekvencia esetén a tömegpont szinte együtt mozog a támasszal, miközben az alakváltozások elhanyagolhatók (a merev, vagy kis tömegű szerkezet követi a támasz lassú mozgását), míg magas gerjesztőfrekvencia esetén a tömegpont szinte mozdulatlan marad, de az alakváltozások azonos nagyságúak a támasz mozgásával (a lágy, vagy nagy tömegű szerkezet tömegpontja alig mozog, mert nem tudja követni a támasz gyors mozgását).

2.6.1.3. A csillapítás hatása a mozgásegyenletekre a támaszmozgás esetén

Csillapított rendszer esetén a dugattyúban ébredő $c\dot{u}(t)$ erőt kell figyelembe venni a (2.346) egyenletben:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0. \tag{2.362}$$

Mivel a dugattyú alakváltozásának $\dot{u}(t)$ sebessége nem egyezik meg a tömegpont $\dot{x}(t)$ sebességével, ezért az elmozdulásra felírt egyenletben a teher oldalára bekerül egy, a támasz sebességétől függő tag:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = kz(t) + c\dot{z}(t). \tag{2.363}$$

Az alakváltozásra felírt egyenletben a teher oldalát nem módosítja a csillapítás figyelembevétele, így ott azt kapjuk, hogy

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{z}(t) \tag{2.364}$$

Ezekre az esetekre is igaz, hogy a támasz mozgása egy gerjesztésnek tekinthető, a gerjesztőerőt az elsődlegesen keresett mennyiség függvényében kell meghatározni.

2.6.2. Támaszmozgással gerjesztett szerkezetek válasza

Ahogy a 2.5.4 szakaszban láttuk, egy $q(t)$ teherhez létre lehet hozni egy válaszspektrumot, aminek a segítségével bármilyen szerkezetre meghatározható a dinamikus terhet helyettesítő statikus teher értéke. Ilyen válaszspektrumot a támaszmozgás okozta gerjesztésre is előállíthatunk, ehhez az alábbi szempontokat, módosításokat hajtsuk végre. A válaszspektrumot a maximális igénybevételek meghatározásához fogjuk használni, ezért a (2.357), vagy csillapított esetben a (2.364) egyenletből induljunk ki:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{z}(t). \tag{2.365}$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát az m tömeggel és helyettesítsük be a csillapítás és a merevség helyére a sajátkörfrekvenciával kifejezhető értékeket:

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = -\ddot{z}(t). \tag{2.366}$$

Ebben a formában az egységnyi tömegű rendszerekhez tudjuk meghatározni a (2.341) egyenlet szerinti pszeudogyorsulás-válaszspektrumot a teher és az elmozdulásfüggvény értelemszerű behelyettesítésével. Különböző sajátkörfrekvenciájú, de azonos ξ csillapítási hányadú (azaz azonos anyagú) szerkezeteknek meghatározzuk az $u_z(t)$ válaszát, majd az alakváltozási válaszspektrum értékét az

$$S_u(T_0, \xi) = \max|u_z(t, T_0, \xi)|, \tag{2.367}$$

a pszeudogyorsulás-válaszspektrum értékét pedig az

$$S_a(T_0, \xi) = \omega_0^2 S_u(T_0, \xi) = \omega_0^2 \max|u_z(t, T_0, \xi)|, \tag{2.368}$$

képlettel számoljuk[57]. Mivel a megoldáshoz használt (2.366) egyenletben a rendszer tömege nem jelenik meg, ezért tetszőleges tömegű szerkezetre ugyanaz a (2.368) szerinti pszeudogyorsulás érték adódik, így a $z(t)$ támaszmozgás okozta legnagyobb alakváltozást úgy tudjuk számolni, hogy a szerkezet T_0 periódusidejéhez leolvassuk a válaszspektrum $S_a(T_0, \xi)$ értékét, majd a szerkezetet az

$$f_{st} = m \cdot S_a(T_0, \xi) \tag{2.369}$$

helyettesítő statikus erővel terheljük és abból a reakciókat, igénybevételeket számoljuk.

2.6.2.1. Földrengésvizsgálat mechanikai háttere

A földrengés a kőzetlemezek egymás melletti gátolt elcsúszásakor a súrlódási határnak, vagy valamely tartomány határfeszültségének a meghaladásakor kialakuló hirtelen elmozdulás, majd annak a Föld egyes rétegeiben[58] haladó hullámok formájában történő terjedése. A szerkezetet tehát a korábban mozdulatlannak tekintett alapok, mint megtámasztások mozgása révén terheli. A hullámok terjedése néhány km/s sebességgel történik, ezért a szokásos méretű építmények esetén feltételezhetjük, hogy mindegyik támaszt azonos időben, azonos fázissal és kitéréssel ér el a földrengés. A szerkezet szempontjából tehát a földrengésre méretezés a támasz mozgására történő méretezést jelenti.

A tervezés során a földrengésről nem csak azt nem tudjuk, mikor lesz, hanem azt sem, hogy mekkora lesz az intenzitása, milyen lesz az időbeli lefolyása. Ezért nem lehet a következő rengés válaszspektrumát kiszámolni. Rendelkezésre állnak azonban korábbi rengések során rögzített talajgyorsulás-függvények, amik felhasználhatók akár teherfüggvény, akár válaszspektrum formájában.

Történeti talajgyorsulás válaszspektrumát használva azt lehet megfigyelni, hogy a spektrumban hirtelen változások is előfordulhatnak. Az ilyen ugrásokat a tervezés során el kellene kerülni, hiszen ez azt jelentené, hogy a periódusidő kismértékű változása (például a beépített beton rugalmassági modulusának

[57] Az alapul szolgáló (2.341) és (2.338) egyenletek csillapítatlan esetre vonatkoztak. A csillapítás ξ értéke befolyásolja a választ és így a válaszspektrumot is, ezt jelezzük a zárójelekben feltüntetett ξ-vel.

[58] Kívülről befelé haladva: kéreg, köpeny, mag.

változása miatti merevségváltozás miatt) a terhek és akár a megfelelőség nagymértékű megváltozásához vezetne.

A szabvány által megadott válaszspektrum ezért korábbi eredmények statisztikai alapon történő kisimításával adódott, alacsony periódusidő esetére egy lineárisan növekvő pszeudogyorsulás értékkel, majd a növekvő periódusidő mellett egy platója van a spektrumnak, amit egy $1/T_0$ szerint változó hiperbolikusan csökkenő, végül egy $1/T_0^2$ szerint csökkenő szakasz követ. Az egyes szakaszok határait és értékeit a talajtípus figyelembevételével kell felvenni. A hiperbolikus, illetve a négyzetesen hiperbolikus szakasz a pszeudosebesség-válaszspektrumon, illetve az elmozdulás-válaszspektrumon rendre egy-egy platót eredményez, ahol a a legnagyobb sebességek, illetve elmozdulások alakulnak ki. Ezek miatt a platók miatt lehet beszélni *elmozdulásérzékeny*, *sebességérzékeny* és *gyorsulásérzékeny* szerkezetekről attól függően, hogy az alapperiódus melyik spektrum platójára esik.

A szabvány szerinti spektrumokban további hatásokat is figyelembe vesznek.

- Az épület fontosságától függően nagyobb, vagy kisebb földrengésteherre kell méretezni. (Ezt fejezi ki a γ_I *fontossági tényező*.)
- A földrengés epicentrumától való távolság egyik hatása, hogy a kőzet maximális gyorsulása eltérő: ezt egy *sziklán mért talajgyorsulás* (a_{gR}) megadásával szabályozzák, ahol a_{gR} értékét a helyszín függvényében kell felvenni. Az a_{gR}-t gyakran a g gravitációs gyorsulás hányadaként adják meg.
- A földrengés epicentrumától való távolság másik hatása, hogy a közeli földrengés esetén az alacsonyabb periódusokat jobban gerjesztő támaszrezgés éri el a szerkezetet, ezért külön görbe tartozik a közeli és a távoli rengésekhez.
- A szerkezetet elérő hullámok a talaj tömör, vagy szemcsés voltától függően eltérőek lehetnek, ez a spektrum alakját megadó görbét, így az abból kiolvasható $\beta(T_0, \xi)$ tényező értéket befolyásolja. (Ezt fejezi ki a spektrum görbéjének jellegzetes pontjai és az S talajszorzó.)
- A különböző csillapítási hányadokhoz más görbék tartoznak.
- A szerkezet képlékenyedését egy q viselkedési tényezővel való osztással veszi figyelembe a szabvány. A rugalmas helyett képlékeny alakváltozásokat is szenvedő szerkezetben az igénybevételek legfeljebb a képlékeny határig növekedhetnek, míg az elmozdulások az anyag duktilitásától függően a rugalmas határnál tovább is.

Fentieket figyelembevéve a földrengés statikus terhét a

$$f = m\frac{1}{q}\gamma_I a_{gR} S\beta(T_0, \xi) \tag{2.370}$$

alakban írja elő a szabvány. A kifejezésben a $\gamma_I a_{gR}$ szorzat a támasz maximális gyorsulása, az $\gamma_I a_{gR} S\beta(T_0, \xi)$ szorzat pedig a rugalmas pszeudogyorsulás-válaszspektrum értéke $S_{el}(T_0, \xi)$. A tömeget szorzó $S_{el}(T_0, \xi)/q$ érték a tervezési (pszeudogyorsulás) válaszspektrum ($S_D(T_0, \xi)$, amivel a fenti teher:

$$f = mS_d(T_0, \xi) \tag{2.371}$$

A földrengésből származó terhet szétválaszthatjuk a vízszintes és a függőleges rezgés miatti terhekre. A függőleges rezgést a hazai vizsgálatokban általában elhagyjuk a következő megfontolások alapján. A sziklán mért függőleges gyorsulás tervezési értéke $a_{gR} \approx 0,1g$ nagyságrendű. A gyorsulást növelő β tényező értéke a platón $2,5$ körüli érték. Rugalmas számítást, átlagos fontosságot és talajt számolva a pszeudogyorsulás tervezési értéke $0,25g$ körül várható, az ebből származó függőleges teher pedig $0,25mg$ nagyságú. A földrengés rendkívüli teher, így a teherkombinációban az mg nagyságú önsúly biztonsági tényezője 1, a földrengésé szintén annyi, így a kettő összege $1,25mg$ nagyságú teher. Ehhez képest a teherbírási teherkombinációjában az önsúly biztonsági tényezője $1,35$, azaz az abból származó teher $1,35mg$ lenne. Vagyis a függőleges rengés nem mértékadó teher.

A földrengésből származó terhek és igénybevételek számítására a többszabadságfokú szerkezetek vizsgálata során még visszatérünk.

3. fejezet

Többszabadságfokú rendszerek mechanikai rezgései

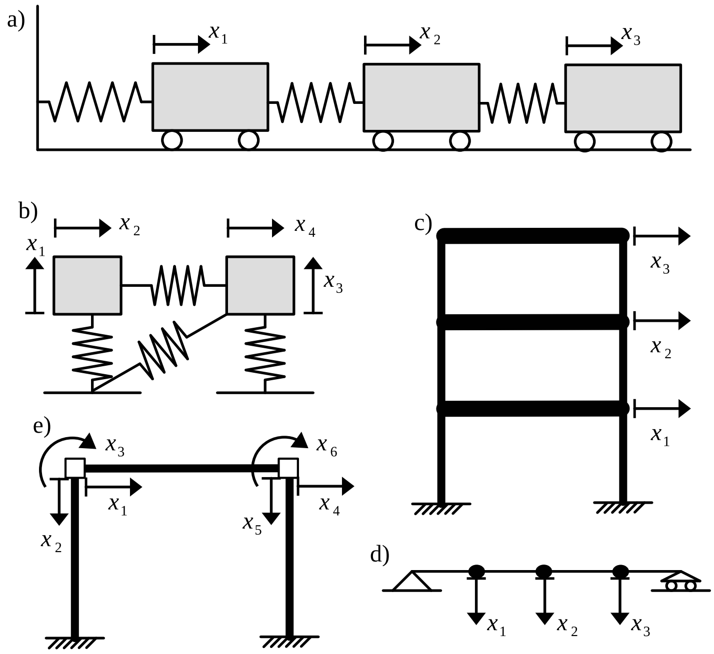
3.1. Többszabadságfokú rendszerek modelljei

Ebben a fejezetben csak csillapítatlan szerkezetekkel foglalkozunk. Többszabadságfokú rendszerek esetén a mozgásegyenletek felírásához három különböző modellt kellene figyelembe venni. A mozgásegyenlet alakja, megoldási módszere azonban ugyanaz lesz, ezért a részletes levezetést csak egy esetben mutatjuk meg, a további modellekhez pedig a omzgásegyenlet elemeinek előállítási módját fogjuk megmutatni.

A három modell:

- a rugókkal egymáshoz és a támaszhoz kapcsolt *tömeg-rugó-modell.*
- az egyes tömegek, illetve egyes alakváltozások elhanyagolásával kapott *diszkrét modell*,
- a megoszló tömeg szabadságfokokba redukálásával kapott *diszkretizált rendszer.*

A 3.1. ábrán mutatunk ezekre a modellekre néhány példát. Az a) és b) ábrákon tömeg-rugó modellek láthatók: az a) ábrán egymás után kapcsolt tömegpontok mozoghatnak vízszintesen, itt a vízszintes eltolódások a szabadságfokok, a b) ábrán minden egyes tömegpont eltolódhat két irányba, itt tömegpontonként két szabadságfoka van a rendszernek. A c) ábrán látható többszintes szerkezeten az oszlopok tömegét és a födémek alakváltozását, valamint az oszlopok összenyomódását elhanyagoljuk, ezzel egy olyan diszkrét modellt kapunk, ahol a szintenkénti eltolódások lesznek a szabadságfokok. A d) ábrán a folytonos gerendát osztottuk fel szakaszokra, és az egyes szakaszok tömegeit a szakaszok végpontjaiba redukáltuk, ezzel egy olyan diszkretizált modellt kaptunk, ahol a szakaszok végpontjainak az eltolódásai a szabadságfokok. Az e) ábra egy másik változatát mutatja a diszkretizálásnak, amikor az elemekre bontott keret csomópontjaiban eltolódások és elfordulás alkotják a szabadságfokokat.



3.1. ábra. Többszabadságfokú modellek. a)-b) Tömeg-rugó modellek. c) Diszkrét szerkezet. d)-e) Diszkretizált szerkezet.

3.1.1. Tömeg-rugó modellek

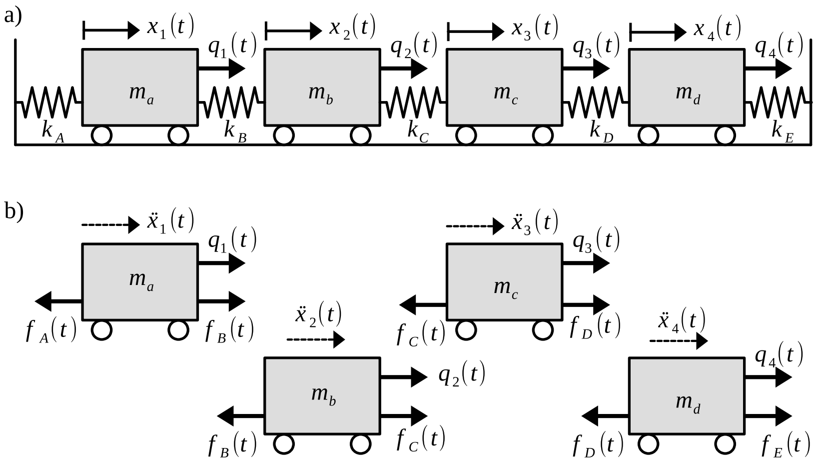
A mozgásegyenlet levezetéséhez tekintsük a 3.2.a) ábrán látható rendszert. A négy tömegpont (m_a, m_b, m_c, m_d) öt rugóval van egymáshoz, illetve a falhoz kapcsolva az ábra szerint. A rugók merevsége k_A, k_B, k_C, k_D, k_E. A rendszer szabadságfokai a négy tömegpont vízszintes eltolódása: $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$. Az egyes szabadságfokokra ható gerjesztőerőket jelölje $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$, $q_4(t)$[1]. Az egyes tömegpontok elkülönítését mutatja a 3.2.b) ábra. A rugókban ébredő f_A, f_B, f_C, f_D, f_E erőket húzóerőnek tételeztük fel (így majd a megnyúlásokkal lesznek arányosak), és szaggatott vonallal jelöltük a gyorsulásokat, ezek mindig az elmozdulások idő szerinti második deriváltjai lesznek.

3.1.1.1. Mozgásegyenlet, a mozgás mátrix-differenciálegyenlete

Az elkülönítés alapján felírható a négy szabadságfok mozgásának irányába Newton második mozgástörvénye:

$$\begin{aligned}
-f_A(t) + f_B(t) + q_1(t) &= m_a\ddot{x}_1(t),\\
-f_B(t) + f_C(t) + q_2(t) &= m_b\ddot{x}_2(t),\\
-f_C(t) + f_D(t) + q_3(t) &= m_c\ddot{x}_3(t),\\
-f_D(t) + f_E(t) + q_4(t) &= m_d\ddot{x}_4(t).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

[1] A példánkban a tömegpontok és a szabadságfokok száma megegyezik, de ha nem így lenne, a gerjesztőerők akkor is a szabadságfokokra hatnának, így az indexelésük az x-ek indexelését követné.



3.2. ábra. Négyszabadságfokú tömeg-rugó modell. a) A mechanikai modell. b) Az elkülönített tömegpontok.

Az egyes rugók megnyúlását Δu-val jelölve az azonosan indexelt rugóerők:

$$\begin{gathered} f_A(t) = k_A \Delta u_A(t), \qquad f_B(t) = k_B \Delta u_B(t), \qquad f_C(t) = k_C \Delta u_C(t), \\ f_D(t) = k_D \Delta u_D(t), \qquad f_E(t) = k_E \Delta u_E(t). \end{gathered} \tag{3.2}$$

Az ismert, illetve ismeretlen tagokat külön oldalakra rendezve (3.3) egyenleteiből azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} m_a \ddot{x}_1(t) + k_A \Delta u_A(t) - k_B \Delta u_B(t) &= q_1(t), \\ m_b \ddot{x}_2(t) + k_B \Delta u_B(t) - k_C \Delta u_C(t) &= q_2(t), \\ m_c \ddot{x}_3(t) + k_C \Delta u_C(t) - k_D \Delta u_D(t) &= q_3(t), \\ m_d \ddot{x}_4(t) + k_D \Delta u_D(t) - k_E \Delta u_E(t) &= q_4(t). \end{aligned} \tag{3.3}$$

A rugók megnyúlásait kifejezhetjük a szabadságfokok elmozdulásaival:

$$\begin{gathered} \Delta u_A(t) = x_1(t), \qquad \Delta u_C(t) = x_3(t) - x_2(t), \qquad \Delta u_E(t) = -x_4(t). \\ \Delta u_B(t) = x_2(t) - x_1(t), \qquad \Delta u_D(t) = x_4(t) - x_3(t), \end{gathered} \tag{3.4}$$

majd behelyettesíthetjük (3.3)-ba:

$$\begin{aligned} m_a \ddot{x}_1(t) + k_A x_1(t) - k_B(x_2(t) - x_1(t)) &= q_1(t), \\ m_b \ddot{x}_2(t) + k_B(x_2(t) - x_1(t)) - k_C(x_3(t) - x_2(t)) &= q_2(t), \\ m_c \ddot{x}_3(t) + k_C(x_3(t) - x_2(t)) - k_D(x_4(t) - x_3(t)) &= q_3(t), \\ m_d \ddot{x}_4(t) + k_D(x_4(t) - x_3(t)) - k_E(-x_4(t)) &= q_4(t). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Alakítsuk át a fenti egyenleteket úgy, hogy a zárójelek felbontása után gyűjtsük egybe az egyes x-ek együtthatóit:

$$\begin{aligned} m_a \ddot{x}_1(t) + (k_A + k_B) x_1(t) - k_B x_2(t) &= q_1(t), \\ m_b \ddot{x}_2(t) - k_B x_1(t) + (k_B + k_C) x_2(t) - k_C x_3(t) &= q_2(t), \\ m_c \ddot{x}_3(t) - k_C x_2(t) + (k_C + k_D) x_3(t) - k_D x_4(t) &= q_3(t), \\ m_d \ddot{x}_4(t) - k_D x_3(t) + (k_D + k_E) x_4(t) &= q_4(t). \end{aligned} \tag{3.6}$$

A négy egyenletet egyetlen mátrixegyenletként is írhatjuk:

$$\begin{bmatrix} m_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \\ \ddot{x}_4(t) \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B & 0 & 0 \\ -k_B & k_B + k_C & -k_C & 0 \\ 0 & -k_C & k_C + k_D & -k_D \\ 0 & 0 & -k_D & k_D + k_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

A fenti egyenletben megjelenő vektorok és mátrixok elnevezése és jelölése az alábbi[2]. Az

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

vektort a szabadságfokok elmozdulásait tartalmazó vektornak, vagy rövidebben az *elmozdulások vektorá*nak nevezzük[3]. A

$$\underline{\ddot{x}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \\ \ddot{x}_4(t) \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

vektor a (szabadságfokonkénti) *gyorsulások vektora*, a

$$\underline{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

vektor a (szabadságfokonkénti) *tehervektor*. Az

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_d \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

mátrix a szerkezet *tömegmátrix*a, végül a

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B & 0 & 0 \\ -k_B & k_B + k_C & -k_C & 0 \\ 0 & -k_C & k_C + k_D & -k_D \\ 0 & 0 & -k_D & k_D + k_E \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

mátrix a szerkezet *merevségi mátrix*a. A vektoroknak mindig annyi elemük van, ahány szabadsági foka van a rendszernek, a mátrixok pedig kvadratikus mátrixok, a sorok és az oszlopok száma egyaránt megegyezik a szabadságfokok

[2]Bár nyomtatásban a vektorok és mátrixok jelölésére a félkövér szedésmód a jellemző (pl. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{A}$), ebben a könyvben a kézi jegyzeteléshez közelebb álló módon a vektorokat egyszeres (pl. $\underline{b}$), a mátrixokat pedig kétszeres (pl. $\underline{\underline{A}}$) aláhúzással jelöljük.

[3]Gyakran hivatkoznak rá elmozdulásvektorként is: ha nem keverjük össze egy tényleges elmozdulásvektorral, akkor ez is egy lehetséges megnevezés.

számával. Az előállítás módjából nem látszik, de a két mátrixnak szimmetrikusnak kell lennie.

A fenti jelölésekkel a (3.7) szerinti mozgásegyenlet az alábbi mátrix-differenciálegyenletként írható:

$$\boxed{\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t) = \underline{q}(t).} \tag{3.13}$$

Többszabadságfokú szerkezetek esetén a mozgásegyenleteket mindig a (3.13 szerinti alakban tudjuk felírni. A mátrixegyenlet egy-egy sora mindig az adott szabadságfokhoz tartozó mozgásegyenlet. A bemutatott eltolódási szabadságfokok esetén az egyenletek Newton második mozgástörvényéből származnak és az egyes tagok erők. Elfordulási szabadságfok esetén az egyenlet egy perdülettételnek felel meg, így az annak megfelelő sorban nyomatékok szerepelnek.

A továbbiakban nézzük meg, hogy diszkrét, vagy diszkretizált rendszerek esetén hogyan határozzuk meg a tömegmátrixot és a merevségi mátrixok.

3.1.2. Tömegmátrix

Diszkrét rendszer esetén a tömegmátrix egy diagonálmátrix, aminek a főátlójában mindig a szabadságfokokban elhelyezkedő tömeg jelenik meg. Itt két dologra kell ügyelni. Ha egy tömegpont több irányba is elmozdulhat, akkor több szabadságfok tartozik hozzá, ezen szabadságfokok mindegyikéhez ugyanaz a tömeg tartozik, tehát ugyanazt a tömeget esetleg többször is be kellene írni a főátló egy-egy helyére. Ha pedig elfordulási szabadságfokunk van, akkor ott az $\underline{x}(t)$ vektor megfelelő eleme egy szöggyorsulás, amit a szabadságfokhoz tartozó tömeg tehetetlenségi nyomatékával kell szorozni a perdülettételben, a tömegmátrix főátlójában tehát tehetetlenségi nyomaték lesz.

Diszkretizált szerkezet esetén ha a diszkretizálást a szakaszokra bontás után a tömegek szabadságfokra redukálásával végezzük, akkor az így kapott tömegek kerülnek a főátlóba. Keretek mátrix-elmozdulásmódszerrel való vizsgálatakor, vagy végeselemmódszer alkalmazásakor ennél összetettebb módszerek is léteznek a (pontosabb) tömegmátrix előállítására, erről a 3.4. alfejezetben fogunk bővebben beszélni, így a továbbiakban általában diagonál tömegmátrixunk lesz, de a megoldási módszereknél ezt nem fogjuk kihasználni..

3.1.3. Merevségi mátrix

3.1.3.1. Jelentése diszkrét rendszerben

A merevségi mátrix legfontosabb tulajdonsága és előállításának lehetséges alapja a fizikai jelentése. Keressük a (3.13) mátrix-differenciálegyenletnek egy statikus $\underline{q}(t) = \underline{q}_{st}$ teherre az egyensúlyi $\underline{x}(t) = \underline{x}_{st}$ megoldását. Az egyensúlyból következik, hogy $\underline{\ddot{x}}(t) = \underline{0}$, így az egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{x}_{st} = \underline{q}_{st}. \tag{3.14}$$

A kapott egyenletből kiolvasható, hogy ahhoz, hogy a rendszer egy $\underline{x}_{st}$ elmozdult állapotban egyensúlyban legyen, arra van szükség, hogy a szabadságfokaira rendre a $\underline{q}_{st} = \underline{\underline{K}}\,\underline{x}_{st}$ vektor elemeinek megfelelő erő hasson. Ha az elmozdult állapot speciálisan olyan, hogy a j-edik szabadságfok elmozdulása egységnyi, az összes többié pedig nulla, akkor az $\underline{x}_{st}$ vektor a j-edik egységvektor lesz, a

$\underline{\underline{K}}\,\underline{x}_{st} = \underline{\underline{K}}\,\underline{e}_j$ szorzat pedig a merevségi mátrix j-edik oszlopa, amit jelöljünk $\underline{k}_j$-vel. Az ebben a vektorban szereplő erőkkel tudjuk fenntartani a fenti speciális egyensúlyi helyzetet, tehát *a merevségi mátrix j-edik oszlopa megadja azokat az erőket, amiket egyidejűleg statikusan működtetni kell a szabadságfokokra ahhoz, hogy a j-edik szabadságfok elmozdulása egységnyi legyen, miközben a többi szabadságfok nem mozdul el.* Ez a merevségi mátrix j-edik oszlopának fizikai jelentése.

A merevségi mátrixot a fenti fizikai jelentés alapján is elő lehet állítani. Minden egyes szabadságfokon végig kell menni, a szabadságfok egységnyi elmozdulása esetére meg kell határozni a rugók alakváltozását és abból az egyes szabadságfokokra ható rugóerőket. Ezeket az erőket a q_l erőkkel kell szabadságfokonként egyensúlyozni, és a kapott erőkből kapjuk meg egy-egy szabadságfok kimozdítása esetén a hozzá kapcsolódó oszlop elemeit. A módszerrel természetesen ugyanazt a mátrixot kell kapjuk, mint a mozgásegyenletek levezetésével.

3.1.1. Példa (Merevségi mátrix oszlopa)**.** *Határozzuk meg a 3.3.a) ábrán látható rendszer merevségi mátrixának második oszlopát!*

Megoldás

A második oszlop számításához a második szabadságfokot kell egységnyivel kimozdítani, miközben a többi szabadságfok a helyén marad. Ezt a kimozdított állapotot mutatja a 3.3.b) ábra. Az ábra alapján az egyes rugók megnyúlása:

$$\Delta u_A = 0, \qquad \Delta u_B = 1, \qquad \Delta u_C = -1, \tag{3.15}$$

az egyes rugókban ébredő erők pedig:

$$f_A = 0, \qquad f_B = k_B, \qquad f_C = -k_C. \tag{3.16}$$

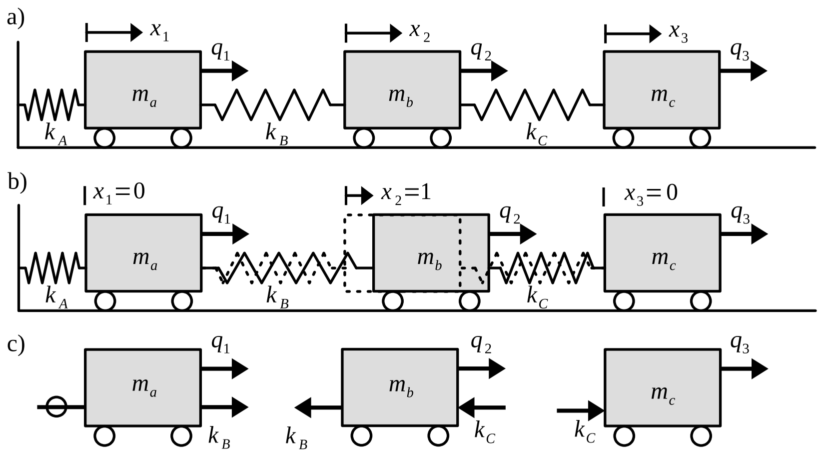
A 3.3.c) ábrán mutatjuk az egyes tömegpontok elkülönítését a behelyettesített a rugóerőkkel (a negatív előjel nyomott rugót jelent). Az egyes szabadságfokok egyensúlyi egyenleteiből:

$$\begin{aligned} -0 + k_B + q_1 = 0 \quad &\rightarrow \quad q_1 = -k_B \\ -k_B - k_C + q_2 = 0 \quad &\rightarrow \quad q_2 = k_B + k_C \\ k_C + q_3 = 0 \quad &\rightarrow \quad q_3 = -k_C \end{aligned} \tag{3.17}$$

Az egyes csomópontokra ható q erőket kell a mátrix megfelelő oszlopában felsorolni, így a mátrix második oszlopa:

$$\underline{k}_2 = \begin{bmatrix} -k_B \\ k_B + k_C \\ -k_C \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Az így kapott oszlop természetesen megegyezik azzal a második oszloppal, amit akkor kaptunk volna, ha a teljes rendszer elkülönítése után a szabadságfokokra felírt Newton második törvényekből kifejezzük az $x_2(t)$ együtthatóit.



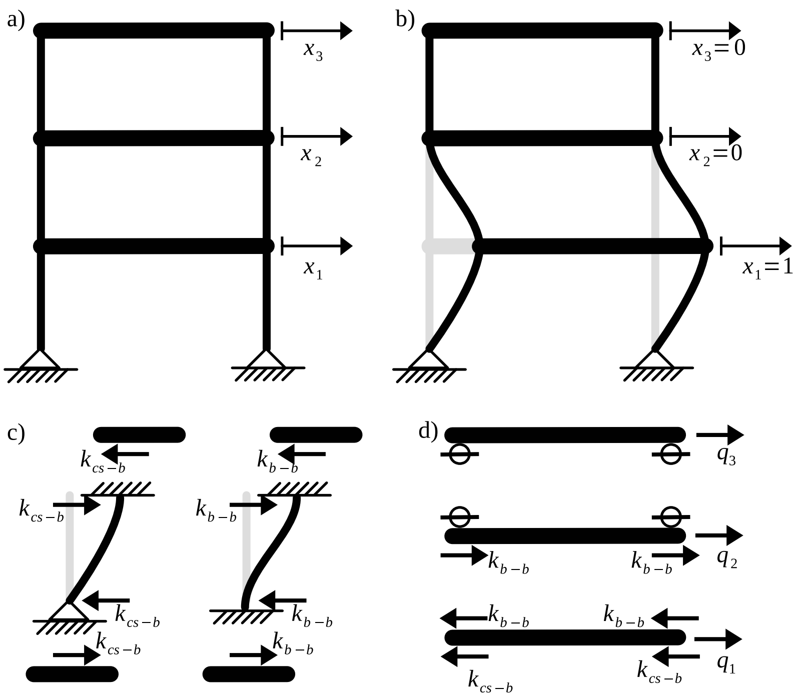
3.3. ábra. Háromszabadságfokú tömeg-rugó modell merevségi mátrixának egy oszlopa: a) a mechanikai modell; b) a jelentésnek megfelelően kitérített állapot; c) az elkülönített tömegpontok.

3.1.2. Példa (Merevségi mátrix oszlopa)**.** *Határozzuk meg a 3.4.a) ábrán látható háromszintes szerkezet merevségi mátrixának első oszlopát! A merev födémek miatt a szabadságfokok a szintek vízszintes eltolódásai, az oszlopok hajlítómerevsége EI, magasságuk h.*

Megoldás

A merevségi mátrix első oszlopának számításához az első szabadságfokot kell egységnyivel kimozdítani, miközben a többi szabadságfok elmozdulását megakadályozzuk. Ezt a kimozdított állapotot mutatja a 3.4.b) ábra. Az oszlopok alakváltozása miatt a szabadságfokokra olyan erők hatnak az oszlopok nyíróerejéből, amely erők okozta elmozdulások az oszlopok kiegyenesedését eredményeznék. Ez alapján lettek berajzolva az elkülönített szintekre ható oszloperők iránya a 3.4.d) ábrán: a legalsó szint oszlopainak teteje jobbra lett elmozdítva az oszlopok alsó végükhöz képest, ezért e fent ható erők balra mutatnak. A középső oszlopok teteje balra lett elmozdítva az alsó végükhöz képest, ezért az ezekről az oszlopokról felül átadódó erők jobbra mutatnak, míg az oszlopokról az alattuk levő szintre átadódó erők balra mutatnak. A legfelső szint oszlopai nem szenvednek alakváltozást, így azokról az oszlopokról zéruserők adódnak át az alattuk és a felettük levő oszlopokra is.

Az egy-egy oszlopban ébredő visszatérítő erő az oszlop alakváltozásától és a helyettesítő merevségtől függ. Az alakváltozások értéke jellemzően 1, vagy 0. A helyettesítő merevség az oszlop megtámasztási viszonyaitól függ. Ebben a példában a modell szerint az alsó oszlopok alul csuklós, felül befogott kapcsolatúak, a többi oszlop mindkét végén befogott. A 3.4.c) ábrán mutatjuk egy-egy ilyen oszlop alakváltozását és a végeken működő reakciókat, valamint azok ellenerejét, ami a szabadságfokra hat. A *Tartók statikája* tárgyból tanultak szerint a visszatérítő erő és a kitérés közötti hányados, vagyis egy oszlop helyettesítő rugómerevsége csuklós-befogott,



3.4. ábra. Háromszintes épület modellje és merevségi mátrixának egy oszlopa: a) mechanikai modellje; b) a merevségi mátrix első oszlopának számításához használt kitérített alak; c) csuklós-befogott, illetve befogott-befogott oszlop helyettesítő rugómerevsége; d) az oszlopokból az egyes szintekre ható erők a kitérített helyzetben.

illetve befogott-befogott oszlopvégek esetén:

$$k_{cs-b} = \frac{3EI}{h^3}, \qquad k_{b-b} = \frac{12EI}{h^3}. \tag{3.19}$$

(A mindkét végén csuklós oszlop rúdként viselkedik, így az vízszintes erőt nem tud átadni, helyettesítő merevsége nulla.) A 3.4.d) ábrán az erők nagyságát ennek megfelelően tüntettük fel.

Ezek után fel kell írni és meg kell oldani a három szabadságfok egyensúlyi egyenletét:

$$\begin{aligned} -k_{cs-b} - k_{cs-b} - k_{b-b} - k_{b-b} + q_1 = 0 \quad &\rightarrow \quad q_1 = 30\tfrac{EI}{h^3}, \\ k_{b-b} + k_{b-b} + q_2 = 0 \quad &\rightarrow \quad q_2 = -24\tfrac{EI}{h^3}, \\ q_3 = 0 \quad &\rightarrow \quad q_3 = 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

A merevségi mátrix első oszlopa tehát:

$$\underline{k}_1 = \frac{EI}{h^3}\begin{bmatrix} 30 \\ -24 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy a diszkrét modell megfeleltethető egy tömeg-rugó modellnek. A most vizsgált háromszintes épület esetén a szabadságfokok közötti rugalmas elemek helyettesítő merevségeinek összege (a *szintenkénti merevségek*, alulról felfelé $6EI/h^2$, $24EI/h^3$ és $24EI/h^3$) megfelelnek a 3.1.1. példában vizsgált rendszer k_A, k_B és k_C rugómerevségeinek.

3.1.3.2. Merevségi mátrix kompilálása diszkrét rendszerben

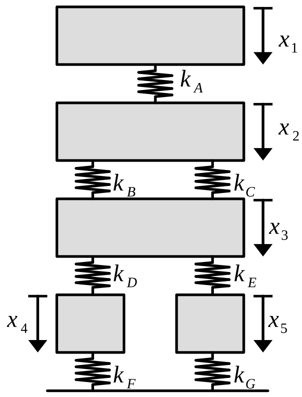
A merevségi mátrix jelentés alapján történő előállításának lépéseit végiggondolva azt tapasztalhatjuk, hogy az egyes rugók helyzete csak a saját rugómerevségüknek a merevségi mátrixon belüli megjelenését befolyásolja, a többi rugóéra nincs hatással. Ez egyszerűen abból fakad, hogy a rendszerünk lineáris, így a jelentés alapján történő előállítás során az egyes rugók hatása szuperponálható: a teljes rendszer merevségi mátrixa előállítható az egyes rugókból külön-külön származó merevségi mátrixok összegeként. A bevezető példában látott merevségi mátrix (lásd (3.12)) például az alábbi módon:

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}_A + \underline{\underline{K}}_B + \underline{\underline{K}}_C + \underline{\underline{K}}_D + \underline{\underline{K}}_E, \tag{3.22}$$

ahol a $\underline{\underline{K}}_A$, $\underline{\underline{K}}_B$, $\underline{\underline{K}}_C$, $\underline{\underline{K}}_D$, $\underline{\underline{K}}_E$ mátrixok rendre a csak az A, B, C, D, E rugókat tartalmazó rendszerek merevségi mátrixai[4]:

$$\begin{gathered} \underline{\underline{K}}_A = \begin{bmatrix} k_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{\underline{K}}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_C & -k_C & 0 \\ 0 & -k_C & k_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{\underline{K}}_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_E \end{bmatrix}. \\ \underline{\underline{K}}_B = \begin{bmatrix} k_B & -k_B & 0 & 0 \\ -k_B & k_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{\underline{K}}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_D & -k_D \\ 0 & 0 & -k_D & k_D \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{3.23}$$

[4] A többi rugó elvételével a szabadságfokok egy része szabadon marad, ezek egységnyi elmozdítása ellenállás nélkül elvégezhető, így azokban a mátrixoszlopokban nullák szerepelnek.



3.5. ábra. Ötszabadságfokú tömeg-rugó modell.

Egy l és m szabadságfokot összekötő rugóban csak akkor keletkezik erő, ha valamelyik vége elmozdul, azaz csak az l-edik és az m-edik oszlopban lesz hatása annak a rugónak. Az ugyanezen rugóban ébredő erőről azt istudjuk, hogy az biztosan csak az l-edik és az m-edik szabadságfokra hathat, ezért a rugómerevsége csak az l-edi és az m-edik sorban jelenik meg. Fentiek alapján kijelenthető, hogy az l és m szabadságfokot összekötő rugó merevsége a merevségi mátrixnak csak az l-l, l-m, m-l, m-m elemeit befolyásolja: a főátlóbeli két elemhez mindig hozzá kell adni a merevséget, a főátlón kívüli két elemhez pedig a merevség ellentettjét kell hozzáadni. (Kivételt képez az az eset, ha a két szabadságfok egymással szembe mutat: ekkor a főátlón kívüli tagokhoz is hozzáadni kell a merevséget. Ennek részletes magyarázatát majd a 3.2.6.1. alpontban mutatjuk be.) Ha egy rugó egy szabadságfokot a támaszhoz kapcsol, akkor annak merevségét egyetlen elemhez adjuk hozzá, mégpedig a megtámasztott szabadságfoknak megfelelő főátlóelemhez. Később, a támaszrezgésnél látni fogjuk, hogy a támaszhoz kapcsolódó rugók, rugalmas elemek is kezelhetők azonos módon, ha a támaszokat is szabadságfokoknak tekintjük, de ezek elmozdulásai és egyenletei kiküszöbölhetők a mozgásegyenleteinkből.

A merevségi mátris ilyen módon történő előállítását *kompilálás*nak nevezzük. A szerkezet összes rugóján végigmenve az eredetileg nullákkal feltöltött merevségi mátrixhoz a fentiek szerint hozzáadjuk az egyes rugók hatását.

A kompilálás menetéből következik, hogy ha két szabadságfok között nincs közvetlen összekötő rugó, akkor a két szabadságfoknak megfelelő, főátlóelemen kívüli elemek értéke nulla marad. Így a merevségi mátrix struktúráját (a zérus, illetve nemzérus elemek helyét) az egyes rugómerevségek számszerű ismerete nélkül is meg tudjuk határozni pusztán a szerkezet topológiája alapján.

3.1.3. Példa (Merevségi mátrix kompilálása)**.** *Határozzuk meg a 3.5. ábrán látható rendszer merevségi mátrixának struktúráját, majd a merevségi mátrixot kompilálással!*

Megoldás

A merevségi mátrix struktúrájához azt kell eldöntenünk, hogy melyik szabadságfokok nincsenek összekötve egymással közvetlenül, hiszen a nekik megfelelő főátlón kívüli elemek maradnak nullák. Mivel nincsenek összekapcsolva egymással az 1-3, 1-4, 1-5, 2-4, 2-5 és 4-5 szabadságfok-párok ezért zérus marad a merevségi mátrix 1-3, 3-1, 1-4, 4-1, 1-5, 5-1, 2-4, 4-2, 2-5, 5-2, 4-5, 5-4 eleme. A többi elem valamilyen értéket vesz fel, így a merevségi mátrix struktúrája az alábbi lesz (X jelöli a nemzérus, O pedig a zérus elemeket):

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} X & X & O & O & O \\ X & X & X & O & O \\ O & X & X & X & X \\ O & O & X & X & O \\ O & O & X & O & X \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

A kompilálást a merevségi mátrix nullákkal való feltöltésével kezdjük:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Ezután végig kell mennünk az összes rugón és a merevségek hatását hozzáadni a megfelelő tagokhoz. Az A rugó az 1. és 2. szabadságfokokat köti össze, így a k_A merevséget hozzáadjuk az 1-1 és 2-2 elemhez, illetve kivonjuk az 1-2 és 2-1 elemből:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_A & -k_A & 0 & 0 & 0 \\ -k_A & k_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

A B rugó a 2. és 3. szabadságfokokat köti össze, így a k_B merevséget hozzáadjuk a 2-2 és 3-3 elemhez, illetve kivonjuk a 2-3 és 3-2 elemből:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_A & -k_A & 0 & 0 & 0 \\ -k_A & k_A + k_B & -k_B & 0 & 0 \\ 0 & -k_B & k_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

A C rugó is a 2. és 3. szabadságfokokat köti össze, így a k_C merevséget hozzáadjuk a 2-2 és 3-3 elemhez, illetve kivonjuk a 2-3 és 3-2 elemből:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_A & -k_A & 0 & 0 & 0 \\ -k_A & k_A + k_B + k_C & -k_B - k_C & 0 & 0 \\ 0 & -k_B - k_C & k_B + k_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

A D rugó a 3. és 4. szabadságfokokat köti össze, így a k_D merevséget hozzáadjuk a 3-3 és 4-4 elemhez, illetve kivonjuk a 3-4 és 4-3 elemből:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_A & -k_A & 0 & 0 & 0 \\ -k_A & k_A + k_B + k_C & -k_B - k_C & 0 & 0 \\ 0 & -k_B - k_C & k_B + k_C + k_D & -k_D & 0 \\ 0 & 0 & -k_D & k_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

Az E rugó a 3. és 5. szabadságfokokat köti össze, így a k_E merevséget hozzáadjuk a 3-3 és 5-5 elemhez, illetve kivonjuk a 3-5 és 5-3 elemből:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_A & -k_A & 0 & 0 & 0 \\ -k_A & k_A + k_B + k_C & -k_B - k_C & 0 & 0 \\ 0 & -k_B - k_C & k_B + k_C + k_D + k_E & -k_D & -k_E \\ 0 & 0 & -k_D & k_D & 0 \\ 0 & 0 & -k_E & 0 & k_E \end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

Az F rugó a 4. szabadságfokot a megtámasztással köti össze, így a k_F merevséget hozzáadjuk a 4-4 elemhez:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_A & -k_A & 0 & 0 & 0 \\ -k_A & k_A + k_B + k_C & -k_B - k_C & 0 & 0 \\ 0 & -k_B - k_C & k_B + k_C + k_D + k_E & -k_D & -k_E \\ 0 & 0 & -k_D & k_D + k_F & 0 \\ 0 & 0 & -k_E & 0 & k_E \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

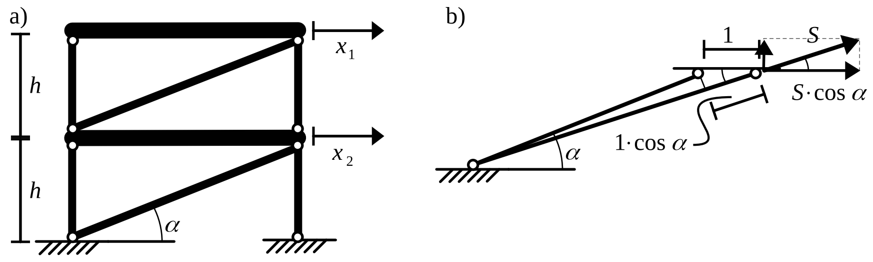
Végül a G rugó az 5. szabadságfokot a megtámasztással köti össze, így a k_G merevséget hozzáadjuk az 5-5 elemhez:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_A & -k_A & 0 & 0 & 0 \\ -k_A & k_A + k_B + k_C & -k_B - k_C & 0 & 0 \\ 0 & -k_B - k_C & k_B + k_C + k_D + k_E & -k_D & -k_E \\ 0 & 0 & -k_D & k_D + k_F & 0 \\ 0 & 0 & -k_E & 0 & k_E + k_G \end{bmatrix}. \tag{3.32}$$

Mivel nincs több rugó, ezért ez egyben a teljes rendszer merevségi mátrixa.

3.1.4. Példa (Merevségi mátrix kompilálása)**.** *Határozzuk meg a 3.6.a) ábrán látható kétszintes épület merevségi mátrixát kompilálással! A merevítőrúd normálmerevsége EA, a vízszintessel bezárt hajlásszöge α, a szintek magassága h.*

Megoldás
Az oszlopok a födémekhez csuklósan kapcsolódnak, így azokból nem származik merevség, ezért a merevítő rudak hatását kell beépíteni a merevségi mátrixba. Egy merevítő rúd egységnyi alakváltozását mutatja a 3.6.b) ábra, ahol a felső végpontot egységnyivel elmozdítottuk. A rúd megnyúlása ennek az elmozdulásnak a rúd irányára vett vetületével lesz egyenlő, azaz



3.6. ábra. Kétszabadságfokú épület átlós merevítéssel: a) mechanikai modell; b) átlós merevítőrúd merevsége.

$1 \cdot \cos\alpha$ lesz. A rúd hossza $h/\sin\alpha$, így a rúdban ébredő erő:

$$S = \frac{EA \cdot 1 \cdot \cos\alpha}{h/\sin\alpha}. \tag{3.33}$$

Ennek az erőnek a vízszintes vetülete lesz a szabadságfokot visszatérítő erő, így a merevítőrúd helyettesítő merevsége:

$$k_m = S\cos\alpha = \frac{EA \cdot \sin\alpha\cos^2\alpha}{h}. \tag{3.34}$$

Ezután elvégezhetjük a kompilálást, amit a merevségi mátrix nullákkal való feltöltésével kezdjük:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.35}$$

Ezután végig kell mennünk az összes rugalmas elemen. A felső szint merevítő rúdja az 1. és 2. szabadságfokokat köti össze, így a merevséget hozzá kell adnunk az 1-1, 2-2 elemekhez és levonnunk az 1-2 és 2-1 elemekből:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_m & -k_m \\ -k_m & k_m \end{bmatrix}. \tag{3.36}$$

Az alsó szint merevítő rúdja a 2. szabadságfokot köti a támaszhoz, így a merevséget hozzá kell adnunk a 2-2 elemhez:

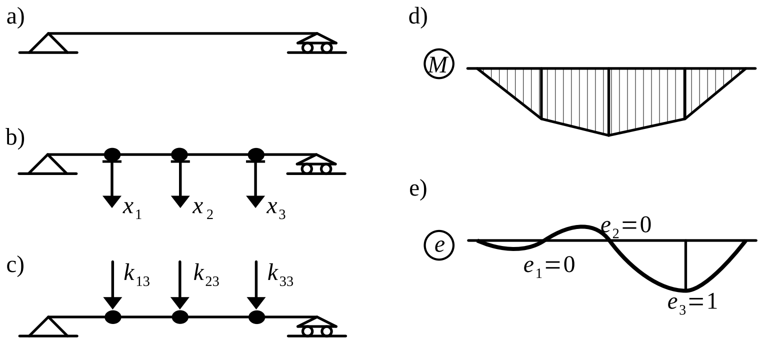
$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_m & -k_m \\ -k_m & k_m + k_m \end{bmatrix}. \tag{3.37}$$

Mivel most mindegyik szinten azonos a k_m merevség, ezért az összevonást paraméteresen is elvégezhetjük, és a szerkezet merevségi mátrixa az alábbi lesz:

$$\underline{\underline{K}} = \frac{EA\sin\alpha\cos^2\alpha}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{3.38}$$

3.1.3.3. Diszkretizált rendszerben jelentés alapján

Ha a folytonos rendszert úgy diszkretizáltuk, hogy a szakaszokra bontott szerkezet megoszló tömegeit a szakaszok végpontjaiba redukáltuk, így képezve a



3.7. ábra. a) Kéttámaszú gerenda. b) Diszkretizált gerenda szabadságfokai. A merevségi mátrix harmadik oszlopának fizikai jelentése: c) a keresett erők; d) paraméteres nyomatéki ábra; e) elmozdult alak három feltétellel.

szabadsági fokokat, akkor a merevségi mátrix fizikai jelentése ugyan nem változik, viszont a jelentés használata a szabadságfokok számának növekedésével hatványozottan nehezedik.

A 3.7.a) ábrán látható kéttámaszú tartót a b) ábra szerinti felbontással háromszabadságfokú diszkretizált rendszerként kezelhetjük. A merevségi mátrixot a jelentése alapján számolva a harmadik oszlop k_{13}, k_{23}, k_{33} elemeit úgy lehetne számolni, hogy a 3.7.c) ábrának megfelelően működtetnénk a tartón a három (ismeretlen) erőt, amikből paraméteresen meghatároznánk a d) ábrán látható nyomatéki ábrát, amiből (még mindig paraméteresen) meghatároznánk az e) ábra szerinti elmozdult alakot, legalábbis annak a szabadságfokok alatti három értékét, azaz e_1-, e_2-, e_3-at (még mindig paraméteresen). A merevségi mátrix jelentése alapján a harmadik oszlop esetén $e_1 = 0$, $e_2 = 0$, $e_3 = 1$, és ebből a három egyenletből kell kiszámolni k_{13}, k_{23}, k_{33}-t. A paraméteres igénybevétel- és elmozdulásszámítás miatt ezt az eljárást senkinek sem ajánljuk, ezért példát sem mutatunk rá.

3.1.3.4. Diszkretizált rendszerben engedékenység alapján

Ahogy az előző pontban vázoltuk, diszkretizált rendszerekben a szabadságfokok teljes összekapcsoltsága miatt nem célszerű a merevségi mátrix jelentéséből kiindulva meghatározni azt. Ehelyett fordítsuk meg a hatást, és a merevség helyett a szerkezet engedékenységét használjuk. Vezessük be a *hajlékonysági mátrix*ot ($\underline{\underline{F}}$), mint a merevségi mátrix inverzét:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{K}}^{-1}. \tag{3.39}$$

Ezt a mátrixot szokás *engedékenységi* mátrixnak is hívni. Szorozzuk be a (3.14) egyenlet mindkét oldalát balról a merevségi mátrix inverzével[5]:

$$\underline{x}_{st} = \underline{\underline{K}}^{-1}\underline{q}_{st}, \tag{3.40}$$

[5]Nem tudom kellőképpen hangsúlyozni a vektor- és mátrixszámítás érzékenységét a műveletek sorrendjére és elvégezhetőségére, amiből kiemelem, hogy mátrixszal nem szabad osztani, hanem az inverzével kell szorozni, ami aztán egy egységmátrixot eredményez, az meg gyakran elhagyható.

azaz a hajlékonysági mátrix segítségével:

$$\underline{x}_{st} = \underline{\underline{F}}\underline{q}_{st}, \tag{3.41}$$

A kapott egyenletből kiolvasható, hogy ha a rendszerben a $\underline{q}_{st}$ statikus erők működnek a szabadságfokokra, akkor az $\underline{x}_{st} = \underline{\underline{F}}\underline{q}_{st}$ elmozdult állapotban lesz egyensúlyban. Ha a tehervektor speciálisan olyan, hogy a j-edik szabadságfokra hat egy egységerő, a többi szabadságfok pedig terheletlen, akkor a $\underline{q}_{st}$ vektor a j-edik egységvektor lesz, az $\underline{\underline{F}}\underline{q}_{st} = \underline{\underline{F}}\underline{e}_j$ szorzat pedig a fajlékonysági mátrix j-edik oszlopa, amit jelöljünk $\underline{f}_j$-vel. Tehát *a hajlékonysági mátrix j-edik oszlopa megadja azokat az egyensúlyi elmozdulásokat, amik akkor alakulnak ki a szabadságfokokban, ha a j-edik szabadságfokra egy statikus egységnyi terhet működtetünk, miközben a többi szabadságfokra nem hat külső teher*. Ez a hajlékonysági mátrix j-edik oszlopának fizikai jelentése.

A hajlékonysági mátrixot a fizikai jelentése alapján könnyebben tudjuk előállítani, hiszen csak a szabadságfokok számának megfelelő számú teheresetet kell számolni. Minden esetben az egyik szabadságfokra működtetett egységerőből kell meghatározni az igénybevételeket, majd azokból a szabadságfokok elmozdulásait. Miután megvan a hajlékonysági mátrix összes eleme, a (3.39) definíció megfordításával megkapjuk a merevségi mátrixot:

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{F}}^{-1}. \tag{3.42}$$

3.1.5. Példa (Hajlékonysági mátrix)**.** *Határozzuk meg a korábban a 3.6.a) ábrán látott kétszintes épület merevségi mátrixát a hajlékonysági mátrix invertálásával! A merevítőrúd normálmerevsége EA, a vízszintessel bezárt hajlásszöge α, a szintek magassága h.*

Megoldás

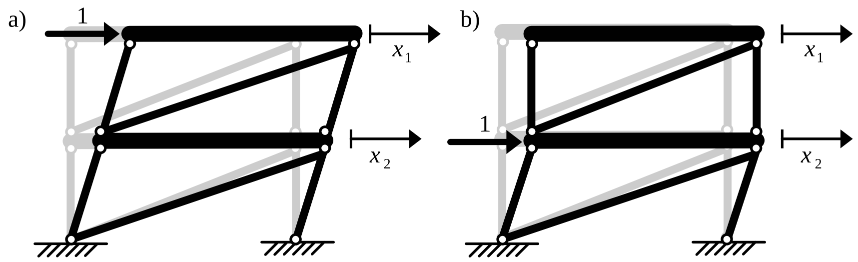
A szabadságfokora ható egységerők miatti elmozdulások számításához az egyes merevítőrudak engedékenységére van szükség, ami a merevség reciproka. A 3.1.4 példában bemutatott merevség alapján ha egy szinten az eltolóerő egységnyi, akkor a szint eltolódása:

$$f = \frac{1}{k_m} = \frac{h}{EA\sin\alpha\cos^2\alpha}. \tag{3.43}$$

A 3.8.a) ábrán látható az első szabadságfokra ható egységerő hatása. A felső szint oszlopait és merevítőrúdját elvágva az egyensúlyból következik, hogy a felső merevítőrúdban egységnyi vízszintes erőkomponens ébred, azaz a szint alakváltozása f. Az eredeti szerkezeten az alsó szint oszlopait és merevítőrúdját elvágva az egyensúlyból következik, hogy az alsó merevítőrúdban is egységnyi vízszintes erőkomponens ébred, azaz ennek a szintnek is f az alakváltozása. A második szabadságfok elmozdulása tehát f, az elsőé pedig $f + f = 2f$ lesz, vagyis a hajlékonysági (engedékenységi) mátrix első oszlopa:

$$\underline{f}_1 = \frac{h}{EA\sin\alpha\cos^2\alpha}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}. \tag{3.44}$$

A 3.8.b) ábrán látható a második szabadságfokra ható egységerő hatása. A felső szint oszlopait és merevítőrúdját elvágva az egyensúlyból következik,



3.8. ábra. a) A szintek eltolódásai az első szabadságfokra ható egységerő miatt. b) A szintek eltolódásai a második szabadságfokra ható egységerő miatt.

hogy a felső merevítőrúdban nem ébred erő, azaz a szint alakváltozása 0. Az eredeti szerkezeten az alsó szint oszlopait és merevítőrúdját elvágva az egyensúlyból következik, hogy az alsó merevítőrúdban egységnyi vízszintes erőkomponens ébred, azaz ennek a szintnek f az alakváltozása. A második szabadságfok elmozdulása tehát f, az elsőé pedig ugyancsak f lesz, vagyis a hajlékonysági (engedékenységi) mátrix második oszlopa:

$$\underline{f}_2 = \frac{h}{EA\sin\alpha\cos^2\alpha}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}. \tag{3.45}$$

Fentiek alapján a hajlékonysági mátrix:

$$\underline{\underline{F}} = \frac{h}{EA\sin\alpha\cos^2\alpha}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \tag{3.46}$$

a merevségi mátrix pedig ennek inverze:

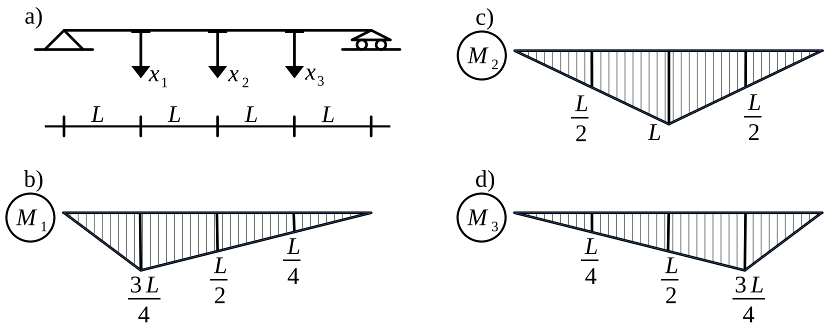
$$\underline{\underline{K}} = \frac{EA\sin\alpha\cos^2\alpha}{h}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{EA\sin\alpha\cos^2\alpha}{h}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}. \tag{3.47}$$

Az eredmény természetesen megegyezik a 3.1.4. példában kapottal.

A szabadságfokok elmozdulásának számításához ráadásul jól használható a virtuális erők tétele[6]. Valamely szabadsági fok elmozdulásainak számításához a rá működtetett egységerő által létrehozott egyensúlyi erőrendszer alkalmas egy olyan virtuális erőrendszer szerepére, amelyen csak a keresett elmozdulás végez külső kiegészítő munkát, így a keresett elmozdulás az alakváltozásoknak a virtuális belső erőkön végzett kiegészítő munkájának ellentettjével lesz egyenlő. A belső munka definíciója és az ellentett miatti két mínuszjel szorzata eredményeként az elmozdulás az alakváltozások és belső erők szorzatintegráljaként számítható[7]. Ebből az előállításból az is következik, hogy a hajlékonysági mátrix szimmetrikus lesz, a szimmetrikus mátrix inverzéből pedig az, hogy a merevségi mátrix is szimmetrikus lesz.

[6] Egy geometriailag lehetséges elmozdulásrendszer *bármely* virtuális erőrendszeren végzett kiegészítő munkája zérus.

[7] Ezt leggyakrabban (hajlított gerendák esetén) két nyomatéki ábra szorzatintegráljának EI-vel való leosztásával számoljuk.



3.9. ábra. a) Kéttámaszú tartó három szabadságfokú modellje. b)-d) Az egyes szabadságfokokra működtetett egységerőből származó nyomatéki ábrák.

3.1.6. Példa (Hajlékonysági mátrix)**.** *Határozzuk meg a 3.9.a) ábrán látható gerenda három szabadságfokú modelljének hajlékonysági és merevségi mátrixát! A gerenda hajlítómerevsége EI, a támaszköz $4L$.*

Megoldás

A 3.9.b)-d) ábrákon felrajzoltuk az egyes szabadságfokokon működtetett egységerőkből származó nyomatéki ábrákat. Ezeknek EI-ad része az egyes szakaszokon a görbület, de egyben ugyanezek az ábrák használhatók virtuális nyomatéki ábrákként is.

A hajlékonysági mátrix f_{11} elemének számításához (ami az első szabadságfok elmozdulása az első szabadságfokra működtetett egységerő hatására) az

$$f_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EI} dL \tag{3.48}$$

integrálást kell elvégezni. Emlékeztetünk, hogy ha egy szorzatintegrál egyik függvénye lineáris, akkor az integrált úgy is megkaphatjuk, ha a másik függvény alatti területet szorozzuk a lineáris függvénynek a másik függvény súlypontjában leolvasott értékével. Mivel a virtuális erőkből származó igénybevételi ábra egyenes szakaszokból áll, ezért a fenti segédtételt az integrálási tartomány és a függvények felbontásával mindig fel tudjuk használni. Az első elem számításához két-két szakasszal kell csak dolgoznunk:

$$f_{11} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}L\frac{3L}{4}\cdot\frac{L}{2} + \frac{1}{2}3L\frac{3L}{4}\cdot\frac{L}{2}\right] = \frac{3}{4}\frac{L^3}{EI}. \tag{3.49}$$

A hajlékonysági mátrix f_{21} elemének számításához (ami a második szabadságfok elmozdulása az első szabadságfokra működtetett egységerő hatására) az

$$f_{21} = \int \frac{M_2 M_1}{EI} dL \tag{3.50}$$

integrálást kell elvégezni. Balról a második L hosszúságú szakasznál ugyan mindkét ábra lineáris, a trapéz súlypontja viszont kevéssé közismert, ezért ezen a szakaszon két háromszögre bontjuk az M_1 ábrát és azok területét, súlypontját használjuk. A végeredményt nem befolyásolja, de a követhetőség értekében a mási két szakaszon is az M_1 ábrán számolunk területet és súlypontot:

$$f_{21} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}L\frac{3L}{4}\cdot\frac{L}{3} + \frac{1}{2}L\frac{3L}{4}\cdot\frac{2L}{3} + \frac{1}{2}L\frac{L}{2}\cdot\frac{5L}{6} + \frac{1}{2}2L\frac{L}{2}\cdot\frac{2L}{3}\right] = \\ = \frac{11}{12}\frac{L^3}{EI}. \quad (3.51)$$

A hajlékonysági mátrix f_{31} elemének számításához (ami a harmadik szabadságfok elmozdulása az első szabadságfokra működtetett egységerő hatására) az

$$f_{31} = \int \frac{M_3 M_1}{EI} dL \quad (3.52)$$

integrálást kell elvégezni. A középső $2L$ hosszúságú szakasznál most is két trapéz kell összeszoroznunk, az előzőhöz hasonlóan most is az M_1 ábrát használjuk a területek, súlypontok számításához:

$$f_{31} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}L\frac{3L}{4}\cdot\frac{L}{6} + \frac{1}{2}2L\frac{3L}{4}\cdot\frac{5L}{12} + \frac{1}{2}2L\frac{L}{4}\cdot\frac{7L}{12} + \frac{1}{2}L\frac{L}{4}\cdot\frac{L}{2}\right] = \\ = \frac{7}{12}\frac{L^3}{EI}. \quad (3.53)$$

A hajlékonysági mátrix f_{12} eleme a mátrix szimmetriája miatt már ismert:

$$f_{12} = f_{21} = \frac{11}{12}\frac{L^3}{EI}. \quad (3.54)$$

A hajlékonysági mátrix f_{22} elemének számításához (ami a második szabadságfok elmozdulása a második szabadságfokra működtetett egységerő hatására) az

$$f_{22} = \int \frac{M_2 M_2}{EI} dL \quad (3.55)$$

integrálást kell elvégezni. Most is csak két-két szakasszal kell csak dolgoznunk:

$$f_{22} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}2L\cdot L\cdot\frac{2L}{3} + \frac{1}{2}2L\cdot L\cdot\frac{2L}{3}\right] = \frac{4}{3}\frac{L^3}{EI}. \quad (3.56)$$

A hajlékonysági mátrix f_{32} elemének számításához (ami a harmadik szabadságfok elmozdulása a második szabadságfokra működtetett egységerő hatására) az

$$f_{32} = \int \frac{M_3 M_2}{EI} dL \quad (3.57)$$

integrálást kell elvégezni. A szerkezet szimmetriája miatt ez a szorzatintegrál azonos lesz az f_{12} értékével (3.54), azaz:

$$f_{32} = f_{12} = \frac{11}{12}\frac{L^3}{EI}. \quad (3.58)$$

A hajlékonysági mátrix f_{13} eleme a mátrix szimmetriája miatt már ismert:

$$f_{13} = f_{31} = \frac{7}{12}\frac{L^3}{EI}. \tag{3.59}$$

A hajlékonysági mátrix f_{23} eleme a mátrix szimmetriája miatt már ismert:

$$f_{23} = f_{32} = \frac{11}{12}\frac{L^3}{EI}. \tag{3.60}$$

Végül hajlékonysági mátrix f_{33} elemének számításához (ami a harmadik szabadságfok elmozdulása a harmadik szabadságfokra működtetett egységerő hatására) az

$$f_{33} = \int \frac{M_3 M_3}{EI} dL \tag{3.61}$$

integrálást kell elvégezni. A szerkezet szimmetriája miatt ez a szorzatintegrál azonos lesz az f_{11} értékével, azaz:

$$f_{33} = f_{11} = \frac{3}{4}\frac{L^3}{EI}. \tag{3.62}$$

A fenti eredményeket összegezve a szerkezet hajlékonysági mátrixa:

$$\underline{\underline{F}} = \frac{L^3}{12EI}\begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

A merevségi mátrixhoz az invertálásnál felhasználhatjuk, hogy a kiemelt skalárszorzó reciproka lesz a megmaradt 3×3-as mátrix inverzének szorzója:

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 69 & -66 & 27 \\ -66 & 96 & -66 \\ 27 & -66 & 69 \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

3.2. Többszabadságfokú rendszerek szabadrezgése

A többszabadságfokú rendszerek (3.13) szerinti egyenletének általános megoldása az egyszabadságfokú rendszerekhez hasonlóan két részből tevődik össze. Egyik a gerjesztett rezgés inhomogén egyenletének egy partikuláris megoldása, a másik pedig a kiegészítő differenciálegyenlet általános megoldása. Utóbbi egyenletet úgy kapjuk, ha az egyenlet jobb oldalán a tehervektor helyére zérusvektort írunk. Az így kapott egyenlet egyben a terheletlen szerkezet szabadrezgésének a differenciálegyenlete, ezért először itt is ezt az esetet vizsgáljuk meg. A többszabadságfokú rendszer szabadrezgésének a mátrix-differenciálegyenlete:

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t) = \underline{0}, \tag{3.65}$$

aminek olyan megoldását keressük, ami kielégíti az alábbi kezdeti feltételeket:

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0, \qquad \underline{\dot{x}}(t_0) = \underline{v}_0, \tag{3.66}$$

azaz a kezdeti t_0 pillanatban a szabadságfokok elmozdulásai és sebességei rendre az $\underline{x}_0$ és $\underline{v}_0$ vektorok szerinti értékeket veszik fel.

Könnyű belátni, hogy ha $\underline{x}_0 = \underline{0}$ és $\underline{v}_0 = \underline{0}$, akkor az $\underline{x}(t) = \underline{0}$ lesz a megoldása a feladatnak, amit triviális megoldásnak hívunk. (Ez végső soron Newton 1. mozgástörvényének egy speciális esete.) A továbbiakban nemtriviális megoldásokat keresünk, ezért feltételezzük, hogy $\underline{x}_0$ és $\underline{v}_0$ vektorok közül legalább az egyik különbözik zérustól.

3.2.1. A megoldás feltételezett alakja

A (3.65) differenciálegyenlet az ismeretlen $\underline{x}(t)$ elmozdulásokat és azok idő szerinti második deriváltjait tartalmazza, így az egyszabadságfokú rendszereknél szerzett tapasztalataink alapján időben harmonikusan változó szabadrezgésre számíthatunk. Keressük ezért a megoldást

$$\underline{x}(t) = h(t)\underline{v} \tag{3.67}$$

alakban, ahol $h(t)$ egy egyelőre ismeretlen ω_0 sajátkörfrekvencia szerint változó függvény[8], míg a $\underline{v}$ vektor az egyes szabadságfokok kitéréseinek egymáshoz való hányadát határozza meg. (Ezzel szétválasztottuk a megoldásban az időfüggést és a helyfüggést.)

A feltételezett megoldás idő szerinti kétszeri deriválásakor a láncszabálynak megfelelően az ω_0 kétszer szorozza a függvényt, a harmonikus függvény második deriváltja pedig önnmaga ellentettjévé válik, azaz:

$$\ddot{\underline{x}}(t) = -\omega_0^2 h(t)\underline{v}. \tag{3.68}$$

Ezt és a feltételezett alakot behelyettesítjük a (3.65) differenciálegyenletbe:

$$\underline{\underline{M}}\left(-\omega_0^2 h(t)\underline{v}\right) + \underline{\underline{K}}\left(h(t)\underline{v}\right) = \underline{0}. \tag{3.69}$$

Ennek az egyenletnek a $h(t) \neq 0$ pillanatokban is igaznak kell lennie, ami csak akkor teljesül, ha:

$$\underline{\underline{M}}\left(-\omega_0^2 \underline{v}\right) + \underline{\underline{K}}\underline{v} = \underline{0}. \tag{3.70}$$

Ebben az egyenletben mind az $\underline{\underline{M}}$ mátrix $-\omega_0^2$-szeresét, mind a $\underline{\underline{K}}$ mátrixot jobbról szorozzuk ugyanazzal a $\underline{v}$ vektorral, ezért az egyenlettel egyenértékű a

$$\underline{\underline{K}}\underline{v} = \omega_0^2 \underline{\underline{M}}\underline{v}, \tag{3.71}$$

egyenlet, illetve az alábbi homogén egyenlet is[9]:

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \underline{\underline{M}}\right)\underline{v} = \underline{0}, \tag{3.72}$$

A $\underline{v}$ vektor elemeit és az ω_0 sajátkörfrekvenciát ismeretlenként tartalmazó (3.71), ill. (3.72) egyenleteket *általánosított sajátértékfeladat*nak nevezzük[10], ahol $\underline{v}$ a sajátvektor és ω_0^2 a sajátérték.

[8] Ez a korábbiak szerint sokféle alakban megadható: pl. $h(t) = a\cos(\omega_0 t)$, $h(t) = b\sin(\omega_0 t)$, $h(t) = c\cos(\omega_0 t) + d\sin(\omega_0 t)$, $h(t) = f\cos(\omega_0 t - \varphi)$, stb.

[9] Érdemes megjegyezni, hogy a *homogén differenciálegyenlet* megoldása közben egy *homogén lineáris egyenletrendszer*re jutottunk.

[10] A szokványos sajátértékfeladatban $\underline{\underline{A}}\underline{v} = \lambda\underline{v}$, amit homogén alakra hozva a $\left(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}}\right)\underline{v} = \underline{0}$ egyenlet adódik. Ebben az alakban látszik legjobban az általánosítás: az $\underline{\underline{I}}$ egységmátrix helyett az általánosított sajátértékfeladatban a nem is feltétlenül diagonál $\underline{\underline{M}}$ mátrix szorozza az ω_0^2 sajátértéket.

3.2.2. Az általánosított sajátértékfeladat megoldása

3.2.2.1. A nemtriviális megoldás létezésének feltétele

Lineáris algebrából tudjuk, hogy a (3.72) egyenletrendszernek csak akkor van a triviális $\underline{v} = \underline{0}$-tól eltérő megoldása, ha

- a $\left(\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \underline{\underline{M}}\right)$ együtthatómátrix szinguláris,
- a $\left(\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \underline{\underline{M}}\right)$ együtthatómátrix sorai nem lineárisan függetlenek egymástól (legalább az egyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként),
- a $\left(\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \underline{\underline{M}}\right)$ együtthatómátrix determinánsa nulla.

A fenti három feltétel egynértékű, ha az egyik teljesül, akkor a másik kettő is.

3.2.2.2. A determináns kifejtése

Az általánosított sajátértékfeladat kézi megoldásának első lépése a (3.72) egyenlet együthatómátrixának determinánsából indul ki:

$$|\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \underline{\underline{M}}| = 0. \tag{3.73}$$

Ebben az egyenletben csak az ω_0^2 az ismeretlen. A determinánst kifejtve a tmegmátrix főátlóbeli nemzérus elemei miatt az eredmény tipikusan egy N-edfokú polinomegyenlet lesz ω_0^2-re. Az algebra alaptétele szerint egy N-edfokú polinomnak a többszörös gyökök multiplicitását figyelembe véve pontosan N gyöke van. Az építőmérnöki szerkezeteinknél előforduló $\underline{\underline{K}}$ és $\underline{\underline{M}}$ mátrixok esetén ezek a gyökök ráadásul nemnegatív valós számok. Rendezzük a gyököket nagyság szerint sorba:

$$0 \le \omega_{01}^2 \le \omega_{02}^2 \le \omega_{03}^2 \le \cdots \le \omega_{0N}^2. \tag{3.74}$$

Az $\omega_{01}^2 = 0$ érték arra utal, hogy a szerkezet valamilyen merevtestszerű elmozdulásra képes. Építőmérnöki tartószerkezet esetén ilyen nem fordulhat elő, ha mégis, akkor a modellben (a merevségi mátrixban) van valami hiba, amit ki kell küszöbölni. A tárgyalásmódot könnyítendő a továbbiakban azt is feltételezzük, hogy nincsenek többszörös gyökök, azaz (3.74) egyenlőtlenségeiben kizárjuk az egyenlőségeket:

$$0 < \omega_{01}^2 < \omega_{02}^2 < \omega_{03}^2 < \cdots < \omega_{0N}^2. \tag{3.75}$$

A 3.2.6.3 alpontban később megmutatjuk, hogy mit tehetünk, illetve mit kell tennünk a többszörös gyökök esetén.

3.2.2.3. A sajátkörfrekvenciák

A (3.75)-ben felsorolt gyökök pozitív négyzetgyökeit nevezzük a többszabadságfokú rendszer *sajátkörfrekvenciái*nak:

$$0 < \omega_{01} < \omega_{02} < \omega_{03} < \cdots < \omega_{0N}. \tag{3.76}$$

Megállapíthatjuk, hogy *a többszabadságfokú rendszernek annyi sajátkörfrekvenciája van, ahány szabadságfoka.* Minden sajátkörfrekvenciához külön $h(t)$ harmonikus függvény tartozik, és a (3.72) egyenletbe való visszahelyettesítés után más lesz az együtthatómátrix és ezzel a sajátvektor is. A megoldás tehát nem a (3.67) képlet szerinti lesz, hanem az N különböző tag összege:

$$\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^{N} h_j(t)\underline{v}_j \tag{3.77}$$

Az egyes harmonikus függvényekhez meghatározható egy-egy periódusidő:

$$T_{01} = \frac{2\pi}{\omega_{01}}, \quad T_{02} = \frac{2\pi}{\omega_{02}}, \quad T_{03} = \frac{2\pi}{\omega_{03}}, \ldots, T_{0N} = \frac{2\pi}{\omega_{0N}}, \tag{3.78}$$

melyekre (3.76) egyenlőtlensége alapján teljesül, hogy:

$$T_{01} > T_{02} > T_{03} > \cdots > T_{0N}. \tag{3.79}$$

Az első periódusidőt *alapperiódus*nak nevezzük[11].

3.2.2.4. A sajátvektorok számítása

Mindegyik ω_{0j} sajátkörfrekvenciához külön-külön ki kell számolni a $\underline{v}_j$ sajátvektort a

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega_{0j}^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}_j = \underline{0} \tag{3.80}$$

egyenletből A lineáris algebra szerint ha a (3.80) homogén egyenletrendszernek létezik nemtriviális megoldása, akkor végtelen sok létezik, amik egymás skalárszorosai[12]. Ennek oka az, hogy az ω_{0j} sajátkörfrekvenciát pontosan úgy határoztuk meg, hogy az együtthatómátrix szinguláris legyen, azaz sorai ne legyenek lineárisan függetlenek. Emiatt a (3.80) egyenletrendszerben csak $N-1$ független egyenlet van, miközben a $\underline{v}_j$ vektorban pedig N ismeretlen, azaz az egyiket szabad paraméterként lehet felvenni.

Kézi számítás esetén pontosan ez az egyik lehetséges járható út. A keresett $\underline{v}_j$ sajátvektor egyik elemének (az elsőnek, az utolsónak, a j-ediknek) rögzítjük az értékét (1-re, -10-re, $1/N$-re), majd a fennmaradó $N-1$ ismeretlen elemet kiszámoljuk a (3.80) egyenlet $N-1$ kiválasztott egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldásával. Egy ilyen számítás menet közben két okból akadhat el:

- Ha a $\underline{v}_j$ vektor olyan elemének rögzítettük az értékét, ami a sajátvektorban nulla lenne, akkor olyan vektort kellene kiszámolnunk, ami egy tényleges $\underline{v}_j$ sajátvektor akkorára skálázott skalárszorosa lenne, hogy a zérus elem az előírt értékűvé válna. Ehhez végtelenszeres nyújtást kellene alkalmazni, a véges elemek tehát végtelenné válnának, vagyis a számítások során valamikor nullával kellene osztanunk. Ez természetesen használhatatlan eredményre vezetne, ezért ilyenkor másik elem értékét kell előírnunk.

[11] A zérus ω_{01} itt végtelenbe tartó periódusidőt eredményezne. Visszaemlékezve a periódusidő jelentésére (a kitérített szerkezet mennyi idő után tér vissza azonos állapotába), ez a végtelen azt jelenti, hogy sosem, mert a kitérített állapotában, egy új egyensúlyi helyzetben marad.

[12] Ez könnyen belátható, hiszen ha $\underline{v}_j$ megoldása a $\left(\underline{\underline{K}} - \omega_{0j}^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}_j = \underline{0}$ egyenletnek, akkor bármilyen skalár α-val $\alpha\underline{v}_j$ is az, hiszen $\left(\underline{\underline{K}} - \omega_{0j}^2\underline{\underline{M}}\right)\alpha\underline{v}_j = \alpha\left(\underline{\underline{K}} - \omega_{0j}^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}_j = \alpha\underline{0} = \underline{0}$.

- A (3.80) egyenlet N sorából ugyan csak $N-1$ lineárisan független, de attól még előfordulhat olyan sor, ami lineárisan független a többi $N-1$-től. Ekkor a fennmaradó $N-1$ sorból csak $N-2$ lesz lineárisan független, és ha éppen ezeket a sorokat választjuk ki a $\underline{v}_j$ elemeinek számítására, akkor nem kapunk egyértelmű megoldást, közben viszont az egyik egyenlet fölössé válik. A megoldás ilyenkor az, hogy másihogyan választjuk az $N-1$ egyenletet.

Ha a fentieket követve meghatároztunk egy $\underline{v}_j$ sajátvektort, akkor azt ellenőrizhetjük a (3.80) egyenletrendszer kihagyott egyenletébe történő visszahelyettesítéssel (ezzel nem csak a vektort, de a sajátkörfrekvenciát is ellenőrizzük).

3.2.2.5. A sajátvektorok egyértelműsége

A (3.80) egyenletrendszer fent bemutatott megoldásaként kapott $\underline{v}_j$ sajátvektor az előállítás módja miatt nem egyértelmű: a kézi számítás során bármelyik elem értékét rögzíthetjük bármilyen értékre. A későbbi használat érdekében szükség lehet arra, hogy a kapott sajátvektorokat úgy skálázzuk, hogy azok egyértelműen mindig ugyanazzal a tulajdonsággal rendelkezzenek. Az egyértelművé tételnek az alábbi módjait használhatjuk:

- A vektor egy kiválasztott elemének legyen rögzített az értéke, például az első elem legyen 1. Ez a módszer csak akkor működik, ha a kiválasztott elem biztos nem lesz nulla egyik rezgésalakban sem, hiszen ha a kiválasztott elem nulla, akkor nem tudjuk úgy skálázni a vektort, hogy az elem értéke 1 legyen.

- A legnagyobb abszolútértékű elem értéke legyen 1. (Ezt úgy is mondják, hogy a vektor $L^{(\infty)}$-normája 1.) A sajátértékfeladatok megoldására szolgáló számítógépes algoritmusok egy része olyan iterációs eljárás, aminek a pontosságát javítja, ha az iteráció minden lépésében egy ilyen skálázást hajtunk végre.

- A vektor hossza legyen 1. (Ezt úgy is mondják, hogy a vektor $L^{(2)}$-normája 1.) Ennek a módszernek hátránya, hogy a diszkretizálás sűrítésével a több szabadságfok miatt a vektor elemszáma nő, így a számértékek csökkenni fognak.

- A vektor hossza legyen akkora, hogy a $\underline{v}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_j$ szorzat értéke legyen 1:

$$\boxed{\underline{v}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_j = 1} \tag{3.81}$$

  Ekkor azt mondjuk, hogy a sajátvektor a tömegmátrixra normált.

Ebben a könyvben a továbbiakban a *tömegmátrixra normált sajátvektorok*at fogjuk használni, ezért nézzük meg, hogy egy tetszőleges algoritmussal kapott $\tilde{\underline{v}}_j$ sajátvektort hogyan tudunk a tömegmátrixra normálni. A skálázást végezzük egy α paraméterrel, azaz legyen

$$\underline{v}_j = \alpha \tilde{\underline{v}}_j. \tag{3.82}$$

Írjuk fel a tömegmátrixra normáltság feltételét és helyettesítsük be a fenti skálázást:

$$1 = \underline{v}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_j = (\alpha \tilde{\underline{v}}_j)^T \underline{\underline{M}} (\alpha \tilde{\underline{v}}_j) = \alpha^2 \tilde{\underline{v}}_j^T \underline{\underline{M}} \tilde{\underline{v}}_j. \tag{3.83}$$

Oldjuk meg a fenti egyenletet α-ra:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\underline{\tilde{v}}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{\tilde{v}}_j}}. \tag{3.84}$$

A skálázás paramétere tehát mindig az aktuális kiszámolt sajátvektortól függ, amiből egy nem tömegmátrixra normált $\underline{\tilde{v}}_j$ sajávektorból a

$$\underline{v}_j = \frac{1}{\sqrt{\underline{\tilde{v}}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{\tilde{v}}_j}} \underline{\tilde{v}}_j. \tag{3.85}$$

képlettel készíthetünk tömegmátrixra normált sajátvektort.

Megjegyzés: a fenti egyértelművé tétel sem egészen egyértelmű: a sajátvektort -1-gyel szorozva szintén egy tömegmátrixra normált sajátvektort kapunk. Ennek kiküszöbölése azonban túlmutat e könyv keretein, ezért a továbbiakban tételezzük fel, hogy a sajátvektoraink valóban egyértelműek.

3.2.2.6. Példák sajátkörfrekvenciák, sajátvektorok számítására

3.2.1. Példa (Sajátértékfeladat megoldása)**.** *Határozzuk meg a 3.1.4. példa kétszintes épületének sajátkörfrekvenciáit és tömegmátrixra normált sajátvektorait, ha az egyes szintek tömege $m = 6t$, a szintek magassága $h = 3m$, a merevítőrúd normálmerevsége $EA = 2000kN$, a vízszintessel bezárt hajlásszöge $\alpha = 30°$.*

Megoldás

A 3.10.a) ábrán megismételtük a szerkezetet. A tömegmátrix mindkét eleme 6 lesz:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}. \tag{3.86}$$

A merevségi mátrix kompilálásához szükségünk van a merevítőrúdból származó szintenkénti merevségre. Ez (3.34) alapján:

$$k_m = \frac{EA \cdot \sin\alpha \cos^2\alpha}{h} = \frac{2000 \sin 30° \cos^2 30°}{3} = 250\mathrm{kN/m} \tag{3.87}$$

Az ebből kompilált merevségi mátrix:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 250 & -250 \\ -250 & 500 \end{bmatrix}. \tag{3.88}$$

A sajátétékfeladat megoldásához fejtsük ki az együtthatómátrix determinánsát:

$$|\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \underline{\underline{M}}| = \begin{vmatrix} 250 - 6\omega_0^2 & -250 \\ -250 & 500 - 6\omega_0^2 \end{vmatrix} = (250 - 6\omega_0^2)(500 - 6\omega_0^2) - (-250)(-250). \tag{3.89}$$

A sajátkörfrekvenciáknál ez egyenlő nullával, azaz

$$\begin{gathered} |\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \underline{\underline{M}}| = 6 \cdot 6 \cdot \omega_0^4 + (-6 \cdot 500 - 6 \cdot 250)\omega_0^2 + 250 \cdot 500 - (-250)(-250) = 0 \\ 36\omega_0^4 - 4500\omega_0^2 + 62500 = 0 \end{gathered}. \tag{3.90}$$

Ebből ω_0^2-re két megoldást kapunk:

$$\omega_{0,1-2}^2 = \frac{4500 \pm \sqrt{4500^2 - 4 \cdot 36 \cdot 62500}}{2 \cdot 36} = \frac{4500 \pm 3354}{72} = \begin{cases} 15.915 \\ 109,08 \end{cases} \tag{3.91}$$

A gyökvonás után a sajátkörfrekvenciák (a kisebb az első, a nagyobb a második):

$$\boxed{\omega_{01} = 3,989 \mathrm{rad/s}, \qquad \omega_{02} = 10,44 \mathrm{rad/s}.} \tag{3.92}$$

- Az első sajátvektorhoz az $\omega_{01} = 3,989$ értéket kell használnunk, aminek a négyzete 15.915. Keressük a sajátvektort $[1 \quad c_1]^T$ alakban, így a sajátértékfeladat egyenletrendszere az alábbi lesz:

$$(\underline{\underline{K}} - \omega_{01}^2 \underline{\underline{M}})\underline{v}_1 = \\ = \begin{bmatrix} 250 - 6 \cdot 15,915 & -250 \\ -250 & 500 - 6 \cdot 15,915 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.93}$$

  Az első egyenletből:

$$(250 - 6 \cdot 15,915) \cdot 1 - 250 c_1 = 0 \to c_1 = \frac{250 - 6 \cdot 15,915}{250} = 0,6180, \tag{3.94}$$

  a második egyenlettel pedig ellenőrizhetjük az eddigi számításainkat (a kerekítések miatt a zérussal való egyenlőséget a többi mennyiség nagyságrendjéhez viszonyítjuk):

$$-250 \cdot 1 + (500 - 6 \cdot 15,915)0,6180 = -0,01 \approx 0 \tag{3.95}$$

  A tömegmátrixra normáláshoz szükségünk van az alábbi szorzatra:

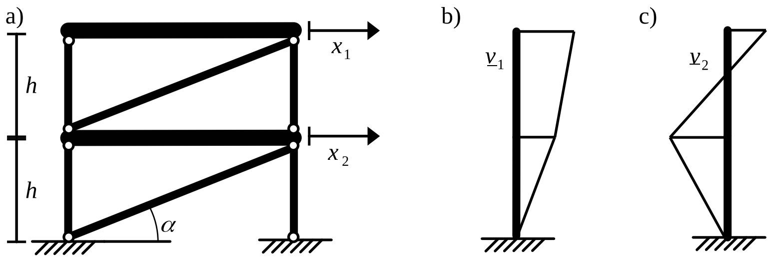
$$\underline{v}_1^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,6180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,6180 \end{bmatrix} = 8.292 \tag{3.96}$$

  A normáláshoz ennek négyzetgyökével kell leosztanunk a számolt vektort, azaz

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{8.292}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,6180 \end{bmatrix} \qquad \to \boxed{\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.3473 \\ 0.2146 \end{bmatrix}} \tag{3.97}$$

- A második sajátvektorhoz az $\omega_{02} = 10,44$ értéket kell használnunk, aminek a négyzete 109.08. Keressük a sajátvektort $[1 \quad c_2]^T$ alakban, így a sajátértékfeladat egyenletrendszere az alábbi lesz:

$$(\underline{\underline{K}} - \omega_{02}^2 \underline{\underline{M}})\underline{v}_2 = \\ = \begin{bmatrix} 250 - 6 \cdot 109,08 & -250 \\ -250 & 500 - 6 \cdot 109,08 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.98}$$



3.10. ábra. a) A kétszintes szerkezet modellje.b)-c) A számított sajátvektoroknak megfelelő alakok egy-egy oszlopsoron.

Az első egyenletből:

$$(250 - 6 \cdot 109,08) \cdot 1 - 250c_1 = 0 \rightarrow c_1 = \frac{250 - 6 \cdot 109,08}{250} = -1,6180, \tag{3.99}$$

a második egyenlettel pedig ellenőrizhetjük az eddigi számításainkat (a kerekítések miatt a zérussal való egyenlőséget a többi mennyiség nagyságrendjéhez viszonyítjuk):

$$-250 \cdot 1 + (500 - 6 \cdot 109,08)(-1,6180) = -0,05 \approx 0 \tag{3.100}$$

A tömegmátrixra normáláshoz szükségünk van az alábbi szorzatra:

$$\underline{v}_2^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1,6180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1,6180 \end{bmatrix} = 21.71 \tag{3.101}$$

A normáláshoz ennek négyzetgyökével kell leosztanunk a számolt vektort, azaz

$$\underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{21.71}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1,6180 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \boxed{\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.2146 \\ -0.3473 \end{bmatrix}} \tag{3.102}$$

A kiszámolt alakokat a 3.10.b)-c) ábrákon mutatjuk be.

3.2.2. Példa (Sajátértékfeladat megoldása)**.** *Határozzuk meg a 3.11.a) ábrán látható háromszintes épületnek a sajátkörfrekvenciáit és tömegmátrixra normált sajátvektorait, ha az egyes szintek tömege $m = 2t$, a szintek magassága $h = 3m$, az oszlopok hajlítómerevsége $EI = 1500kNm^2$.*

Megoldás
A tömegmátrix mindhárom eleme 2t lesz:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{3.103}$$

A merevségi mátrix kompilálásához szükségünk van a befogott-befogott oszlopokból származó szintenkénti merevségre. Ez (3.19) alapján oszloponként:

$$k_m = \frac{12EI}{h^3} = \frac{12 \cdot 1500}{3^3} = 666.67\text{kN/m}. \tag{3.104}$$

Szintenként három oszlop van, ezért ennek háromszorosával kell számolni. A kompilált merevségi mátrix[a]:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 4000 & -2000 & 0 \\ -2000 & 4000 & -2000 \\ 0 & -2000 & 2000 \end{bmatrix}. \tag{3.105}$$

A sajátértékfeladat megoldásához először ki kell fejteni a

$$|\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \underline{\underline{M}}| = \begin{vmatrix} 4000 - 2 \cdot \omega_0^2 & -2000 & 0 \\ -2000 & 4000 - 2 \cdot \omega_0^2 & -2000 \\ 0 & -2000 & 2000 - 2 \cdot \omega_0^2 \end{vmatrix}. \tag{3.106}$$

determinánst, majd egyenlővé tenni nullával:

$$-8\omega_0^6 + 40000\omega_0^4 - 48000000\omega_0^2 + 8000000000 = 0. \tag{3.107}$$

Harmadfokú egyenlet megoldóképletét nem kell tudni, de számos numerikus eljárás rendelkezésre áll, amiből ω_0^2-re három megoldást kapunk:

$$\omega_{01}^2 = 198.06, \qquad \omega_{02}^2 = 1555.0, \qquad \omega_{03}^2 = 3247.0. \tag{3.108}$$

Gyökvonás után pedig megkapjuk a sajátkörfrekvenciákat:

$$\boxed{\omega_{01} = 14.07\text{rad/s}, \qquad \omega_{02} = 39.43\text{rad/s}, \qquad \omega_{03} = 56.98\text{rad/s}.} \tag{3.109}$$

- Az első sajátvektorhoz az $\omega_{01} = 14.07$ értéket kell használnunk, és annak négyzetét, ami 198.06. Keressük a sajátvektort $[1 \quad c_1 \quad c_2]^T$ alakban, így a sajátértékfeladat egyenletrendszere az alábbi lesz:

  $$(\underline{\underline{K}} - \omega_{01}^2 \underline{\underline{M}})\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 3604 & -2000 & 0 \\ -2000 & 3604 & -2000 \\ 0 & -2000 & 1604 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.110}$$

  Az egyenletek közül bármelyik kettőt választhatjuk a két ismeretlen meghatározására, de ha a mátrix szerkezete speciális, akkor könnyebb a számítás. Esetünkben az első egyenletben csak egy ismeretlen szerepel, így abból:

  $$3604 \cdot 1 - 2000c_1 = 0 \rightarrow c_1 = 1.802, \tag{3.111}$$

  majd ezután a harmadik egyenletből:

  $$-2000 \cdot 1.802 + 1604c_2 = 0 \rightarrow c_2 = 2.247. \tag{3.112}$$

Utóbbit természetesen számolhattuk volna a második egyenletből is, így most azzal ellenőrizhetjük az eredményt:

$$-2000 \cdot 1 + 3604 \cdot 1.802 - 2000 \cdot 2.247 = 0.4 \approx 0. \tag{3.113}$$

A tömegmátrixra normáláshoz szükségünk van az alábbi szorzatra:

$$\underline{v}_1^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1.802 & 2.247 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.802 \\ 2.247 \end{bmatrix} = 18.59 \tag{3.114}$$

A normáláshoz ennek négyzetgyökével kell leosztanunk a számolt vektort, azaz

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{18.59}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.802 \\ 2.247 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \boxed{\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.2319 \\ 0.4179 \\ 0.5211 \end{bmatrix}} \tag{3.115}$$

- A második sajátvektorhoz az $\omega_{02} = 39.43$ értéket kell használnunk, és annak négyzetét, ami 1555. Keressük a sajátvektort $[1 \quad c_3 \quad c_4]^T$ alakban, így a sajátértékfeladat egyenletrendszere az alábbi lesz:

$$(\underline{\underline{K}} - \omega_{02}^2 \underline{\underline{M}}) \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 890.1 & -2000 & 0 \\ -2000 & 890.1 & -2000 \\ 0 & -2000 & -1110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.116}$$

Az egyenletek közül bármelyik kettőt választhatjuk a két ismeretlen meghatározására, de ha a mátrix szerkezete speciális, akkor könnyebb a számítás. Esetünkben az első egyenletben csak egy ismeretlen szerepel, így abból:

$$890.1 \cdot 1 - 2000 c_3 = 0 \rightarrow c_3 = 0.4450, \tag{3.117}$$

majd ezután a harmadik egyenletből:

$$-2000 \cdot 0.4450 - 1110 c_4 = 0 \rightarrow c_4 = -0.8019. \tag{3.118}$$

Utóbbit természetesen számolhattuk volna a második egyenletből is, így most azzal ellenőrizhetjük az eredményt:

$$-2000 \cdot 1 + 890.1 \cdot 0.4450 - 2000 \cdot (-0.8019) = -0.1 \approx 0. \tag{3.119}$$

A tömegmátrixra normáláshoz szükségünk van az alábbi szorzatra:

$$\underline{v}_2^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.4450 & -0.8019 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4450 \\ -0.8019 \end{bmatrix} = 3.682 \tag{3.120}$$

A normáláshoz ennek négyzetgyökével kell leosztanunk a számolt vektort, azaz

$$\underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3.682}}\begin{bmatrix}1\\0.4450\\-0.8019\end{bmatrix} \quad \rightarrow \boxed{\underline{v}_2 = \begin{bmatrix}0.5211\\0.2319\\-0.4179\end{bmatrix}} \tag{3.121}$$

- A harmadik sajátvektorhoz az $\omega_{03} = 56.98$ értéket kell használnunk, és annak négyzetét, ami 3247. Keressük a sajátvektort $[c_5 \quad 1 \quad c_6]^T$ alakban (hogy ne mindig az első elem legyen 1), így a sajátértékfeladat egyenletrendszere az alábbi lesz:

$$(\underline{\underline{K}} - \omega_{02}^2\underline{\underline{M}})\underline{v}_2 = \begin{bmatrix}-2494 & -2000 & 0\\-2000 & -2494 & -2000\\0 & -2000 & -4494\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_5\\1\\c_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}. \tag{3.122}$$

Az egyenletek közül bármelyik kettőt választhatjuk a két ismeretlen meghatározására, de ha a mátrix szerkezete speciális, akkor könnyebb a számítás. Esetünkben az első egyenletben csak egy ismeretlen szerepel, így abból:

$$-2494 \cdot c_5 - 2000 \cdot 1 = 0 \rightarrow c_5 = -0.8019, \tag{3.123}$$

majd a harmadik egyenletből:

$$-2000 \cdot 1 - 4494c_6 = 0 \rightarrow c_6 = -0.4450. \tag{3.124}$$

Utóbbit természetesen számolhattuk volna a második egyenletből is, így most azzal ellenőrizhetjük az eredményt:

$$-2000 \cdot (-0.8019) - 2494 \cdot 1 - 2000 \cdot (-0.4450) = -0.2 \approx 0. \tag{3.125}$$

A tömegmátrixra normáláshoz szükségünk van az alábbi szorzatra:

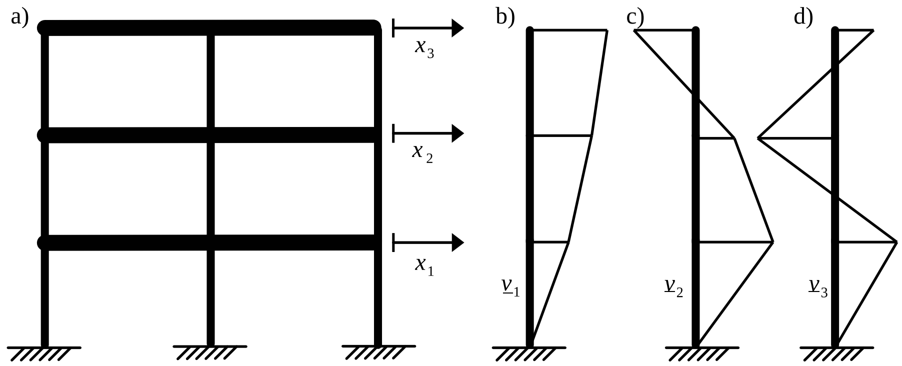
$$\underline{v}_3^T\underline{\underline{M}}\underline{v}_3 = \begin{bmatrix}-0.8019 & 1 & -0.4450\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.8019\\1\\-0.4450\end{bmatrix} = 3.682 \tag{3.126}$$

A normáláshoz ennek négyzetgyökével kell leosztanunk a számolt vektort, azaz

$$\underline{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3.682}}\begin{bmatrix}-0.8019\\1\\-0.4450\end{bmatrix} \quad \rightarrow \boxed{\underline{v}_3 = \begin{bmatrix}-0.4179\\0.5211\\-0.2319\end{bmatrix}} \tag{3.127}$$

A kiszámolt alakokat a 3.11.b)-d) ábrákon mutatjuk be egy-egy oszlopsoron.

[a]Mindig figyelni kell a szabadságfokok sorrendjére: most a legalsó az első.



3.11. ábra. a) A háromszintes szerkezet modellje. b)-d) A számított sajátvektoroknak megfelelő alakok egy-egy oszlopsoron.

3.2.3. Példa (Sajátértékfeladat megoldása)**.** *Határozzuk meg a 3.1.6. példa gerendájának sajátkörfrekvenciáit és tömegmátrixra normált sajátvektorait, ha az egyes szabadságfokokban redukált tömegek* $m = 3t$*, a gerenda hajlítómerevsége* $EI = 1400 kNm^2$ *és* $L = 2m$*.*

Megoldás

A 3.12.a) ábrán megismételtük a szerkezetet. A tömegmátrix mindhárom eleme 3t lesz:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{3.128}$$

A merevségi mátrix számításához használjuk fel a 3.1.6. példa eredményét, azaz (3.64)-t:

$$\underline{\underline{K}} = \frac{EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 69 & -66 & 27 \\ -66 & 96 & -66 \\ 27 & -66 & 69 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1725 & -1650 & 675 \\ -1650 & 2400 & -1650 \\ 675 & -1650 & 1725 \end{bmatrix} \tag{3.129}$$

A sajátértékfeladat megoldásához most is ki kellene fejteni a $|\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \underline{\underline{M}}|$ determinánst, egyenlővé tenni nullával és valamilyen módszerrel megoldani ω_0^2-re. Ezután a gyökvonással kapott három sajátkörfrekvenciával a sajátvektorokat lehet kiszámolni, bár megjegyezzük, hogy most mindenképpen kétismeretlenes egyenletrendszereket kellene megoldani.

A szerkezet szimmetriáját kihasználva a feladat megoldható kézi számítással is. Ezt mutatjuk be az alábbiakban. Mivel a geometria szimmetriáján túl a merevségek és a tömegek is szimmetrikusak, ezért a rezgésalakoktól is azt várjuk, hogy vagy szimmetrikusak, vagy ferdén szimmetrikusak lesznek. Szimmetrikus esetben az első és a harmadik szabadságfok elmozdulása azonos, így a szerkezet közepére való tükrözéssel azonos alakot kapunk. Ferdén szimmetrikus esetben az első és a harmadik szabadságfok elmozdulása egymásnak ellentettje és a második szabadságfok elmozdulása zérus, így a szerkezet közepére való tükrözéssel ellentett alakot kapunk.

- Szimmetrikus esetben tehát a sajátértékfeladatot

$$\begin{bmatrix} 1725-3\omega_0^2 & -1650 & 675 \\ -1650 & 2400-3\omega_0^2 & -1650 \\ 675 & -1650 & 1725-3\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.130}$$

alakban írhatjuk, de a három egyenlet

$$\begin{aligned} (2400-3\omega_0^2)c_1 - 1650c_2 &= 0 \\ -3300c_1 + (2400-3\omega_0^2)c_2 &= 0 \\ -1650c_2 + (2400-3\omega_0^2)c_1 &= 0 \end{aligned} \tag{3.131}$$

közül az első és az utolsó azonos, egyiket elhagyhatjuk. A maradék két független egyenletet írhatjuk

$$\begin{bmatrix} 2400-3\omega_0^2 & -1650 \\ -3300 & 2400-3\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.132}$$

alakban, ami már egy kétismeretlenes általánosított sajátértékfeladat. Az együtthatómátrix determinánsát kifejtve és azt egyenlővé téve nullával:

$$9\omega_0^4 - 14400\omega_0^2 + 315000 = 0 \tag{3.133}$$

egy másodfokú egyenletet kapunk ω_0^2-ra, aminek két megoldása (egyelőre nem tudjuk, hogy a ferdén szimmetrikus alak sajátkörfrekvenciája hogyan viszonyul ezekhez, ezért az indexeléssel utalunk arra, hogy ezek szimmetrikus alakok sajátkörfrekvenciái):

$$\omega_{0szim1}^2 = 22.18, \qquad \omega_{0szim2}^2 = 1578. \tag{3.134}$$

Gyökvonás után a sajátkörfrekvenciák:

$$\omega_{0szim1} = 4.710\text{rad/s}, \qquad \omega_{0szim2} = 39.72\text{rad/s}. \tag{3.135}$$

A sajátkörfrekvenciákat külön-külön visszahelyettesítve (3.132)-be, $c_1 = 1$ esetén megoldjuk az egyenletet c_2-re, így a szerkezet két szimmetrikus sajátvektora:

$$\underline{v}_{szim1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.414 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{v}_{szim2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.414 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.136}$$

A tömegmátrixra normálás után pedig azt kapjuk, hogy:

$$\underline{v}_{szim1} = \begin{bmatrix} 0.2887 \\ 0.4083 \\ 0.2887 \end{bmatrix}, \qquad \underline{v}_{szim2} = \begin{bmatrix} 0.2887 \\ -0.4083 \\ 0.2887 \end{bmatrix}. \tag{3.137}$$

- Ferdén szimmetrikus esetben a sajátértékfeladatot

$$\begin{bmatrix} 1725 - 3\omega_0^2 & -1650 & 675 \\ -1650 & 2400 - 3\omega_0^2 & -1650 \\ 675 & -1650 & 1725 - 3\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 \\ 0 \\ -c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.138}$$

alakban írhatjuk, de a három egyenlet

$$\begin{aligned} (1050 - 3\omega_0^2)c_1 &= 0 \\ 0c_1 &= 0 \\ (1050 - 3\omega_0^2)c_1 &= 0 \end{aligned} \tag{3.139}$$

közül egy azonosság, az első és az utolsó azonos, és csak akkor lehet nemtriviális megoldás, ha

$$1050 - 3\omega_0^2 = 0. \tag{3.140}$$

Ezt megoldva a ferdén szimmetrikus alakhoz tartozó sajátkörfrekvencia négyzetére

$$\omega_{0f}^2 = 350 \tag{3.141}$$

adódik, amit összevetve a két szimmetrikus alakhoz tartozó értékkel (3.134) képletében, látható, hogy ennek gyöke a második sajátkörfrekvencia lesz:

$$\omega_{02} = 18.71\text{rad/s}. \tag{3.142}$$

Mivel az egyetlen ferdén szimmetrikus alakban csak egyetlen szabad paraméter van, ezért a sajátvektort már nem is kell számolnunk, csak a tömegmátrixra normálni:

$$\underline{v}_2^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 6, \tag{3.143}$$

Így a sajátvektor

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.4083 \\ 0 \\ -0.4083 \end{bmatrix}. \tag{3.144}$$

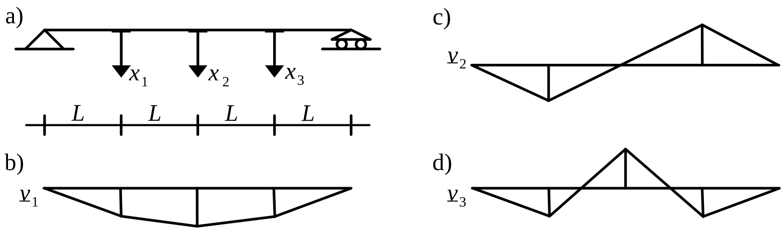
Összegezve a rendszer sajátkörfrekvenciái:

$$\boxed{\omega_{01} = 4.710\text{rad/s}, \qquad \omega_{02} = 18.71\text{rad/s}, \qquad \omega_{03} = 39.72\text{rad/s}.} \tag{3.145}$$

Tömegmátrixra normált sajátvektorai pedig:

$$\boxed{\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.2887 \\ 0.4083 \\ 0.2887 \end{bmatrix}, \qquad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.4083 \\ 0 \\ -0.4083 \end{bmatrix}, \qquad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.2887 \\ -0.4083 \\ 0.2887 \end{bmatrix}.} \tag{3.146}$$

A kiszámolt vektorokat a 3.12.b)-d) ábrákon mutatjuk be.



3.12. ábra. a) A háromszabadságfokú gerendamodell. b)-d) A számított saját-vektoroknak megfelelő alakok.

3.2.4. Példa (Sajátkörfrekvenciák a sajátvektorokból)**.** *Adottak a 3.13. ábra szerinti ötszintes szerkezet sajátvektorai:*

$$\underline{v}_j = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 1.91899 \\ 2.68251 \\ 3.22871 \\ 3.51334 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_k = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ -1.68251 \\ 1.83083 \\ -1.39788 \\ 0.52111 \end{bmatrix}. \quad \underline{v}_l = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ -0.83083 \\ -0.30972 \\ 1.08816 \\ -0.59435 \end{bmatrix},$$
$$\underline{v}_m = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.28463 \\ -0.91899 \\ -0.54620 \\ 0.76352 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_n = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 1.30972 \\ 0.71537 \\ -0.37279 \\ -1.20362 \end{bmatrix}. \tag{3.147}$$

Normáljuk a sajátvektorokat a tömegmátrixra, határozzuk meg a szerkezet sajátkörfrekvenciáit és a sajátvektorok sorszámát (j, k, l, m, n)*! A szintenként az egyes szabadságfokokba redukált tömegek* $m = 2t$*, az oszlopok hajlítómerevsége* $EI = 2400kNm^2$ *a szintek magassága* $h = 3.6m$*.*

Megoldás

A tömegmátrix mindegyik eleme 2t lesz:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{3.148}$$

A tömegmátrixra normáláshoz másra nincs is szökség. Minden sajátvektorhoz ki kell számolnunk a $\underline{v}^T \underline{\underline{M}} \underline{v}$ szorzatot:

$$\underline{v}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_j = 69.29, \quad \underline{v}_k^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_k = 18.82, \quad \underline{v}_l^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_l = 6.647,$$
$$\underline{v}_m^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_m = 5.614, \quad \underline{v}_n^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_n = 9.630, \tag{3.149}$$

és a gyökével leosztani a sajátvektort:

$$\underline{v}_j = \frac{1}{\sqrt{69.29}} \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 1.91899 \\ 2.68251 \\ 3.22871 \\ 3.51334 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1201 \\ 0.2305 \\ 0.3223 \\ 0.3879 \\ 0.4221 \end{bmatrix}, \tag{3.150}$$

$$\underline{v}_k = \frac{1}{\sqrt{18.82}} \begin{bmatrix} 1.00000 \\ -1.68251 \\ 1.83083 \\ -1.39788 \\ 0.52111 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2305 \\ -0.3879 \\ 0.4221 \\ -0.3223 \\ 0.1201 \end{bmatrix}, \tag{3.151}$$

$$\underline{v}_l = \frac{1}{\sqrt{6.647}} \begin{bmatrix} 1.00000 \\ -0.83083 \\ -0.30972 \\ 1.08816 \\ -0.59435 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3879 \\ -0.3223 \\ -0.1201 \\ 0.4221 \\ -0.2305 \end{bmatrix}, \tag{3.152}$$

$$\underline{v}_m = \frac{1}{\sqrt{5.614}} \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.28463 \\ -0.91899 \\ -0.54620 \\ 0.76352 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4221 \\ 0.1201 \\ -0.3879 \\ -0.2305 \\ 0.3223 \end{bmatrix}, \tag{3.153}$$

$$\underline{v}_n = \frac{1}{\sqrt{9.630}} \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 1.30972 \\ 0.71537 \\ -0.37279 \\ -1.20362 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3223 \\ 0.4221 \\ 0.2305 \\ -0.1201 \\ -0.3879 \end{bmatrix}. \tag{3.154}$$

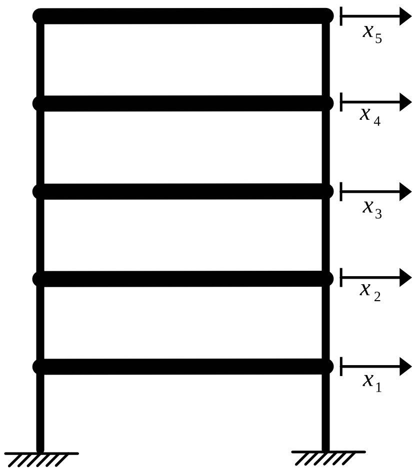
A sajátkörfrekvenciákhoz már kell a merevségi mátrix is, amit kompilálással állítunk elő. Ehhez szükségünk van a befogott-befogott oszlopokból származó szintenkénti merevségre, ami (3.19) alapján oszloponként:

$$k_m = \frac{12EI}{h^3} = \frac{12 \cdot 2400}{3.6^3} = 617.3\text{kN/m}. \tag{3.155}$$

Szintenként két oszlop van, ezért ennek kétszeresével kell számolni. A kompilált merevségi mátrix:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 2469.1 & -1234.6 & 0 & 0 & 0 \\ -1234.6 & 2469.1 & -1234.6 & 0 & 0 \\ 0 & -1234.6 & 2469.1 & -1234.6 & 0 \\ 0 & 0 & -1234.6 & 2469.1 & -1234.6 \\ 0 & 0 & 0 & -1234.6 & 1234.6 \end{bmatrix}. \tag{3.156}$$

Mindegyik sajátvektorhoz tartozó sajátkörfrekvenciát a vele felírt $(\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \underline{\underline{M}})\underline{v} = \underline{0}$ sajátértékfeladatból számolhatjuk, de két nagyon fontos egyszerűsítési lehetőségre hívjuk fel a figyelmet. Az egyik, hogy a mátrix alakban



3.13. ábra. Az ötszintes épület modellje.

megfogalmazott egyenletek mindig öt egyenletet tartalmaznak, de ha a sajátvektort ismerjük, akkor ez az öt egyenlet ugyanazt a sajátkörfrekvenciát szolgáltatja, tehát elegendő mindig csak az egyik sort felírni és megoldani. A másik, hogy az egyenlet bármelyik sajátvektorral igaz, nem szükséges hozzá a tömegmátrixra normált sajátvektor. Fentieket figyelembe véve az eredetileg megadott vektorokat helyettesítjük be az első egyenletbe, majd oldjuk meg ω_0^2-re:

$$\begin{aligned}
(2469.0-\omega_{0j}^2)\cdot 1-1234.6\cdot 1.91899=0 &\quad\rightarrow\quad \omega_{0j}^2=50.01,\\
(2469.0-\omega_{0k}^2)\cdot 1-1234.6\cdot(-1.68251)=0 &\quad\rightarrow\quad \omega_{0k}^2=2273,\\
(2469.0-\omega_{0l}^2)\cdot 1-1234.6\cdot(-0.83083)=0 &\quad\rightarrow\quad \omega_{0l}^2=1747,\\
(2469.0-\omega_{0m}^2)\cdot 1-1234.6\cdot 0.28463=0 &\quad\rightarrow\quad \omega_{0m}^2=1059,\\
(2469.0-\omega_{0n}^2)\cdot 1-1234.6\cdot 1.30972=0 &\quad\rightarrow\quad \omega_{0n}^2=426.1.
\end{aligned} \tag{3.157}$$

A sorrendből látszik, hogy

$$\boxed{j=1,\qquad k=5,\qquad l=4,\qquad m=3,\qquad n=2} \tag{3.158}$$

A sajátkörfrekvenciák pedig a sajátvektorok megadott sorrendjében:

$$\boxed{\begin{aligned}
\omega_{01}=7.0717,\qquad &\omega_{05}=47.6776, \qquad \omega_{04}=41.8022,\\
&\omega_{03}=32.5403, \qquad \omega_{02}=20.6421.
\end{aligned}} \tag{3.159}$$

3.2.2.7. A szabadrezgés általános megoldása

Ahogy láttuk, a (3.67) alakjában keresett megoldásra a szabadságfokok N számával megegyező számú sajátkörfrekvenciát és sajátvektort kaptunk. Emiatt a megoldást ezen megoldások lineáris kombinációjaként keressük:

$$\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^{N} h_j(t)\underline{v}_j, \tag{3.160}$$

ahol $h_j(t)$ az ω_{0j} sajátkörfrekvenciájú harmonikus függvény, másképpen a j-edik *modális koordináta*. A harmonikus függvényt az általános alakkal behelyettesítve:

$$\boxed{\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j \left(a_j \cos(\omega_{0j}t) + b_j \sin(\omega_{0j}t)\right)}, \tag{3.161}$$

ahol az a_j, b_j paramétereket a kezdeti feltételek függvényében kell meghatározni.

A (3.160) szerinti összegzés kompakt felírásához vezessük be a $\underline{\underline{V}}$ *modálmátrix*ot, vagy *modális mátrix*ot az alábbiak szerint:

$$\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 & \dots & \underline{v}_N \end{bmatrix}, \tag{3.162}$$

és gyűjtsük a harmonikus függvényeket a $\underline{h}(t) = [h_1(t)h_2(t)h_3(t)\dots h_N(t)]^T$ vektorba. Így a szabadrezgés fenti általános megoldása:

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{V}}\,\underline{h}(t). \tag{3.163}$$

3.2.2.8. A többszabadságfokú rendszer rezgésalakjai

Amennyiben a szabadrezgés kezdeti feltételei olyanok, hogy a (3.161) szerinti megoldásban egy kivételével az összes j értékhez $a_j = b_j = 0$, akkor a megoldás

$$\underline{x}(t) = \underline{v}_k \left(a_k \cos(\omega_{0k}t) + b_k \sin(\omega_{0k}t)\right), \tag{3.164}$$

alakú lesz (a k indexszel jelöljük, hogy ez az egyetlen index, amihez nemzérus a_k vagy b_k tartozik.

Ez a megoldás egy harmonikus rezgést eredményez ω_{0k} sajátkörfrekvenciával, melynek során a szabadságfokok kitéréseinek arányai végig a $\underline{v}_k$ sajátvektor által meghatározott arányokkal lesznek egyenlők. Azt mondhatjuk tehát, hogy megfelelő kezdeti feltételek esetén a $\underline{v}_k$ sajátvektor megadja a rezgés alakját. Emiatt a sajátvektorokat *rezgésalak*nak is hívják. Amikor egy rezgésalak szerint rezeg a rendszer, akkor azt egy *rezgésmód*nak nevezzük. A rezgésmód elnevezés áll a korábban bevezetett $\underline{\underline{V}}$ modálmátrix elnevezésének a hátterében is.

3.2.2.9. A sajátvektorok tulajdonságai

Vezessünk le három tulajdonságot, amiket a sajátvektorok tömegmátrixra normáltságával együtt a továbbiakban gyakran felhasználunk majd.

A tömegmátrixra normáltság következménye Legyen $\underline{v}_j$ egy tömegmátrixra normált sajátvektor, ami tehát az ω_{0j} sajátkörfrekvenciával együtt kielégíti a (3.71) általánosított sajátértékfeladatot, azaz:

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j = \omega_{0j}^2 \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j. \tag{3.165}$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát balról a $\underline{v}_j^T$ vektorral (az ω_{0j}^2 szorzótényező skalár, így annak és a vektornak a sorrendje szabadon felcserélhető):

$$\underline{v}_j^T \underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j = \omega_{0j}^2 \underline{v}_j^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j. \tag{3.166}$$

A tömegmátrixra normáltság miatt a $\underline{v}_j^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j$ szorzat értéke 1, így azt kapjuk, hogy

$$\boxed{\underline{v}_j^T \underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j = \omega_{0j}^2}. \tag{3.167}$$

Ezt a tulajdonságot felhasználhattuk volna 3.2.4. példa megoldásakor, bár lényegesen nagyobb számítási igénnyel járt volna a vektor-mátrix-vektor-szorzat előállítása, mint az egyenlet megoldása, amit ott csináltunk.

Sajátvektorok ortogonalitása a tömegmátrixra Legyen $\underline{v}_j$ és $\underline{v}_k$ egy-egy tömegmátrixra normált sajátvektor, amik az $\omega_{0j} \neq \omega_{0k}$ sajátkörfrekvenciákkal együtt rendre kielégítik a (3.71) általánosított sajátértékfeladatot, azaz:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j &= \omega_{0j}^2 \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j, \\ \underline{\underline{K}}\,\underline{v}_k &= \omega_{0k}^2 \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_k. \end{aligned} \tag{3.168}$$

Szorozzuk be az első egyenlet mindkét oldalát balról a $\underline{v}_k^T$ vektorral, a második egyenlet mindkét oldalát balról a $\underline{v}_j^T$ vektorral:

$$\begin{aligned} \underline{v}_k^T \underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j &= \omega_{0j}^2 \underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j, \\ \underline{v}_j^T \underline{\underline{K}}\,\underline{v}_k &= \omega_{0k}^2 \underline{v}_j^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_k. \end{aligned} \tag{3.169}$$

A $\underline{v}_j^T \underline{\underline{K}}\,\underline{v}_k$ és a $\underline{v}_j^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_k$ szorzatok skalárok, és a skalárok (1×1-es mátrixként) megegyeznek a saját transzponáltjukkal. Ezt felírva is kifejtve a szorzatot[13] valamint felhasználva, hogy a mátrixok szimmetrikusak, a vektor transzponáltjának transzponáltja pedig maga a vektor:

$$\underline{v}_j^T \underline{\underline{K}}\,\underline{v}_k = (\underline{v}_j^T \underline{\underline{K}}\,\underline{v}_k)^T = \underline{v}_k^T \underline{\underline{K}}^T (\underline{v}_j^T)^T = \underline{v}_k^T \underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j. \tag{3.170}$$

$$\underline{v}_j^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_k = (\underline{v}_j^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_k)^T = \underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}^T (\underline{v}_j^T)^T = \underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j. \tag{3.171}$$

Helyettesítsük be ezt a két összefüggést (3.169) második egyenletébe:

$$\begin{aligned} \underline{v}_k^T \underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j &= \omega_{0j}^2 \underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j, \\ \underline{v}_k^T \underline{\underline{K}}\,\underline{v}_j &= \omega_{0k}^2 \underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j. \end{aligned} \tag{3.172}$$

Vonjuk ki a két egyenletet egymásból és emeljük ki a jobb oldalon $\underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j$-t:

$$0 = \left(\omega_{0j}^2 - \omega_{0k}^2\right) \underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j. \tag{3.173}$$

Mive a kezdeti feltételezésünk szerint $\omega_{0j} \neq \omega_{0k}$, ezért a zárójelben levő tag nem zérus, tehát az azt szorzó skalárnak kell nullának lennie:

$$\boxed{\underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j = 0}. \tag{3.174}$$

A sajátvektorok ezen tulajdonságát (különböző sajátkörfrekvenciákhoz tartozó sajátvektorok tömegmátrixszal képzett hármas szorzata zérus) úgy hívjuk, hogy a *sajátvektorok páronként ortogonálisak a tömegmátrixra.*

[13]Szorzat transzponáltja a transzponáltak fordított sorrendben felírt szorzata.

Sajátvektorok ortogonalitása a merevségi mátrixra Legyen $\underline{v}_j$ és $\underline{v}_k$ egy-egy tömegmátrixra normált sajátvektor, amik az $\omega_{0j} \neq \omega_{0k}$ sajátkörfrekvenciákkal együtt rendre kielégítik a (3.71) általánosított sajátértékfeladatot. Ebből most is következik a (3.169) két egyenlete, utána pedig a skalár tagok szimmetriájának behelyettesítése után az alábbi két egyenlet:

$$\begin{aligned} \underline{v}_k^T \underline{\underline{K}} \underline{v}_j &= \omega_{0j}^2 \underline{v}_k^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_j, \\ \underline{v}_k^T \underline{\underline{K}} \underline{v}_j &= \omega_{0k}^2 \underline{v}_k^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_j. \end{aligned} \tag{3.175}$$

Vonjuk ki az első egyenlet ω_{0k}^2-szereséből a második egyenlet ω_{0j}^2-szeresét, és emeljük ki a bal oldalon $\underline{v}_k^T \underline{\underline{K}} \underline{v}_j$-t:

$$\left(\omega_{0k}^2 - \omega_{0j}^2\right) \underline{v}_k^T \underline{\underline{K}} \underline{v}_j = 0. \tag{3.176}$$

Mive a kezdeti feltételezésünk szerint $\omega_{0j} \neq \omega_{0k}$, ezért a zárójelben levő tag nem zérus, tehát az azt szorzó skalárnak kell nullának lennie:

$$\boxed{\underline{v}_k^T \underline{\underline{K}} \underline{v}_j = 0}. \tag{3.177}$$

A sajátvektorok ezen tulajdonságát (különböző sajátkörfrekvenciákhoz tartozó sajátvektorok merevségi mátrixszal képzett hármas szorzata zérus) úgy hívjuk, hogy a *sajátvektorok páronként ortogonálisak a merevségi mátrixra.*

Megjegyezzük, hogy a két ortogonalitási tulajdonság a (3.169) egyenletből kiolvashatóan összefügg. A második bizonyítást annak a képletnek és az első ortogonalitásnak a segítségével is lehetett volna bizonyítani, az itt bemutatott módon viszont egymástól függetlenül is bizonyíthatók.

Sajátvektorok tulajdonságai tömören A (3.162) egyenlettel bevezetett $\underline{\underline{V}}$ modális mátrix segítségével a sajátvektorok fenti tulajdonságait kompakt módon is kifejezhetjük. Ehhez emlékeztetünk arra, hogy mátrisszorzat esetén a szorzat egy jk eleme mindig az első mátrix j-edik sorának, az összes közbenső mátrixnak és az utolsó mátrix k-adik oszlopának a szorzataként adódik. A $\underline{\underline{V}}$ mátrix transzponáltjában az egyes tömegmátrixra normált sajátvektorok transzponáltjai szerepelnek az egyes sorokban.

A $\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{M}}\underline{\underline{V}}$ mátrixszorzat jk eleme a $\underline{v}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_k$ skalár lesz. A főátlón kívül $j \neq k$, így a szorzat a tömegmátrixra való ortogonalitás miatt nulla lesz, vagyis a mátrixszorzat eredménye diagonálmátrix lesz. A főátlóban $j = k$, így a jj elem értéke $\underline{v}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_j$, ami a tömegmátrixra normált sajátvektorok miatt 1. A $\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{M}}\underline{\underline{V}}$ mátrixszorzat tehát egy $\underline{\underline{I}}$ egységmátrix lesz.

A $\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}\underline{\underline{V}}$ mátrixszorzat jk eleme a $\underline{v}_j^T \underline{\underline{K}} \underline{v}_k$ skalár lesz. A főátlón kívül $j \neq k$, így a szorzat a merevségi mátrixra való ortogonalitás miatt nulla lesz, vagyis a mátrixszorzat eredménye diagonálmátrix lesz. A főátlóban $j = k$, így a jj elem értéke $\underline{v}_j^T \underline{\underline{K}} \underline{v}_j$, ami a tömegmátrixra normált sajátvektorok miatt ω_{0j}^2. A $\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}\underline{\underline{V}}$ mátrixszorzat tehát egy olyan diagonálmátrix lesz, aminek a főátlójában a sajátkörfrekvenciák négyzetei vannak. Vezessük be a *spektrálmátrix*ot, ami egy olyan diagonálmátrix, aminek a főátlójában a sajátkörfrekvenciák vannak:

$$\underline{\underline{\Omega}} = \langle \omega_{01} \omega_{02} \dots \omega_{0N} \rangle \tag{3.178}$$

A fentiek szerint a $\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{K}}\underline{\underline{V}}$ szorzat ennek a mátrixnak a négyzete[14].

A két mátrixszorzattal a sajátvektorok tulajdonságait úgy is írhatjuk röviden, hogy:

$$\boxed{\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{M}}\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{I}}, \qquad \underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{K}}\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{\Omega}}^2} \tag{3.179}$$

3.2.3. Kezdeti feltételek kielégítése

3.2.3.1. Kezdeti feltételek

Ahogy az alfejezet elején mondtuk, a (3.65) differenciálegyenletnek olyan megoldását keressük, ami kielégíti a (3.66) kezdeti feltételeket, azaz[15]

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0, \qquad \dot{\underline{x}}(t_0) = \underline{v}_0. \tag{3.180}$$

A differenciálegyenlet általános megoldásának (3.161) ismeretében ez az alábbi egyenletrendszer megoldását jelenti az a_j, b_j paraméterekre:

$$\begin{aligned} \underline{x}_0 &= \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j \left(a_j \cos(\omega_{0j}t_0) + b_j \sin(\omega_{0j}t_0)\right), \\ \underline{v}_0 &= \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j \left(-a_j\omega_{0j} \sin(\omega_{0j}t_0) + b_j\omega_{0j} \cos(\omega_{0j}t_0)\right). \end{aligned} \tag{3.181}$$

3.2.3.2. Paraméterek meghatározása a szabadságfokok elmozdulásából és sebességéből

A kezdeti feltételek (3.181) egyenlete általános esetben $2N$ lineáris egyenletet jelent a $2N$ paraméter meghatározására. Tartószerkezetek esetén ennek az egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, de nagyszámú szabadságfok esetén a számítás hosszadalmas.

Csökkenthető az egyenletrendszer mérete és így a számítási igény, ha a kezdeti feltételeket speciális módon, a $t_0 = 0$ pillanatban vesszük fel. Ekkor az egyenletrendszerben a $\sin(0) = 0$ és $\cos(0) = 1$ behelyettesítéseket elvégezve, egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy:

$$\underline{x}_0 = \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j \cdot a_j, \qquad \underline{v}_0 = \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j \cdot b_j\omega_{0j}. \tag{3.182}$$

Az a_j és a b_j paraméterekre vonatkozó egyenletek tehát ilyenkor szétesnek, és két N egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kell megoldani külön-külön. Gauss-eliminációval egy egyenletrendszer megoldása N^3 nagyságrendű számítási igénnyel rendelkezik, tehát elmondható, hogy a $t_0 = 0$ kiválasztásával a megoldás lényegesen gyorsabban elvégezhető.

Az egyenletrendszerek szétesését a (2.76) képlethez hasonló módon kihasználhatjuk többszabadságfokú rendszereknél is, ha a 3.161 egyenletben a t_0-val

[14] Diagonálmátrix esetén a mátrix négyzete a főátlóelemek négyzetéből álló diagonálmátrix lesz.

[15] Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a $\underline{v}_0$ szimbólum a szabadságfokok kezdeti sebességeinek a vektora, nem pedig a nulladik sajátvektor.

eltolt időskálát használjuk, azaz az általános megoldást az

$$\boxed{\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j \left(a_j \cos(\omega_{0j}(t - t_0)) + b_j \sin(\omega_{0j}(t - t_0))\right)}, \tag{3.183}$$

alakban írjuk fel. Ekkor a kezdeti feltételek behelyettesítésénél a $\sin 0 = 0$ és $\cos 0 = 0$ egyszerűsítésekkel élhetünk, ami után a paramétereket a (3.182) két egyenletrendszeréből tudjuk kiszámolni.

3.2.3.3. Paraméterek meghatározása rezgésmódonként

A (3.161) általános megoldás a_j és b_j paraméterei csak a j-edik rezgésalakhoz kapcsolódnak. A rezgésalakok bemutatott tulajdonságai miatt a paramétereket rezgésalakonként is meg lehet határozni az alábbiak szerint. Szorozzuk be kezdeti feltételek (3.181) szerinti egyenletrendszerének mindkét oldalát balról a $\underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}$ vektor-mátrix-szorzattal:

$$\begin{aligned}
\underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{x}_0 &= \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j \left(a_j \cos(\omega_{0j} t_0) + b_j \sin(\omega_{0j} t_0)\right), \\
\underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_0 &= \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j \left(-a_j \omega_{0j} \sin(\omega_{0j} t_0) + b_j \omega_{0j} \cos(\omega_{0j} t_0)\right).
\end{aligned} \tag{3.184}$$

A kapott jobb oldali összegzésekben a $\underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_j$ szorzatok értéke $k \neq j$ esetén zérus lesz, hiszen a sajátvektorok a tömegmátrixra ortogonálisak, ezért egyedül a $j = k$ esetben lehet az összegzendő tag zérustól különböző:

$$\begin{aligned}
\underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{x}_0 &= \underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_k \left(a_k \cos(\omega_{0k} t_0) + b_k \sin(\omega_{0k} t_0)\right), \\
\underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_0 &= \underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_k \left(-a_k \omega_{0k} \sin(\omega_{0k} t_0) + b_k \omega_{0k} \cos(\omega_{0k} t_0)\right).
\end{aligned} \tag{3.185}$$

Ráadásul, a sajátvektorok tömegmátrixra normáltsága miatt $\underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_k = 1$, így a k-adik rezgésalak két paraméterét az alábbi egyenletrendszerből számolhatjuk:

$$\begin{aligned}
\underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{x}_0 &= a_k \cos(\omega_{0k} t_0) + b_k \sin(\omega_{0k} t_0), \\
\underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_0 &= -a_k \omega_{0k} \sin(\omega_{0k} t_0) + b_k \omega_{0k} \cos(\omega_{0k} t_0),
\end{aligned} \tag{3.186}$$

azaz rezgésalakonként kell egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert megoldani.

A kezdeti feltételek speciális, $t_0 = 0$ felvételével az a_k és b_k paraméterek egyenletei most is szétesnek a $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ behelyettesítéssel, így már külön-külön, egy-egy egyismeretlenes egyenletből lehet számítani azokat:

$$\underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{x}_0 = a_k, \qquad \underline{v}_k^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_0 = b_k \omega_{0k}. \tag{3.187}$$

Ezeket felhasználva az $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$, $\dot{\underline{x}}(0) = \underline{v}_0$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldás

$$\boxed{\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j \left(\underline{v}_j^T \underline{\underline{M}}\,\underline{x}_0 \cos(\omega_{0j} t) + \frac{\underline{v}_j^T \underline{\underline{M}}\,\underline{v}_0}{\omega_{0j}} \sin(\omega_{0j} t)\right)}. \tag{3.188}$$

Itt is megjegyezzük, hogy a $t_0 \neq 0$ esetre megadott kezdeti feltételek esetében is használható az időskála eltolása a paraméterek meghatározására, a részletek bemutatása nélkül az elmozdulásfüggvény ekkor

$$\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j \left(\underline{v}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{x}_0 \cos(\omega_{0j}(t - t_0)) + \frac{\underline{v}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_0}{\omega_{0j}} \sin(\omega_{0j}(t - t_0)) \right). \quad (3.189)$$

3.2.5. Példa (Többszintes épület szabadrezgése)**.** *Határozzuk meg a 3.2.4. példában látott ötszintes szerkezet szabadságfokainak kitérését az idő függvényében, ha az összes szintet azonos mértékben* 5*cm-rel kitérítve zérus kezdősebességgel magára hagyjuk a rendszert.*

Megoldás
A 3.14.a) ábrán a kezdeti kitérített alakban ábrázoltuk a szerkezetet. Emlékeztetőül a sajátkörfrekvenciák:

$$\begin{aligned} \omega_{01} = 7.0717, \qquad \omega_{02} &= 20.6421. \qquad \omega_{03} = 32.5403, \\ \omega_{04} &= 41.8022, \qquad \omega_{05} = 47.6776, \end{aligned} \quad (3.190)$$

és a tömegmátrixra normált sajátvektorok:

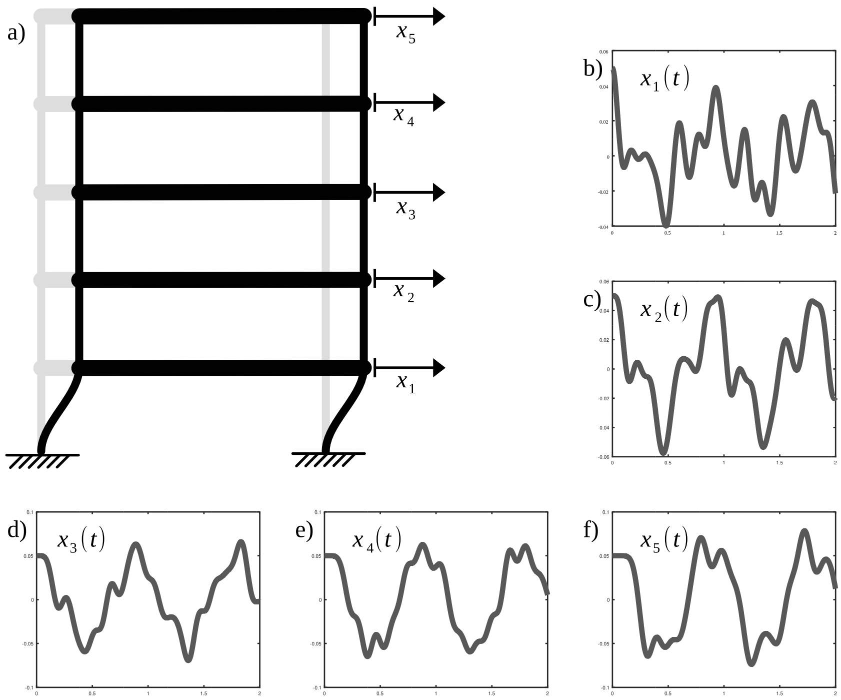
$$\begin{aligned} \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.1201 \\ 0.2305 \\ 0.3223 \\ 0.3879 \\ 0.4221 \end{bmatrix},, \qquad \underline{v}_2 &= \begin{bmatrix} 0.3223 \\ 0.4221 \\ 0.2305 \\ -0.1201 \\ -0.3879 \end{bmatrix}., \qquad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.4221 \\ 0.1201 \\ -0.3879 \\ -0.2305 \\ 0.3223 \end{bmatrix}, \\ \underline{v}_4 &= \begin{bmatrix} 0.3879 \\ -0.3223 \\ -0.1201 \\ 0.4221 \\ -0.2305 \end{bmatrix},, \qquad \underline{v}_5 = \begin{bmatrix} 0.2305 \\ -0.3879 \\ 0.4221 \\ -0.3223 \\ 0.1201 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.191)$$

A kezdeti kitérített alaknak az

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix} \quad (3.192)$$

vektor felel meg, a zérus kezdősebességek miatt $\underline{v}_0 = \underline{0}$. A (3.187) képletbe behelyettesítve a rezgésalakok b_k paraméterei 0-k lesznek, az a_k paraméterek pedig:

$$\begin{aligned} a_1 = \underline{v}_1^T \underline{\underline{M}} \underline{x}_0 = 0.1482844, \qquad a_2 &= \underline{v}_2^T \underline{\underline{M}} \underline{x}_0 = 0.0466844, \\ a_3 = \underline{v}_3^T \underline{\underline{M}} \underline{x}_0 = 0.0246047, \qquad a_4 &= \underline{v}_4^T \underline{\underline{M}} \underline{x}_0 = 0.0137016, \\ a_5 &= \underline{v}_5^T \underline{\underline{M}} \underline{x}_0 = 0.0062601. \end{aligned} \quad (3.193)$$



3.14. ábra. a) A kezdeti kitérített alak. b-f) Az egyes szabadságfokok kitérése az idő függvényében.

Összegezve az elmozdulásfüggvény:

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) = 0.1482844\underline{v}_1 \cos(7.0717t) + 0.0466844\underline{v}_2 \cos(20.6421t)+ \\ 0.0246047\underline{v}_3 \cos(32.5403t) + 0.0137016\underline{v}_4 \cos(41.8022t)+ \\ 0.0062601\underline{v}_5 \cos(47.6776t)\end{aligned} \tag{3.194}$$

Az eredmény tehát mindegyik szabadságfok esetén öt harmonikus függvény összege, de az egyes szabadságfokok esetén a sajátvektorok miatt eltérő együtthatókkal, így a szabadságfokok mozgása sem lesz azonos, ahogy a 3.14.b)-f) ábrákon látható.

3.2.4. Igénybevételek számítása szabadrezgés közben

Ahogy láttuk, a többszabadságfokú szerkezet elmozdulásai a szabadrezgés során a (3.163) egyenlettel írhatók fel:

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{V}}\,\underline{h}(t), \tag{3.195}$$

ahol $\underline{\underline{V}}$ a modálmátrix, $\underline{h}(t)$ a modális koordináták vektora. Az igénybevételek számításához két lehetőséget mutatunk be.

A *speciális eset* a tömeg-rugó-rendszer (és az olyan diszkrét rendszer, aminél a merevségi mátrix kompilálható), amikor egy A jelű rugóelemnek az alakváltozását, illetve annak a szabadságfokok elmozdulásaitól függését a szerkezet topológiájából ki lehet olvasni, így felírható egy olyan $\underline{t}_A$ vektor, amivel

$$\Delta u_A(t) = \underline{t}_A^T \underline{x}(t) = \underline{t}_A^T \underline{\underline{V}}\, \underline{h}(t). \tag{3.196}$$

Az elemben ébredő rugóerő pedig az idő függvényében:

$$f_{rA}(t) = k_A \underline{t}_A^T \underline{\underline{V}}\, \underline{h}(t). \tag{3.197}$$

A $\underline{t}_A^T \underline{\underline{V}}$ szorzat egy olyan sorvektor, amiben a j-edik elem az A rugó alakváltozását tartalmazza a $\underline{v}_j$ elmozdulások esetén, azaz a j-edik rezgésalakban. Vezessük be ennek a mennyiségnek a megnevezésére a *modális megnyúlást*:

$$\Delta u_{Aj} = \underline{t}_A^T \underline{v}_j, \tag{3.198}$$

Így a rugó teljes megnyúlását írhatjuk

$$\Delta u_A(t) = \sum_{j=1}^{N} \Delta u_{Aj} h_j(t) \tag{3.199}$$

alakban, az elemben ébredő erőt pedig

$$f_{rA}(t) = k_A \sum_{j=1}^{N} \Delta u_{Aj} h_j(t) = \sum_{j=1}^{N} k_A \Delta u_{Aj} h_j(t) \tag{3.200}$$

alakban. Végül, a $k_A \Delta u_{Aj}$ szorzat a j-edik rezgésalak hatására a rugóban ébredő erő, így ezt elnevezhetjük az A rugó j-edik modális rugóerőjének, amit f_{rAj}-vel jelölve, a rugóerőt az idő függvényében úgy írhatjuk, hogy:

$$f_{rA}(t) = \sum_{j=1}^{N} f_{rAj} h_j(t) = \sum_{j=1}^{N} f_{rAj} \left(a_j \cos(\omega_{0j} t) + b_j \sin(\omega_{0j} t) \right). \tag{3.201}$$

A rugóerő maximuma az f_{rAj} modális rugóerők mellett az egyes harmonikus tagok amplitúdójától és egymáshoz képesti fázisaitól függ. Felső becslést akkor adhatunk rá, ha feltételezzük, hogymindegyik h_j függvény ugyanabban a pillanatban veszi fel az olyan előjelű szélsőértékét, ami az f_{rAj}-vel szorozva pozitív lesz. A különböző frekvenciák és fázisok miatt ez nem biztos, hogy előfordulhat, ezért ez csak egy elméleti maximum:

$$f_{rA}(t) \leq f_{rA}^{max} = \sum_{j=1}^{N} \left| f_{rAj} \sqrt{a_j^2 + b_j^2} \right|. \tag{3.202}$$

Rezgésről lévén szó, ugyanez negatív előjellel a rugóerő minimumát adja.

Az *általános eset*ben a diszkretizált rendszerben nem lehet kiolvasni a rendszer topológiájából az alakváltozásokat, ráadásul nem is csak egy-egy szabadságfokot összekötő elem alakváltozását kereshetjük, hanem a folytonos szerkezet tetszőleges S keresztmetszetének C igénybevételét, amit $C_S(t)$-sel jelölünk. Ilyenkor abból kell kiindulnunk, hogy már meg tudjuk határozni azt a statikus erőrendszert, ami ugyanakkora elmozdulásokat okoz, mint az $\underline{x}(t)$ elmozdulásvektor. A merevségi mátrix fizikai jelentése alapján az

$$\underline{f}_{st}(t) = \underline{\underline{K}}\, \underline{x}(t) \tag{3.203}$$

vektor elemeit statikusan működtetve a szabadságfokokra ugyanazok az elmozdulások és alakváltozások lesznek a szerkezeten, mint az $\underline{x}(t)$ elmozdulásokból, így a reakciókat és igénybevételeket is számolhatjuk ezekből az erőkből statikusan. Az elmozdulások megoldását behelyettesítve a szerkezet igénybevételeinek számításához az

$$\underline{f}_{st}(t) = \underline{\underline{K}} \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j h_j(t) = \sum_{j=1}^{N} \underline{\underline{K}} \underline{v}_j h_j(t) \tag{3.204}$$

vektor elemeit kell működtetni a szabadságfokokra és abból a keresett igénybevételeket számolni. A képlet szerint az

$$\underline{f}_{st,j} = \underline{\underline{K}} \underline{v}_j \tag{3.205}$$

erőrendszerek $h_j(t)$ kombinációit kell működtetni és abból a C_S igénybevételt számolni. A szuperpozíció elve alapján ez megyezik a $\underline{\underline{K}} \underline{v}_j$ erőrendszerekből külön-külön számolt C_{Sj} *modális igénybevételek*:

$$C_{Sj}(\underline{\underline{K}} \underline{v}_j) \tag{3.206}$$

$h_j(t)$ kombinációjával:

$$C_S(t) = \sum_{j=1}^{N} C_{Sj} h_j(t) \tag{3.207}$$

A modális igénybevételeket a $\underline{\underline{K}} \underline{v}_j$ modális erőrendszerből kell számolni, ahol a $\underline{v}_j$ vektor a többszabadságfokú rendszer sajátvektora, így kielégíti a (3.80) egyenletet ($\underline{\underline{K}} \underline{v}_j = \omega_{0j}^2 \underline{\underline{M}} \underline{v}_j$), azaz a C_{Sj} igénybevételt az

$$\underline{f}_{st,j} = \omega_{0j}^2 \underline{\underline{M}} \underline{v}_j \tag{3.208}$$

modális erőrendszerből is számolhatjuk. Diagonál-tömegmátrix esetén a mátrix-vektor szorzás elvégzése az utóbbi esetben lényegesen könnyebb, mint a (3.205) képlettel.

Végezetül itt is jelezzük, hogy a (3.207) szerint számolt igénybevétel maximuma a C_{Sj} együtthatóktól, valamint a rezgésmódok amplitúdójától és fázisától függ. Felső határként az azonos előjelű szélsőértékek egyidejű felléptét kell feltételeznünk, amiből

$$C_S(t) \le C_S^{max} = \sum_{j=1}^{N} \left| C_{Sj} \sqrt{a_j^2 + b_j^2} \right| . \tag{3.209}$$

Rezgésről lévén szó, ugyanez negatív előjellel az igénybevétel minimumát adja.

3.2.5. Rayleigh-hányados

3.2.5.1. Energiák a többszabadságfokú rendszerben

Az $\underline{x}(t)$ elmozdulásfüggvény szerint mozgó többszabadságfokú rendszernek a mozgási (kinetikus) energiáját a

$$K(t) = \frac{1}{2} \underline{\dot{x}}^T(t) \underline{\underline{M}} \underline{\dot{x}}(t), \tag{3.210}$$

míg potenciális (alakváltozási) energiáját az

$$U(t) = \frac{1}{2}\underline{x}^T(t)\underline{\underline{K}}\underline{x}(t), \tag{3.211}$$

képletekkel számolhatjuk, a mechanikai energia pedig e két energia összege:

$$K(t) + U(t). \tag{3.212}$$

Ha az elmozdulásfüggvényt a rezgésalakok modális koordináták szerinti kombinációjaként írjuk fel (lásd (3.163)), akkor a fenti két energia kifejezhető a modális sebességekkel és koordinátákkal:

$$K(t) = \frac{1}{2}\dot{\underline{h}}^T(t)\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{M}}\underline{\underline{V}}\dot{\underline{h}}(t), \qquad U(t) = \frac{1}{2}\underline{h}^T(t)\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{K}}\underline{\underline{V}}\underline{h}(t). \tag{3.213}$$

A sajátvektorok (3.179) szerinti tulajdonságait felhasználva a mátrix-hármasszorzatokból egy-egy diagonálmátrix lesz:

$$K(t) = \frac{1}{2}\dot{\underline{h}}^T(t)\underline{\underline{I}}\dot{\underline{h}}(t), \qquad U(t) = \frac{1}{2}\underline{h}^T(t)\underline{\underline{\Omega}}^2\underline{h}(t), \tag{3.214}$$

Mivel a mátrixok diagonálmátrixok a szorzatokat átírhatjuk egyszerű összegzésekké:

$$K(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\dot{h}_j^2(t), \qquad U(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\omega_{0j}^2 h_j^2(t). \tag{3.215}$$

Szabadrezgés során a csillapítatlan rendszerben csak a belső erők végeznek munkát, amik potenciális erők, így érvényes a *mechanikai energia állandóságának tétele*, így

$$K(t_1) + U(t_1) = K(t_2) + U(t_2) = \text{áll.} \tag{3.216}$$

3.2.5.2. A Rayleigh-hányados

Legyen $\underline{v}$ egy tetszőleges vektor az $\underline{x}$-elmozdulások N-dimenziós terében. Ennek a vektornak a *Rayleigh-hányados*át az alábbi módon definiáljuk:

$$R(\underline{v}) = \frac{\underline{v}^T\underline{\underline{K}}\underline{v}}{\underline{v}^T\underline{\underline{M}}\underline{v}}. \tag{3.217}$$

Könnyű belátni, hogy a Rayleigh hányados ténylegesen a $\underline{v}$ vektor *irányához* tartozik, hiszen a vektor bármilyen α skalárszorosához:

$$R(\alpha\underline{v}) = \frac{\alpha^2\underline{v}^T\underline{\underline{K}}\underline{v}}{\alpha^2\underline{v}^T\underline{\underline{M}}\underline{v}} = \frac{\underline{v}^T\underline{\underline{K}}\underline{v}}{\underline{v}^T\underline{\underline{M}}\underline{v}} = R(\underline{v}). \tag{3.218}$$

Tartószerkezet esetén mind a számláló, mind a nevező pozitív, így a Rayleigh-hányados is mindig pozitív lesz.

3.2.5.3. A Rayleigh-hányados jellemzői

Sajátvektor Rayleigh-hányadosa Tekintsük a $\underline{\underline{K}}$ merevségi mátrixszal és $\underline{\underline{M}}$ tömegmátrixszal rendelkező többszabadságfokú rendszer $\underline{v}_j$ tömegmátrixra normált sajátvektorának a Rayleigh-hányadosát:

$$R(\underline{v}_j) = \frac{\underline{v}_j^T\underline{\underline{K}}\underline{v}_j}{\underline{v}_j^T\underline{\underline{M}}\underline{v}_j}. \tag{3.219}$$

A tömegmátrixra normáltság miatt a nevezőben levő szorzat értéke 1, a számlálóban levő szorzat értéke pedig (3.167) alapján ω_{0j}^2, azaz

$$\boxed{R(\underline{v}_j) = \omega_{0j}^2}. \tag{3.220}$$

Ahogy (3.218)-ben bemutattuk, a Rayleigh-hányados egy irányhoz tartozik, így nem csak a tömegmátrixra normált sajátvektor esetén, hanem *bármely sajátvektor esetén a Rayleigh-hányados értéke megegyezik a sajátvektorhoz tartozó sajátkörfrekvencia négyzetével.*

Rayleigh-hányados alsó határa Egy N-szabadságfokú rendszer sajátvektorai lineárisan függetlenek egymástól, így bármely $\underline{v}$ vektor egyértelműen felírható a sajátvektorok lineáris kombinációjaként. Az egyes sajátvektorok együtthatóját y_j-vel jelölve, vagy bevezetve ezen együtthatókra az $\underline{y}$ vektort:

$$\underline{v} = \sum_{j=1}^{N} y_j \underline{v}_j = \underline{\underline{V}}\,\underline{y}. \tag{3.221}$$

Ha ezt behelyettesítjük a Rayleigh-hányados (3.217) definíciójába:

$$R(\underline{v}(\underline{y})) = \frac{\underline{y}^T \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{y}}{\underline{y}^T \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{y}}, \tag{3.222}$$

akkor a sajátvektorok tulajdonságai (lásd (3.179)) alapján egyszerűsíthetjük mind a számlálót, mind a nevezőt:

$$R(\underline{y}) = \frac{\underline{y}^T \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{y}}{\underline{y}^T \underline{\underline{I}}\,\underline{y}}. \tag{3.223}$$

A diagonálmátrixoknak köszönhetően a szorzatok egy-egy összeggé egyszerűsödnek:

$$R(\underline{y}) = \frac{\sum_{j=1}^{N} \omega_{0j}^2 y_j^2}{y_j^2} = \frac{\omega_{01}^2 y_1^2 + \omega_{02}^2 y_2^2 + \ldots + \omega_{0N}^2 y_N^2}{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_N^2}. \tag{3.224}$$

A számláló és ezzel a hányados értékét változatlanul hagyva adjuk hozzá a számlálóhoz az $\omega_{01}^2 y_k^2 - \omega_{01}^2 y_k^2 = 0$ értékeket a $k = 2, \ldots, N$ indexekkel:

$$R(\underline{y}) = \frac{\omega_{01}^2 y_1^2 + \omega_{02}^2 y_2^2 + \ldots + \omega_{0N}^2 y_N^2 + \omega_{01}^2 y_2^2 - \omega_{01}^2 y_2^2 + \ldots + \omega_{01}^2 y_N^2 - \omega_{01}^2 y_N^2}{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_N^2}. \tag{3.225}$$

A kibővített számlálóban emeljük ki az ω_{01}^2 pozitív együtthatóit, a többi tagnál pedig az y_k^2-ek együtthatóit:

$$R(\underline{y}) = \frac{\omega_{01}^2 \left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_N^2\right) + (\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2) y_2^2 + \ldots + (\omega_{0N}^2 - \omega_{01}^2) y_N^2}{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_N^2}. \tag{3.226}$$

A számláló első tagja leosztva a nevezővel ω_{01}^2-et ad. Az összes többi tag esetében a pozitív $\omega_{0k}^2 - \omega_{01}^2$ különbséget (a sajátkörfrekvenciákat úgy rendeztük sorba, hogy ω_{01} legyen a legkisebb, lásd (3.76)) szorozzuk a nemnegatív y_k^2-tel, majd osztjuk a pozitív nevezővel. Az utóbbi tagok összege tehát nemnegatív mennyiség lesz: ha a $\underline{v}$ vektor párhuzamos az első sajátvektorral, akkor nulla, minden más esetben valamilyen pozitív szám. A Rayleigh-hányados tehát az ω_{01}^2 és egy nemnegatív szám összegeként mindig nagyobb, vagy egyenlő lesz, mint az első sajátkörfrekvencia négyzete:

$$\boxed{R(\underline{v}) \geq \omega_{01}^2.} \tag{3.227}$$

Rayleigh-hányados felső határa A Rayleigh-hányados számítására szolgáló (3.224) képletet most módosítsuk úgy, hogy adjuk hozzá a számlálóhoz az $\omega_{0N}^2 y_k^2 - \omega_{0N}^2 y_k^2 = 0$ értékeket a $k = 1, \ldots, N-1$ indexekkel (ezzel a számláló és így a hányados értékét most sem módosítottuk):

$$R(\underline{y}) = \frac{\omega_{01}^2 y_1^2 + \omega_{02}^2 y_2^2 + \ldots + \omega_{0N}^2 y_N^2 + \omega_{0N}^2 y_1^2 - \omega_{0N}^2 y_1^2 + \ldots + \omega_{0N}^2 y_{N-1}^2 - \omega_{0N}^2 y_{N-1}^2}{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_N^2}. \tag{3.228}$$

A kibővített számlálóban emeljük ki az ω_{0N}^2 pozitív együtthatóit, a többi tagnál pedig az y_k^2-ek együtthatóit:

$$R(\underline{y}) = \frac{\omega_{0N}^2 \left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_N^2\right) + (\omega_{01}^2 - \omega_{0N}^2) y_1^2 + \ldots + (\omega_{0N-1}^2 - \omega_{0N}^2) y_{N-1}^2}{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_N^2}. \tag{3.229}$$

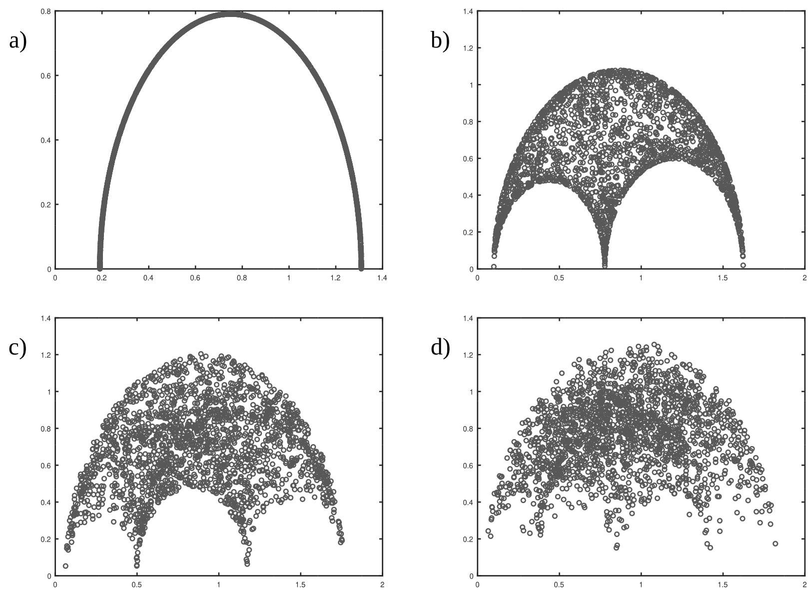
A számláló első tagja leosztva a nevezővel ω_{0N}^2-et ad. Az összes többi tag esetében a negatív $\omega_{0k}^2 - \omega_{0N}^2$ különbséget (a sajátkörfrekvenciákat úgy rendeztük sorba, hogy ω_{0N} legyen a legnagyobb, lásd (3.76)) szorozzuk a nemnegatív y_k^2-tel, majd osztjuk a pozitív nevezővel. Az utóbbi tagok összege biztosan nempozitív mennyiség lesz: ha a $\underline{v}$ vektor párhuzamos az utolsó sajátvektorral, akkor nulla, minden más esetben valamilyen negatív szám. A Rayleigh-hányados tehát az ω_{0N}^2 és egy nempozitív szám összegeként mindig kisebb, vagy egyenlő lesz, mint az utolsó sajátkörfrekvencia négyzete:

$$\boxed{R(\underline{v}) \leq \omega_{0N}^2.} \tag{3.230}$$

3.2.5.4. A Rayleigh-hányados használata, az első sajátkörfrekvencia becslése

A Rayleigh-hányados elsődleges használata az első sajátkörfrekvencia meghatározására szolgál. A gerjesztett rezgéseknél látni fogjuk majd, hogy a többszabadságfokú rendszereknél a magasabb (nagyobb sajátkörfrekvenciához tartozó) rezgésalakok szerepe általában kisebb, míg az alacsonyabb (kisebb sajátkörfrekvenciához tartozó) rezgésalakok szerepe nagyobb: ezek közül az első rezgésalak és a hozzá tartozó sajátkörfrekvencia a legfontosabb, egy közelítő számítás során akár egyedüliként használható. Ugyanezért lehet az első sajátkörfrekvencia számítására az ún. összegzési tételeket használni. Ezen tételek bizonyítása is történhet a Rayleigh-hányados segítségével.

Az első sajátrezgésalak közelítő felvételével a hozzá tartozó Rayleigh-hányados az első sajátkörfrekvencia négyzetének egy felső becslése lesz. Minél jobban



3.15. ábra. Általánosított Mohr-körök különböző dimenziókban, 2000 véletlen pont alapján. a) $N = 2$, b) $N = 3$, c) $N = 4$, d) $N = 5$.

hasonlít a becsült alak a tényleges első rezgésalakra, annál jobb közelítését kapjuk a sajátkörfrekvencia négyzetének. Ez különösen pontos megoldást eredményezhet, ha a diszkrét szerkezet megfelel egy olyan folytonos szerkezet diszkrét modelljének, aminek függvényszerűen ismerjük a rezgésalakját. Ilyenkor a folytonos rezgésalaknak a szabadságfokok helyén vett elmozdulásértékeit használva a kapott alak a diszkrét rendszer első sajátvektorához közeli alak lesz, így a Rayleigh-hányados egy jó közelítése lesz az első sajátkörfrekvenciának.

Másik, látványos használata a Rayleigh-hányadosnak, ha véletlenszerűen veszünk fel $\underline{v}$ vektorokat az N-dimenziós térben, és azoknak a Rayleigh-hányadosait számoljuk. A kellően sok érték közül természetesen a legkisebb lesz a legjobb közelítése az első sajátkörfrekvenciának és a hozzá tartozó vektor pedig a legjobb közelítése az első rezgésalaknak. Ezt a keresést az teszi látványosabbá, ha a Rayleigh-hányados mellett minden vektorhoz meghatározzuk azt a hibát, amit a (3.72) sajátértékfeladatba behelyettesítve kapnánk az adott vektorral, majd páronként ábrázoljuk az $\big(R(\underline{v}), |\big(\underline{\underline{K}} - R(\underline{v})\underline{\underline{M}}\big)\,\underline{v}|\big)$ pontokat. Ezzel az általánosított sajátértékfeladat általánosított Mohr-körét kapjuk meg (az általánosítás vonatkozik a körre is: a függőleges tengelyt megfelelően kell skálázni azhhoz, hogy valóban kört kapjunk), a 3.15 ábrán mutatunk erre példát 2-, 3-, 4- és 5-dimenziós esetre. Mindegyik esetben 2000 véletlenszerű vektorhoz határoztuk meg a kis körrel jelölt pontokat: míg 2-dimenziós esetben ez már elegendő volt a torzult félkör felrajzolásához, 5-dimenziós esetben még csak közelítőleg vehető ki az eredmény.

Rayleigh-Ritz-módszer A Ritz-módszer esetén a megoldást egy, a tényleges megoldás dimenziójánál esetleg kevesebb vektorból álló bázisban keressük.

Jelölje ezeket a bázisvektorokat $\underline{\varphi}_0, \underline{\varphi}_1, \ldots, \underline{\varphi}_n$, így bármely irányt közelíthetünk úgy, hogy:

$$\underline{v} \approx \underline{\varphi}_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j \underline{\varphi}_j, \tag{3.231}$$

azaz a bázisvektorok terében a c_j paraméterek határozzák meg egyértelműen az irányt. A Rayleigh-Ritz-módszer használata esetén a c_j paraméterek azon kombinációját keressük, amelyik minimalizálja a Rayleigh-hányadost, ami ebben az esetben az alábbi n-változós függvény:

$$R(c_1, \ldots, c_n) = \frac{(\underline{\varphi}_0^T + \sum_{j=1}^{n} c_j \underline{\varphi}_j^T)\underline{\underline{K}}(\underline{\varphi}_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j \underline{\varphi}_j)}{(\underline{\varphi}_0^T + \sum_{j=1}^{n} c_j \underline{\varphi}_j^T)\underline{\underline{M}}(\underline{\varphi}_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j \underline{\varphi}_j)}, \tag{3.232}$$

vagy kettős szummaként írva a szorzatokat:

$$R(c_1, \ldots, c_n) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} c_j c_k \underline{\varphi}_j^T \underline{\underline{K}} \underline{\varphi}_k}{\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} c_j c_k \underline{\varphi}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{\varphi}_k}, \tag{3.233}$$

A minimum feltétele, hogy a változók szerinti parciális deriváltaknak nulláknak kell lenni, így az n paraméterre n egyenletet kapunk:

$$\frac{\partial R(c_1, \ldots, c_n)}{\partial c_l} = 0, \qquad l = 1, \ldots, n \tag{3.234}$$

A kapott egyenletrendszer azonban nemlineáris, ezért több megoldása is van. Ezek a véges megoldások a többi sajátkörfrekvenciához tartozó sajátvektorok közelítései a kiválasztott bázisban. Az első sajátkörfrekvencia közelítéséhez a sajátvektorokhoz tartozó Rayleigh-hányadosokat kell kiszámítani, azok alapján lehet kiválasztani az elsőt.

3.2.6. Egyebek

3.2.6.1. Szabadságfok iránya

Nézzük meg, mi történik a többszabadságfokú rendszer mátrixaival és azok fizikai jelentésével, ha egyik szabadságfok pozitív irányát fordítva vesszük fel (pl. a tömeg-rugó modellen az egyik szabadságfok esetében a balra mutató eltolódást választjuk pozitívnak, vagy a gerenda egyik szabadságfoka esetén a lefelé helyett a felfelé irányt választjuk pozitívnak) Legyen a megfordított szabadságfok a k-jelű.

A szabadságfokokhoz tartozó tömegek az irányváltoztatástól függetlenül azonosak maradnak, így a diagonál $\underline{\underline{M}}$ tömegmátrix nem módosul.

Az $\underline{\underline{F}}$ hajlékonysági mátrix számításánál a k-adik oszlopot a megfordított szabadságfokra ható egységerőből létrejövő elmozdulásokkal töltjük fel. Mivel az erő iránya ellentétes, ezért a fizikai elmozdulása a szabadságfokoknak ellentétes lesz, így a k-adik oszlop összes eleme előjelet vált, kivéve a főátlóban levő tag, hiszen annak az ellenkező irányú elmozdulását a szabadságfok ellenkező irányú pozitív definíciójához kell viszonyítanunk. A mátrix többi oszlopa esetén az egységerő hatására kialakuló fizikai alak változatlan marad, és egyedül a k-adik sorban kell a szabadságfok pozitív definíciójának a változása miatt az előjelet megfordítani. Összegezve tehát a k-adik szabadságfok megfordítása esetén a k-adik oszlopot és a k-adik sort kell beszorozni -1-gyel (a k, k-elemet így kétszer szorozzuk, azaz az változatlan marad).

A $\underline{\underline{K}}$ merevségi mátrixot a hajlékonysági mátrix inverzeként is megkaphatjuk. Az előbb láttuk, hogy a szabadságfok irányának megváltoztatása egy sor és egy oszlop előjelének a megváltoztatásával jár. Ugyanezt kell tenni a merevségi mátrixszal is, tehát a k-adik szabadságfok megfordítása esetén a k-adik oszlopot és a k-adik sort kell beszorozni -1-gyel (a k, k-elemet így kétszer szorozzuk, azaz az változatlan marad). Természetesen ugyanerre jutunk a merevségi mátrix fizikai jelentését végiggondolva. A k-adik oszlopban azok az erők szerepelnek, amiket a szabadságfokokra működtetni kell ahhoz, hogy annak elmozdulása egységnyi, a többi elmozdulása pedig nulla legyen. A szabadságfok megfordítása esetén ez az erőrendszer éppen ellentettje lesz az eredetinek, azaz a k-adik oszlop elemeit -1-gyel kell szorozni, kivéve a k, k-elemet, hiszen ott a pozitív irány megfordult. A merevségi mátrix többi oszlopának számításához ugyanaz a fizikai alak és ugyanazok a fizikai erők tartoznak, de a k-adik szabadságfokra ható erők esetén a pozitív irány fordított, ezért az előjeleket meg kell fordítani abban a sorban.

A szabadságfok módosítása miatt megváltozott merevségi mátrixszal megoldva az általánosított sajátértékfeladatot ugyanazokat a sajátkörfrekvenciákat kapjuk, hiszen azok a többszabadságfokú rendszer által meghatározott rezgésfeladat jellemzői, nem pedig a koordinátarendszeréi.

Ugyancsak változatlanok maradnak a sajátvektorok fizikai alakja, viszont az azonos alakból a k-adik koordinátát fordított előjelszabály szerint számoljuk, így a sajátvektorok k-adik elemei (a $\underline{\underline{V}}$ mátrix k-adik sora) fordított előjelű lesz.

3.2.6.2. Szabadságfokok sorrendje

Két szabadságfok sorrendjének felcserélésekor elsősorban az $\underline{x}$ elmozdulásvektorban cseréljük fel a két elemet, például a k-adikat és az l-ediket. Mivel ugyanazokat a szorzatokat akarjuk kapni a $\underline{\underline{K}}\underline{x}$ képletből, ezért a merevségi mátrix k-adik és l-edik *oszlopát* is fel kell cserélnünk egymással. Az elmozdulások felcserélésével egyidejűleg fel kell cserélnünk az $\underline{\ddot{x}}$ gyorsulásvektorban is a k-adik és az l-edik elemet, és ahhoz, hogy az $\underline{\underline{M}}\underline{\ddot{x}}$ képlet ugyanazt adja, a tömegmátrix k-adik és l-edik *oszlopát* is fel kell cserélnünk egymással. A mátrixokkal felírt egyenletrendszerben az egyenletek sorrendje célszerűen a szabadságfokok sorrendje, ezért a fenti csere esetén ki kell cserélnünk egymással a merevségi mátrix k-adik és l-edik *sorát*, a tömegmátrix k-adik és l-edik *sorát*, és ha van $\underline{q}$ tehervektor, akkor annak is a k-adik és l-edik elemét.

A fizikai rendszer ettől még változatlan marad, így a sajátkörfrekvenciák változatlanok maradnak a cserétől függetlenül, ahogy a fizikai rezgésalakok is, igaz, ezek leírásához a sajátvektorok k-adik és l-edik elemét fel kell cserélni.

3.2.6.3. Azonos nagyságú sajátkörfrekvenciák

A sajátvektorok meghatározásakor és tulajdonságaik bizonyításakor feltételeztük, hogy a sajátkörfrekvenciák egymástól különböznek. Az egybeeső sajátkörfrekvenciák ugyanis azt jelentenék, hogy valamelyik ω_{0j} a (3.73) egyenletnek egy többszörös (például l-szeres) gyöke lenne. Ahhoz, hogy megkülönböztessük őket, és a sajátkörfrekvenciák összes száma megegyezzen a szabadságfokok számával, jelölhetjük ezeket a sajátkörfrekvenciákat $\omega_{0j} = \omega_{0j+1} = \ldots = \omega_{0j+l-1}$-ként is. Ennek következtében a (3.80) egyenlet megoldásai, azaz a sajátvektorok nem egyetlen irányt jelölnének ki (amiből a tömegmátrixra normalizálással választjuk ki a sajátvektort), hanem egy l-dimenziós hipersíkot. Ebben a hipersíkban pontosan l darab lineárisan független sajátvektort tudunk meghatározni, illetve a tömegmátrixra normálni, viszont ezek a sajátvektorok általáos esetben nem teljesítik a sajátvektorok (3.174) és (3.177) szerinti ortogonalitási tulajdonságait. Az ortogonalitási tulajdonságokat továbbra is ki akarjuk használni, ezért ilyen esetben az azonos sajátkörfrekvenciához tartozó különböző sajátvektorokat is úgy határozzuk meg, hogy teljesítsék a tömegmátrixra való páronkénti ortogonalitás feltételét, azaz legyen

$$\underline{v}_{j+k}^T \underline{\underline{M}} \underline{v}_{j+n} = 0, \tag{3.235}$$

ahol $k = 0, \ldots, l-2$ és $n = k+1, \ldots, l-1$. A merevségi mátrixra való ortogonalitás a fenti feltételből már következik, a többi sajátvektor esetén pedig az eltérő sajátkörfrekvenciák miatt teljesül mindkét ortogonalitási feltétel. Az így meghatározott sajátvektorokkal a további számítások már a többszörös gyök hatásától függetlenül végezhetők.

3.3. Többszabadságfokú rendszerek gerjesztett rezgése

Ahogy azt a 3.2. fejezet bevezetőjében már említettük, a többszabadságfokú rendszer (3.13) szerinti

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t) = \underline{q}(t) \tag{3.236}$$

mátrix-differenciálegyenletének általános megoldását a kiegészítő egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként keressük:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0(t) + \underline{x}_g(t), \tag{3.237}$$

ahol $\underline{x}_0(t)$ a szabadrezgés általános megoldásával (3.161) egyezik meg, $\underline{x}_g(t)$ pedig a $g$erjesztésre adott válasz. A szabadrezgésből származó tag paramétereivel kell kielégítenünk a teljes megoldásban az

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0, \qquad \underline{\dot{x}}(t_0) = \underline{v}_0, \tag{3.238}$$

kezdeti feltételeket. A továbbiakban elsősorban a partikuláris megoldások meghatározásának módszereit mutatjuk be különböző terhek esetén.

3.3.1. Többszabadságfokú rendszerek harmonikus gerjesztése

Többszabadságfokú rendszer esetében akkor beszélhetünk harmonikus gerjesztésről, ha mindegyik szabadságfokra ugyanolyan körfrekvenciájú gerjesztőerő hat, és az amplitúdó előjelével elérhetjük, hogy mindegyik gerjesztőerő ugyanolyan fázisban legyen. A harmonikus függvény, ahogy korábban láttuk lehet például egy $\cos(\omega t)$ függvény, ekkor a (3.236) egyenletben a tehervektor alakja az alábbi lehet:

$$\underline{q}(t) = \begin{bmatrix} q_{0,1} \cdot \cos(\omega t) \\ q_{0,2} \cdot \cos(\omega t) \\ \vdots \\ q_{0,N} \cdot \cos(\omega t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{0,1} \\ q_{0,2} \\ \vdots \\ q_{0,N} \end{bmatrix} \cdot \cos(\omega t) = \underline{q}_0 \cdot \cos(\omega t), \tag{3.239}$$

ahol a $\underline{q}_0$ vektor a *gerjesztőerő amplitúdójának vektora.* Ha az időfüggés $\sin(\omega t)$, vagy $\cos(\omega t - \varphi)$ szerint írható fel az összes szabadságfok esetén, akkor csak a harmonikus függvényt kell lecserélni a fenti képletben és a továbbiakban, ezért a levezetésekben csak a $\cos(\omega t)$ gerjesztést mutatjuk be részletesen.

A gerjesztés amplitúdójánál felhívjuk a figyelmet a terheletlen szabadságfok esetére. Az ilyen szabadságfok gerjesztése szabadon írható $0 \cdot \cos(\omega t)$ alakban, azaz a terheletlen szabadságfok tetszőleges frekvenciával, de nulla amplitúdóval gerjesztett szabadságfokként kezelhető, így a rendszer teljesíti a harmonikus gerjesztés feltételeit.

A harmonikus gerjesztésre adott válasz meghatározása tehát az

$$\boxed{\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{K}}\underline{x}(t) = \underline{q}_0 \cos(\omega t)} \tag{3.240}$$

egyenlet partikuláris megoldását jelenti.

3.3.1.1. Rezgésegyenlet közvetlen megoldása

Keressük a (3.240) egyenlet megoldását az időtől a gerjesztéshez hasonlóan függő alakban:

$$\underline{x}_g(t) = \begin{bmatrix} x_{g0,1} \\ x_{g0,2} \\ \vdots \\ x_{g0,N} \end{bmatrix} \cdot \cos(\omega t) = \underline{x}_{g0} \cdot \cos(\omega t), \tag{3.241}$$

azaz a válasz amplitúdójának $\underline{x}_{g0}$ vektora és a gerjesztés időfüggése szorzataként. A feltételezett alakban szétválasztottuk a helyfüggést és az időfüggést, így az idő szerinti deriváláskor csak a skalár tagokat kell deriválni, ezért a gyorsulások vektora:

$$\ddot{\underline{x}}(t) = \underline{x}_{g0}(-\omega^2)\cos(\omega t). \tag{3.242}$$

Helyettesítsük be a feltételezett alakot és a második deriváltját a mozgásegyenletbe:

$$\underline{\underline{M}}\underline{x}_{g0}(-\omega^2)\cos(\omega t) + \underline{\underline{K}}\underline{x}_{g0}\cos(\omega t) = \underline{q}_0\cos(\omega t). \tag{3.243}$$

Mivel mindhárom tagot ugyanazzal a $\cos(\omega t)$-vel szorozzuk, ezért leoszthatjuk mindkét oldalt vele:

$$\underline{\underline{M}}\underline{x}_{g0}(-\omega^2) + \underline{\underline{K}}\underline{x}_{g0} = \underline{q}_0, \tag{3.244}$$

majd a baloldalon kiemelhetjük a jobbról szorzó $\underline{x}_{g0}$ vektort (a $-\omega^2$ skalár, így azt szabadon mozgathatjuk, akár előrevihetjük a tömegmátrix elé):

$$\left(-\omega^2\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right)\underline{x}_{g0} = \underline{q}_0. \tag{3.245}$$

A kapott kifejezésben a bal oldalon megjelenő

$$\underline{\underline{K}}_{din} = \underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}} \tag{3.246}$$

együtthatómátrixot *dinamikus merevségi mátrixnak* nevezzük. A dinamikus merevségi mátrix frekvenciafüggő, az adott frekvenciájú gerjesztés esetén adja meg az elmozdulások amplitúdói és a gerjesztőerők amplitúdói között kapcsolatot, a

$$\underline{\underline{K}}_{din}\underline{x}_{g0} = \underline{q}_0. \tag{3.247}$$

alakból pedig kiolvasható annak fizikai jelentése is: egy j-edik oszlopát akkor kapjuk meg, ha a j-edik szabadságfok amplitúdója 1, a többié pedig nulla, és az ilyen rezgést létrehozó szabadságfokonkénti gerjesztőerő-amplitúdók alkotják a jobb oldalt és így a j-edik oszlopot.

Visszatérve a

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{x}_{g0} = \underline{q}_0. \tag{3.248}$$

egyenlethez, annak megoldása során három lehetséges eset fordulhat elő:

Az együttható mátrix rangja megegyezik a méretével Ekkor a dinamikus merevségi mátrix $\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)$ nem szinguláris, determinánsa nem nulla, így létezik az inverze és így a (3.248) egyenletnek egyértelmű megoldása van:

$$\underline{x}_{g0} = \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{q}_0. \tag{3.249}$$

Ez az eset a leggyakoribb, nézzük meg, mikor fordulhat elő. A szabadrezgés általánosított sajátértékfeladatának megoldásából tudjuk, hogy a $\left(\underline{\underline{K}} - \omega_0^2\underline{\underline{M}}\right)$ mátrixnak akkor nulla a determinánsa, ha az ω_0 éppen a szerkezet valamelyik sajátkörfrekvenciája. Nem zérus determináns és ezzel invertálható $\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)$ mátrix tehát akkor fordul elő, ha a gerjesztés ω körfrekvenciája nem egyezik meg a szerkezet egyik sajátkörfrekvenciájával sem. Ilyenkor használható a (3.249) szerinti megoldás az amplitúdóra.

Az együttható mátrix rangja kisebb a méreténél, de megegyezik a $\left[\underline{\underline{K}}_{din}|\underline{q}_0\right]$ mátrix rangjával Ekkor az együtthatómátrix determinánsa 0, a gerjesztés ω körfrekvenciája megegyezik a rendszer k-adik sajátkörfrekvenciájával, azaz ω_{0k}-val, mégsem következik be rezonancia, mert a tehervektor ortogonális az ehhez tartozó sajátvektorra $\underline{v}_k^T\underline{q}_0 = 0$. Ilyenkor a (3.248) egyenletnek létezik x_{g0} megoldása, de az nem egyértelmű: $\underline{v}_k$ tetszőleges skalárszorosát hozzáadhatnánk.

Az együttható mátrix rangja kisebb a méreténél, és kisebb a $\left[\underline{\underline{K}}_{din}|\underline{q}_0\right]$ mátrix rangjánál Ekkor az együtthatómátrix determinánsa 0, a gerjesztés ω körfrekvenciája megegyezik a rendszer k-adik sajátkörfrekvenciájával, azaz ω_{0k}-val, és rezonancia következik be, mert a tehervektor nem ortogonális az ehhez tartozó sajátvektorra $\underline{v}_k^T\underline{q}_0 \neq 0$. Ilyenkor a megoldást nem a (3.241) szerinti feltételezett alakban kellene keresni, hanem azt ki kellene bővíteni a rezonáns $\underline{v}_k$ alak $t \cdot \sin(\omega t)$-szeresének megfelelő taggal (lásd (2.167)).

Amennyiben tehát van $\underline{x}_{g0}$ megoldása a (3.248) egyenletnek, akkor a szerkezet válasza a feltételezett alaknak megfelelően

$$\underline{x}_g(t) = \underline{x}_{g0} \cdot \cos(\omega t) \tag{3.250}$$

lesz. Ahogy egyszabadságfokű szerkezeteknél bevezettük az állandósult rezgésrész fogalmát, úgy itt is elmondhatjuk, hogy a kezdeti feltételek lecsengése után, vagy speciális felvétele esetén ez egyben az állandósult rezgés lesz:

$$\underline{x}_{all}(t) = \underline{x}_{g0} \cdot \cos(\omega t), \tag{3.251}$$

annak amplitúdója pedig az $\underline{x}_{g0}$ vektor lesz.

3.3.1. Példa (Többszabadságfokú rendszer harmonikus gerjesztése)**.** *A 3.16.a) ábrán látható háromszintes épület mindhárom szintjén azonos gerjesztőerő működik:*

$$q_1(t) = q_2(t) = q_3(t) = q_0 \cos(\omega t). \tag{3.252}$$

Számítsuk a szerkezet válaszát, ha az egyes szintek tömege $m = 2t$, a szintek magassága $h = 3m$, az oszlopok hajlítómerevsége $EI = 1500kNm^2$, $q_0 = 10kN$, a gerjesztés körfrekvenciája pedig a) $\omega = 12rad/s$, b) $\omega = 32rad/s$, c) $\omega = 52rad/s$.

Megoldás

A szerkezet megegyezik a 3.2.2. példában bemutatottal, ezért a tömegmátrixot és a merevségi mátrixot onnan vesszük át:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 4000 & -2000 & 0 \\ -2000 & 4000 & -2000 \\ 0 & -2000 & 2000 \end{bmatrix}. \tag{3.253}$$

Mivel mindhárom szabadságfokra azonos gerjesztőerő hat, ezért a gerjesztőerő amplitúdójának vektorában az amplitúdókat soroljuk fel:

$$\underline{q}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \text{kN}. \tag{3.254}$$

- a) Amikor $\omega = 12$, akkor a dinamikus merevségi mátrix (3.246):

$$(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) = \begin{bmatrix} 4000 - 2 \cdot 12^2 & -2000 & 0 \\ -2000 & 4000 - 2 \cdot 12^2 & -2000 \\ 0 & -2000 & 2000 - 2 \cdot 12^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3712 & -2000 & 0 \\ -2000 & 3712 & -2000 \\ 0 & -2000 & 1712 \end{bmatrix}. \tag{3.255}$$

  A válasz amplitúdója (3.249):

$$\underline{x}_{g0} = \begin{bmatrix} 3712 & -2000 & 0 \\ -2000 & 3712 & -2000 \\ 0 & -2000 & 1712 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.051643 \\ 0.090850 \\ 0.111974 \end{bmatrix} \text{m}. \tag{3.256}$$

Ebből a szerkezet válasza:

$$\underline{x}_g^a(t) = \begin{bmatrix} 0.051643 \\ 0.090850 \\ 0.111974 \end{bmatrix} \cos(12t). \tag{3.257}$$

- b) Amikor $\omega = 32$, akkor a dinamikus merevségi mátrix (3.246):

$$(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) = \begin{bmatrix} 4000 - 2 \cdot 32^2 & -2000 & 0 \\ -2000 & 4000 - 2 \cdot 32^2 & -2000 \\ 0 & -2000 & 2000 - 2 \cdot 32^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1952 & -2000 & 0 \\ -2000 & 1952 & -2000 \\ 0 & -2000 & -48 \end{bmatrix}. \tag{3.258}$$

A válasz amplitúdója (3.249):

$$\underline{x}_{g0} = \begin{bmatrix} 1952 & -2000 & 0 \\ -2000 & 1952 & -2000 \\ 0 & -2000 & -48 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00024323 \\ -0.00476260 \\ -0.00989154 \end{bmatrix} \text{m}. \tag{3.259}$$

Ebből a szerkezet válasza:

$$\underline{x}_g^b(t) = \begin{bmatrix} 0.00024323 \\ -0.00476260 \\ -0.00989154 \end{bmatrix} \cos(12t). \tag{3.260}$$

- c) Amikor $\omega = 52$, akkor a dinamikus merevségi mátrix (3.246):

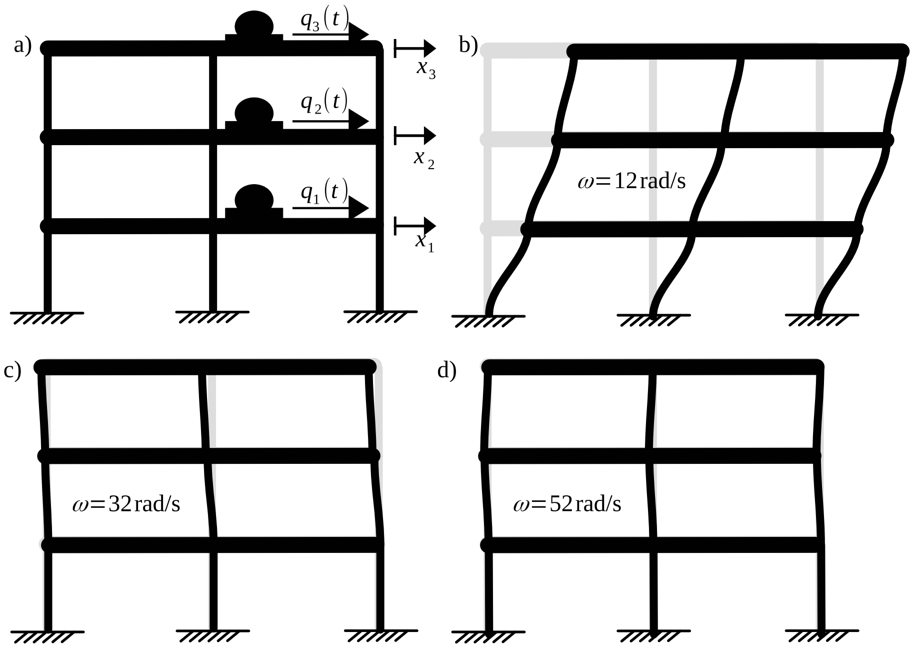
$$(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) = \begin{bmatrix} 4000 - 2 \cdot 52^2 & -2000 & 0 \\ -2000 & 4000 - 2 \cdot 52^2 & -2000 \\ 0 & -2000 & 2000 - 2 \cdot 52^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1408 & -2000 & 0 \\ -2000 & -1408 & -2000 \\ 0 & -2000 & -3408 \end{bmatrix}. \tag{3.261}$$

A válasz amplitúdója (3.249):

$$\underline{x}_{g0} = \begin{bmatrix} -1408 & -2000 & 0 \\ -2000 & -1408 & -2000 \\ 0 & -2000 & -3408 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00161303 \\ -0.00386443 \\ -0.00066641 \end{bmatrix} \text{m}. \tag{3.262}$$

Ebből a szerkezet válasza:

$$\underline{x}_g^c(t) = \begin{bmatrix} -0.00161303 \\ -0.00386443 \\ -0.00066641 \end{bmatrix} \cos(12t). \tag{3.263}$$



3.16. ábra. a) Háromszintes épület modellje. b)-d) Rezgésalakok $\omega = 12$rad/s, $\omega = 32$rad/s, $\omega = 52$rad/s frekvenciáknál.

Az eredményekből arra hívjuk fel a figyelmet, hogy az $\underline{x}_{g0}$ vektorok elemeinek előjele az adott szabadságfok fázisát mutatja a gerjesztéshez képest. Az $\omega = 12$rad/s esetben mindhárom szabadságfok azonos fázisban mozog a gerjesztéssel: amikor az erők pozitív irányba (jobbra) mutatnak, akkor a szabadságfokok kitérése is pozitív (jobbra történik). A másik két esetben az amplitúdók lényegesen kisebbek, és előfordul olyan szabadságfok is, amelyik a gerjesztéssel ellenfázisban mozog.

A három alakot a 3.16.b)-d) ábrákon mutatjuk.

3.3.2. Példa (Többszabadságfokú rendszer harmonikus gerjesztése)**.** *A 3.17.a) ábrán látható kétszintes szerkezet alsó födémén egy gép mozgásából származó harmonikus* $q_2(t) = q_0 \cos(\omega t)$ *gerjesztőerő működik. Határozzuk meg a szerkezet válaszában az egyes szabadságfokok amplitúdóját a gerjesztőerő körfrekvenciájának függvényében, ha az egyes szintek tömege* m*, a szintenkénti helyettesítő merevség pedig* k*!*

Megoldás

A szerkezet tömegmátrixa

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}. \tag{3.264}$$

A merevségi mátrixot kompilálással kaphatjuk, melynek eredménye most:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}. \tag{3.265}$$

A gerjesztőerő amplitúdóvektora:

$$\underline{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ q_0 \end{bmatrix}. \tag{3.266}$$

A dinamikus merevségi mátrix:

$$\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix}, \tag{3.267}$$

aminek az inverze:

$$(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}})^{-1} = \\ \frac{1}{(k - m\omega^2)(2k - m\omega^2) - (-k)(-k)} \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & k \\ k & k - m\omega^2 \end{bmatrix}. \tag{3.268}$$

A $\underline{q}_0$ vektorral való beszorzás és a skalárszorzó nevezőjének egyszerűsítése után:

$$\underline{x}_{g0} = \frac{q_0}{k^2 - 3km\omega^2 + m^2\omega^4} \begin{bmatrix} k \\ k - m\omega^2 \end{bmatrix}, \tag{3.269}$$

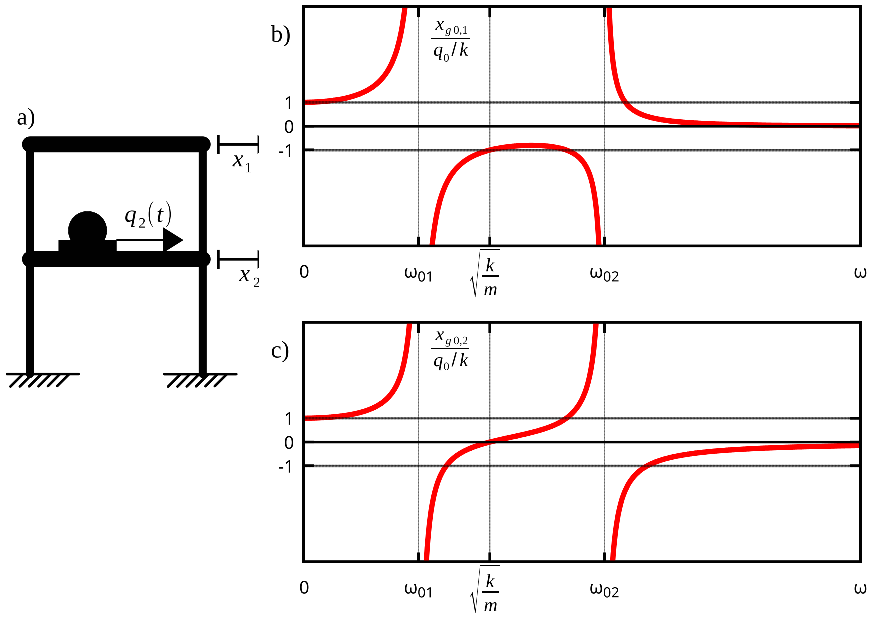
vagy kiemelve $q_0 = k$-t:

$$\underline{x}_{g0} = \frac{q_0}{k} \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - 3\frac{m\omega^2}{k} + \frac{m^2\omega^4}{k^2}} \\ \frac{1 - \frac{m\omega^2}{k}}{1 - 3\frac{m\omega^2}{k} + \frac{m^2\omega^4}{k^2}} \end{bmatrix}. \tag{3.270}$$

Utóbbi alakból jól látszik, hogy a q_0/k hánaydoson kívül csak egy $m\omega^2/k$ értéktől függ a szabadságfokok amplitúdója. A 3.17.b)-c) ábrákon felrajzoltuk ezeket a függvényeket. A képletek és a függvények alapján az alábbi megállapításokat tesszük:

- Két gerjesztőerő-frekvencia esetén az elmozdulások a végtelenbe tartanak. Ez a két frekvencia az, ami a (3.269) képlet törtjében a nevezőt nullává teszi. A nevező viszont a dinamikus merevségi mátrix determinánsa, és tudjuk, hogy ha a $\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}$ mátrix determinánsa nulla, akkor ω éppen a rendszer egyik sajátkörfrekvenciája. Ebben a két pontban tehát *rezonancia* lép fel.

- A rezonanciától eltekintve, alacsony frekvenciájú gerjesztés esetén mindkét szabadságfok azonos fázisban mozog a gerjesztéssel. Növelve ω-t az első sajátkörfrekvenciát elhagyva mindkét szabadságfok ellenfázisban mozog a gerjesztéshez képest, majd az $\omega = \sqrt{k/m}$ értéket



3.17. ábra. a) Kétszintes épület modellje. b)-c) Az egyes szabadságfokok kitérésének szorzótényezője a gerjesztés körfrekvenciájának függvényében.

elhagyva az első szabadságfok ellenfázisban, a második azonos fázisban mozog. Végül, a második sajátkörfrekvenciát elhagyva az első szabadságfok azonos, a második pedig ellenfázisban mozog a gerjesztéshez képest.

Dinamikus rezgéscsillapítás A 3.3.2. példában $\omega = \sqrt{k/m}$ körfrekvenciájú gerjesztésnél a (3.269) képlet szerint a második (a gerjesztett) szabadsági fok amplitúdója zérus. (Ez látszik a 3.17.c) ábrán is.) A zérus amplitúdó az állandósult rezgés során jelentkezik, és ekkor a gerjesztett szabadságfokhoz kapcsolt terheletlen szabadságfok végez olyan frekvenciájú, fázisú és amplitúdójú rezgést, hogy annak reakciója és a gerjesztés éppen kioltsák egymás hatását a gerjesztett szabadságfokon. Ezt a jelenséget *dinamikus rezgéscsillapításnak* nevezzük, és a gerjesztett szabadságfokhoz kapcsolt terheletlen szabadságfok frekvenciájának megfelelő hangolásával érhető el, innen származik az angol neve is: *Tuned Mass Damper*. A terheletlen szabadságfok a mozdulatlan szabadságfokhoz, mint támaszhoz kapcsolódik, így a frekvenciája egy egyszabadságfokú rendszer frekvenciájaként számolható, példánkban a felső szint k merevségéből és az első szabadságfok m tömegéből $\sqrt{k/m}$.

A dinamikus rezgéscsillapítás tervezésekor tehát az elsődleges cél a megfelelő frekvencia eltalálása, ami viszont a csillapítóelem merevségének és tömegének arányától függ csak. Ugyanazt a frekvenciát el lehet tehát érni kisebb tömegű és kisebb merevségű, vagy nagyobb tömegű és nagyobb merevségű elemmel. A döntést az befolyásolja, hogy kisebb tömeg és merevség esetén a csillapító elem amplitúdója nagyobb lehet, nagyobb tömeg esetén viszont a teljes szerkezetet a nagyobb önsúlyra kell méretezni.

A dinamikus rezgéscsillapítás itt bemutatott elve harmonikus gerjesztésre és csillapítatlan rendszerre vonatkozott. A gyakorlatban a terhek nem feltétlenül harmonikusak, de lehet jellemző frekvenciatartományuk, melynek környezetére hangolják a csillapítást. A ténylegesen meglevő viszkózus csillapítás hatása is elkeni a zérus amplitúdót, de egy tartományban nagyon kis elmozdulások érhetők el. Végül megemlítjük az aktív vezérlésű dinamikus rezgéscsillapítást, amikor a terheléstől függően szabályozzák a kapcsolt elem merevségét, illetve viszkózus csillapítását.

3.3.1.2. Rezgésegyenlet megoldása modálanalízissel

A *modálanalízis* azt jelenti, hogy a rezgésfeladat megoldását a rezgésmódok lineáris kombinációjaként keressük, és így a feladatot visszavezetjük a rezgésalakok, mint egyszabadságfokú rendszerek rezgésfeladatainak egymástól függetlenül számítható megoldására, majd azok összegzésére. A modálanalízis használata esetén tehát előzetesen meg kell oldani az általánosított sajátértékfeladatot ahhoz, hogy a (3.240) egyenlet megoldását a rezgésalakok lineáris kombinációjaként keressük:

$$\underline{x}_g(t) = \underline{\underline{V}}\,\underline{y}_g(t) = \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j y_{gj}(t). \tag{3.271}$$

Fenti képletben $\underline{\underline{V}}$ a tömegmátrixra normált sajátvektorokat tartalmazó modálmátrix, $\underline{y}(t)$ pedig az egyes rezgésalakok modális koordinátáit tartalmazó vektor. Mivel a rendszer $\underline{\underline{K}}$ és $\underline{\underline{M}}$ mátrixai időben állandók, így a rezgésjellemzők, például a $\underline{\underline{V}}$ mátrix sem változik, ezért a gyorsulások vektora

$$\ddot{\underline{x}}_g(t) = \underline{\underline{V}}\,\ddot{\underline{y}}_g(t). \tag{3.272}$$

alakban írható. A keresett alakot és a második deriváltját helyettesítsük be a (3.240) egyenletbe:

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{V}}\,\ddot{\underline{y}}_g(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{y}_g(t) = \underline{q}_0 \cos(\omega t), \tag{3.273}$$

és szorozzuk meg mindkét oldalt balról a modálmátrix transzponáltjával, azaz $\underline{\underline{V}}^T$-vel:

$$\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{V}}\,\ddot{\underline{y}}_g(t) + \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{y}_g(t) = \underline{\underline{V}}^T \underline{q}_0 \cos(\omega t). \tag{3.274}$$

A sajátvektorok (3.179) szerinti tulajdonságait felhasználva a bal oldalon két diagonálmátrixot kaptunk:

$$\underline{\underline{I}}\,\ddot{\underline{y}}_g(t) + \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{y}_g(t) = \underline{\underline{V}}^T \underline{q}_0 \cos(\omega t), \tag{3.275}$$

a jobb oldalon pedig egy olyan vektort, aminek a j-edik eleme a j-edik sajátvektor transzponáltjának és a tehervektornak a szorzata, azaz a tehervektor vetülete a $\underline{v}_j$ sajátvektorra. Jelöljük ennek a vetületnek az amplitúdóját f_j-vel (azaz legyen $f_j = \underline{v}_j^T \underline{q}_0$), és gyűjtsük az f_j értékeket az $\underline{f}$ vektorba, így az egyenletrendszert úgy írhatjuk, hogy:

$$\underline{\underline{I}}\,\ddot{\underline{y}}_g(t) + \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{y}_g(t) = \underline{f} \cos(\omega t). \tag{3.276}$$

A bal oldali diagonálmátrixok miatt az egyenletrendszer j-edik sorában csak $\ddot{y}_{gj}(t)$ és $y_{gj}(t)$ szorzódik nullától különböző értékkel, ezért az egyenletrendszer *szétesik* N közönséges differenciálegyenletté. A példaként mondott j-edik sorból az lesz, hogy:

$$\ddot{y}_{gj}(t) + \omega_{0j}^2 y_{gj}(t) = f_j \cos(\omega t), \tag{3.277}$$

ami egy olyan harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan egyszabadságfokú rendszernek a differenciálegyenlete, melynek a tömege egységnyi, a rugómerevsége ω_{0j}^2, így a sajátkörfrekvenciája ω_{0j}, az ω körfrekvenciájú gerjesztés amplitúdója pedig f_j. A (2.156) egyenlet megoldására korábban levezetett (2.166) megoldásba behelyettesítve a fenti paramétereket a modális válasz

$$y_{gj}(t) = y_{gj,0}\cos(\omega t) \tag{3.278}$$

alakú, ahol a modális amplitúdó:

$$y_{gj,0} = \frac{f_j}{\omega_{0j}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}} \tag{3.279}$$

lesz, ami a teher vetületének behelyettesítése után:

$$y_{gj,0} = \underline{v}_j^T \underline{q}_0 \frac{1}{\omega_{0j}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}}, \tag{3.280}$$

a modális válasz pedig:

$$y_{gj}(t) = \underline{v}_j^T \underline{q}_0 \frac{1}{\omega_{0j}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}}\cos(\omega t). \tag{3.281}$$

Egy rezgésalak válaszának a modális amplitúdója tehát négy tényezőtől függ:

- A tehervektor amplitúdójának a rezgésalakra vett $\underline{v}_j^T \underline{q}_0$ vetületétől.
- A sajátkörfrekvencia négyzetének reciprokától $\left(\frac{1}{\omega_{0j}^2}\right)$.
- A statikus eltolódást szorzó $\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}}$ tényezőtől, ami egy ω körfrekvenciával gerjesztett ω_{0j} sajátkörfrekvenciájú rendszer előjeles rezonanciatényezője.
- A teher $\cos(\omega t)$ időfüggésétől.

Rezonancia esetén ω megegyezik valamelyik sajátkörfrekvenciával. Ilyenkor a rezonáns alak esetében harmadik tag, a rezonanciatényező a végtelenbe tartana, de ha az első tag, a teher vetülete nulla, akkor a rezonáns rezgésalak nem lenne gerjesztve, így a végeredmény véges amplitúdójú rezgés lenne.

A választ befolyásoló tényezők közül kiemeljük a másodikat. A sajátkörfrekvenciákat nagyság szerint rendezzük sorba, így a magasabb rezgésalakokhoz tartozik nagyobb sajátkörfrekvencia. A magasabb rezgésalakokat tehát egy négyzetesen növekvő tényezővel osztjuk le, így a teljes megoldásban a szerepük egyre kisebb lesz. Ez lesz a későbbiekben az oka, hogy a *részleges modálanalízis* során a megoldást csak az első *néhány*[16] sajátvektor kombinációjaként keressük. Ráadásul az első sajátalakokat könnyebben és pontosabban lehet számolni a rendelkezésre álló numerikus algoritmusokkal.

[16] A néhány a feladat méretétől függően jelenthet $1-10-100-1000$ rezgésalakot

A teljes megoldáshoz a modális megoldásokat kell a sajátvektorokkal szorozni és összegezni, azaz a rendszer válasza általános esetben:

$$\underline{x}_g(t) = \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j \underline{v}_j^T \underline{q}_0 \frac{1}{\omega_{0j}^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}} \cos(\omega t). \tag{3.282}$$

Itt is igaz, hogy a kezdeti feltételek lecsengése után, vagy speciális felvétele esetén ez egyben az állandósult rezgés lesz:

$$\underline{x}_{all}(t) = \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j \underline{v}_j^T \underline{q}_0 \frac{1}{\omega_{0j}^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}} \cos(\omega t). \tag{3.283}$$

Jól látni, hogy az állandósult rezgésrészben is az időfüggés megegyezik a gerjesztőerő időfüggésével.

3.3.3. Példa (Többszabadságfokú rendszer harmonikus gerjesztése)**.** *A 3.18.a) ábrán látható háromszintes épület mindhárom szintjén azonos gerjesztőerő működik:*

$$q_1(t) = q_2(t) = q_3(t) = q_0 \cos(\omega t). \tag{3.284}$$

Számítsuk a szerkezet válaszát, ha az egyes szintek tömege $m = 2t$, a szintek magassága $h = 3m$, az oszlopok hajlítómerevsége $EI = 1500kNm^2$, $q_0 = 10kN$, a gerjesztés körfrekvenciája pedig $\omega = 12rad/s$.

Megoldás

A szerkezet megegyezik a 3.2.2. példában bemutatottal, ezért átvehetjük onnan a tömegmátrixot és a merevségi mátrixot:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 4000 & -2000 & 0 \\ -2000 & 4000 & -2000 \\ 0 & -2000 & 2000 \end{bmatrix}. \tag{3.285}$$

valamint a sajátkörfrekvenciákat és a tömegmátrixra normált sajávektorokat:

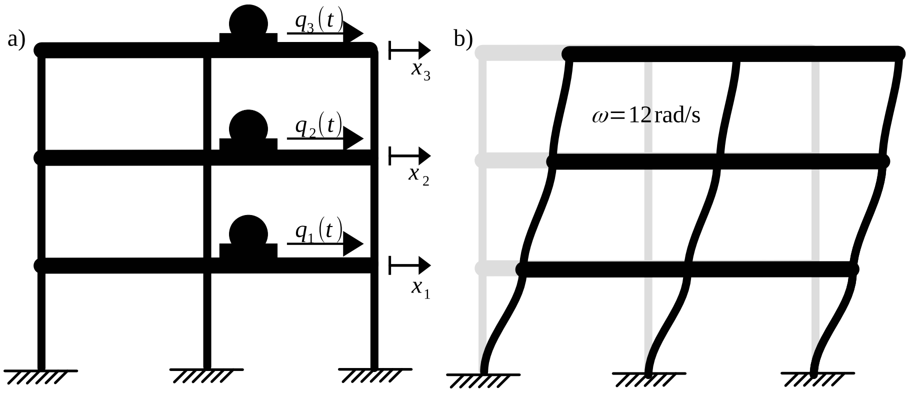
$$\omega_{01} = 14.07\text{rad/s}, \qquad \omega_{02} = 39.43\text{rad/s}, \qquad \omega_{03} = 56.98\text{rad/s}. \tag{3.286}$$

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.2319 \\ 0.4179 \\ 0.5211 \end{bmatrix}, \qquad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.5211 \\ 0.2319 \\ -0.4179 \end{bmatrix}, \qquad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -0.4179 \\ 0.5211 \\ -0.2319 \end{bmatrix} \tag{3.287}$$

Az egyes rezgésmódok amplitúdója (3.280)-be való behelyettesítés után:

$$y_{g0,1} = \begin{bmatrix} 0.2319 & 0.4179 & 0.5211 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \frac{1}{14.07^2} \frac{1}{1 - \frac{12^2}{14.07^2}} = 0.21659, \tag{3.288}$$

$$y_{g0,2} = \begin{bmatrix} 0.5211 & 0.2319 & -0.4179 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \frac{1}{39.43^2} \frac{1}{1 - \frac{12^2}{39.43^2}} = 0.002375, \tag{3.289}$$



3.18. ábra. a) Háromszintes épület modellje. b) Rezgésalak ω = 12rad/s frekvenciánál.

$$y_{g0,3} = \begin{bmatrix}-0.4179 & 0.5211 & -0.2319\end{bmatrix} \begin{bmatrix}10\\10\\10\end{bmatrix} \frac{1}{56.98^2} \frac{1}{1-\frac{12^2}{56.98^2}} = -0.000415. \tag{3.290}$$

A rezgésmódok összegzése:

$$\underline{x}_g(t) = \left(0.21659 \begin{bmatrix}0.2319\\0.4179\\0.5211\end{bmatrix} + 0.002375 \begin{bmatrix}0.5211\\0.2319\\-0.4179\end{bmatrix} - 0.000415 \begin{bmatrix}-0.4179\\0.5211\\-0.2319\end{bmatrix}\right) \cos(12t) =$$
$$\left(\begin{bmatrix}0.050227\\0.090513\\0.112865\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.001238\\0.000551\\-0.000993\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.000173\\-0.000216\\0.000096\end{bmatrix}\right) \cos(12t). \tag{3.291}$$

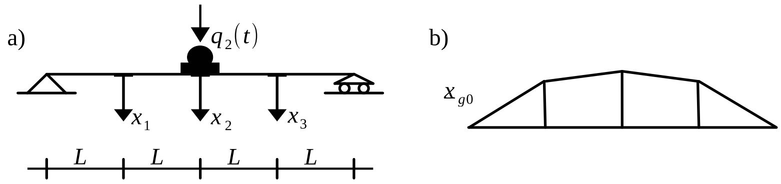
Ebből a szerkezet válasza:

$$\underline{x}_g(t) = \begin{bmatrix}0.05164\\0.09085\\0.11197\end{bmatrix} \cos(12t). \tag{3.292}$$

A 3.18.b) ábrán felrajzoltuk az amplitúdót. Ahogy a feladat megegyezett, úgy az eredmény is azonos 3.3.1. példa a) részével.

3.3.4. Példa (Többszabadságfokú rendszer harmonikus gerjesztése)**.** *Határozzuk meg 3.19.a) ábrán látható gerenda válaszát, ha a középső szabadságfokon a* $q_2(t) = q_0 \cos(\omega t)$ *gerjesztőerő működik. Az egyes szabadságfokokban a redukált tömegek* $m = 3t$*, a gerenda hajlítómerevsége* $EI = 1400kNm^2$ *és* $L = 2m$*,* $q_0 = 50kN$*,* $\omega = 12rad/s$*.*

Megoldás
A szerkezet megegyezik a 3.2.3. példában bemutatottal, ezért átvehetjünk



3.19. ábra. a) Kéttámaszú gerenda középen gerjesztve. b) Rezgésalak $\omega = 12$rad/s frekvenciánál.

onnan a tömegmátrixot és a merevségi mátrixot:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 1725 & -1650 & 675 \\ -1650 & 2400 & -1650 \\ 675 & -1650 & 1725 \end{bmatrix}, \tag{3.293}$$

valamint a sajátkörfrekvenciákat:

$$\omega_{01} = 4.710\text{rad/s}, \qquad \omega_{02} = 18.71\text{rad/s}, \qquad \omega_{03} = 39.72\text{rad/s}, \tag{3.294}$$

és a tömegmátrixra normált sajávektorokat:

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.2887 \\ 0.4083 \\ 0.2887 \end{bmatrix}, \qquad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.4083 \\ 0 \\ -0.4083 \end{bmatrix}, \qquad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.2887 \\ -0.4083 \\ 0.2887 \end{bmatrix}. \tag{3.295}$$

Az egyes rezgésmódok amplitúdója (3.280)-be való behelyettesítés után:

$$y_{g0,1} = \begin{bmatrix} 0.2887 & 0.4083 & 0.2887 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{4.710^2} \frac{1}{1 - \frac{12^2}{4.710^2}} = -0.1676, \tag{3.296}$$

$$y_{g0,2} = \begin{bmatrix} 0.4083 & 0 & -0.4083 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{18.71^2} \frac{1}{1 - \frac{12^2}{18.71^2}} = 0, \tag{3.297}$$

$$y_{g0,3} = \begin{bmatrix} 0.2887 & -0.4083 & 0.2887 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{39.72^2} \frac{1}{1 - \frac{12^2}{39.72^2}} = -0.01424. \tag{3.298}$$

A rezgésmódok összegzése:

$$\underline{x}_g(t) = \left(-0.1676 \begin{bmatrix} 0.2887 \\ 0.4083 \\ 0.2887 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0.4083 \\ 0 \\ -0.4083 \end{bmatrix} - 0.01424 \begin{bmatrix} 0.2887 \\ -0.4083 \\ 0.2887 \end{bmatrix} \right) \cos(12t) = \left(\begin{bmatrix} -0.04839 \\ -0.06843 \\ -0.04839 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.00411 \\ 0.00581 \\ -0.00411 \end{bmatrix} \right) \cos(12t). \tag{3.299}$$

Ebből a szerkezet válasza:

$$\underline{x}_g(t) = \begin{bmatrix} -0.0525 \\ -0.0627 \\ -0.0525 \end{bmatrix} \cos(12t). \tag{3.300}$$

A 3.19.b) ábrán felrajzoltuk az amplitúdót. Mint látjuk, szimmetrikus szerkezet szimmetrikus gerjesztésére a válasz is szimmetrikus, a ferdén szimmetrikus alak együtthatója a $\underline{v}_2^T \underline{q}_0 = 0$ szorzat miatt lett nulla. A válaszban a negatív előjelek azt jelentik, hogy minden szabadságfok a gerjesztőerővel ellentétes fázisban mozog.

3.3.2. Többszabadságfokú rendszerek gerjesztése egy alakkal

A nem harmonikus gerjesztések közül először nézzünk egy olyan speciális esetet, amikor a gerjesztőerő vektora a rezgés során végig a j-edik sajátvektorból képzett $\underline{\underline{M}}\underline{v}_j$ vektor valamilyen skalár $q_j(t)$-szerese, azaz a (3.236) differenciálegyenletet úgy írhatjuk, hogy:

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{K}}\underline{x}(t) = \underline{\underline{M}}\underline{v}_j q_j(t). \tag{3.301}$$

Keressük ennek az egyenletnek a megoldását

$$\underline{x}_g(t) = \underline{v}_j y_j(t) \tag{3.302}$$

alakban, és helyettesítsük be a feltételezett alakot és annak

$$\ddot{\underline{x}}_g(t) = \underline{v}_j \ddot{y}_j(t) \tag{3.303}$$

szerinti második deriváltját a (3.301) egyenletbe

$$\underline{\underline{M}}\underline{v}_j \ddot{y}_j(t) + \underline{\underline{K}}\underline{v}_j y_j(t) = \underline{\underline{M}}\underline{v}_j q_j(t). \tag{3.304}$$

Mivel $\underline{v}_j$ a (3.71) sajátértékfeladat megoldása, ezért helyettesítsük $\underline{\underline{K}}\underline{v}_j$-t a vele egyenlő $\underline{\underline{M}}\omega_{0j}^2 \underline{v}_j$-vel:

$$\underline{\underline{M}}\underline{v}_j \ddot{y}_j(t) + \underline{\underline{M}}\omega_{0j}^2 \underline{v}_j y_j(t) = \underline{\underline{M}}\underline{v}_j q_j(t). \tag{3.305}$$

Rendezzük egy oldalra az egyenletet és emeljük ki a mindhárom tagot balról szorzó $\underline{\underline{M}}\underline{v}_j$ szorzatot:

$$\underline{\underline{M}}\underline{v}_j \left(\ddot{y}_j(t) + \omega_{0j}^2 y_j(t) - q_j(t) \right) = \underline{0}. \tag{3.306}$$

Mivel az $\underline{\underline{M}}$ mátrix nem szinguláris, ezért a kapott egyenletnek csak a triviális

$$\underline{v}_j \left(\ddot{y}_j(t) + \omega_{0j}^2 y_j(t) - q_j(t) \right) = \underline{0}. \tag{3.307}$$

lehet a megoldása, és mivel a sajátvektor nem nullvektor, a zárójeles kifejezésnek kell zérusnak lenni, ami egyenértékű az alábbi közönséges differenciálegyenlettel:

$$\ddot{y}_j(t) + \omega_{0j}^2 y_j(t) = q_j(t). \tag{3.308}$$

Ez formailag egy olyan csillapítatlan egyszabadságfokú rendszer gerjesztett rezgésének a (2.25) szerinti differenciálegyenlete, ahol a tömeg egységnyi, a rugómerevség ω_{0j}^2, így a sajátkörfrekvencia ω_{0j}, a gerjesztőerő $q_j(t)$, a szabadságfok keresett kitérését pedig y_j jelöli. Ennek megoldására a 2.5. fejezetben mutattunk módszereket, a Duhamel-integrált (2.299) használva például azt kapjuk, hogy:

$$y_j(t) = \int_0^t \frac{q_j(\tau)}{\omega_{0j}} \sin\left(\omega_{0j}(t-\tau)\right) d\tau, \tag{3.309}$$

amit a feltételezett alakba visszahelyettesítve kapjuk a szerkezet válaszát:

$$\underline{x}(t) = \underline{v}_j \cdot \int_0^t \frac{q_j(\tau)}{\omega_{0j}} \sin\left(\omega_{0j}(t-\tau)\right) d\tau, \tag{3.310}$$

A speciális gerjesztésnek a hatására tehát a szabadságfokok kitéréseinek aránya a mozgás során végig állandó, mégpedig a rezgésalak által meghatározott érték.

3.3.3. Többszabadságfokú rendszerek általános gerjesztése

3.3.3.1. Modálanalízis

A (3.236)-ben levezetett

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t) = \underline{q}(t) \tag{3.311}$$

differenciálegyenletnek most keressük a megoldását teljesen általános gerjesztőerő esetén, azaz a $\underline{q}(t)$ vektor se időben, se térben ne legyen speciális. A megoldás célszerű módja ilyenkor a modálanalízis. A megoldás előkészítéseként előzetesen oldjuk meg a szabadrezgés általánosított sajátértékfeladatát (lásd (3.71)), így rendelkezésre állnak a rendszer ω_{0j} sajátkörfrekvenciái és $\underline{v}_j$ tömegmátrixra normált sajátvektorai. A differenciálegyenlet megoldását keressük a rezgésalakok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{x}_g(t) = \underline{\underline{V}}\,\underline{y}_g(t) = \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j y_{gj}(t). \tag{3.312}$$

Fenti képletben $\underline{\underline{V}}$ a tömegmátrixra normált sajátvektorokat tartalmazó modálmátrix, $\underline{y}(t)$ pedig az egyes rezgésalakok modális koordinátáit tartalmazó vektor. Mivel a rendszer $\underline{\underline{K}}$ és $\underline{\underline{M}}$ mátrixai időben állandók, így a rezgésjellemzők, például a $\underline{\underline{V}}$ mátrix sem változik, ezért a gyorsulások vektora

$$\underline{\ddot{x}}_g(t) = \underline{\underline{V}}\,\underline{\ddot{y}}_g(t). \tag{3.313}$$

alakban írható. A keresett alakot és a második deriváltját helyettesítsük be a (3.311) egyenletbe:

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{\ddot{y}}_g(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{y}_g(t) = \underline{q}(t), \tag{3.314}$$

és szorozzuk meg mindkét oldalt balról a modálmátrix transzponáltjával, azaz $\underline{\underline{V}}^T$-vel:

$$\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{\ddot{y}}_g(t) + \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{y}_g(t) = \underline{\underline{V}}^T \underline{q}(t). \tag{3.315}$$

A sajátvektorok (3.179) szerinti tulajdonságait felhasználva a bal oldalon két diagonálmátrixot kaptunk:

$$\underline{\underline{I}}\,\ddot{\underline{y}}_g(t) + \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{y}_g(t) = \underline{\underline{V}}^T \underline{q}(t), \tag{3.316}$$

a jobb oldalon pedig egy olyan vektort, aminek a j-edik eleme a j-edik sajátvektor transzponáltjának és a tehervektornak a szorzata, azaz a tehervektor vetülete a $\underline{v}_j$ sajátvektorra. Jelöljük ezt a vetületet f_j-vel (azaz legyen $f_j(t) = \underline{v}_j^T \underline{q}(t)$), és gyűjtsük az $f_j(t)$ értékeket az $\underline{f}(t)$ vektorba, így az egyenletrendszert úgy írhatjuk, hogy:

$$\underline{\underline{I}}\,\ddot{\underline{y}}_g(t) + \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{y}_g(t) = \underline{f}(t). \tag{3.317}$$

A bal oldali diagonálmátrixok miatt az egyenletrendszer j-edik sorában csak $\ddot{y}_{gj}(t)$ és $y_{gj}(t)$ szorzódik nullától különböző értékkel, ezért az egyenletrendszer *szétesik* N közönséges differenciálegyenletté. A példaként mondott j-edik sorból az lesz, hogy:

$$\ddot{y}_{gj}(t) + \omega_{0j}^2 y_{gj}(t) = f_j(t), \tag{3.318}$$

ami egy olyan harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan egyszabadságfokú rendszernek a differenciálegyenlete, melynek a tömege egységnyi, a rugómerevsége ω_{0j}^2, így a sajátkörfrekvenciája ω_{0j}, és az $f_j(t)$ erő gerjeszti. A (2.25) egyenlet megoldására korábban levezetett tetszőleges megoldásba behelyettesítve a fenti paramétereket a modális válasz megkapható. A Duhamel-integrállal például:

$$y_j(t) = \int_0^t \frac{f_j(\tau)}{\omega_{0j}} \sin\left(\omega_{0j}(t-\tau)\right) d\tau, \tag{3.319}$$

amiből a teljes megoldás a teher vetületének behelyettesítése és a rezgésmódok megoldásainak összegzése után

$$\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j \cdot \int_0^t \frac{\underline{v}_j^T \underline{q}(\tau)}{\omega_{0j}} \sin\left(\omega_{0j}(t-\tau)\right) d\tau, \tag{3.320}$$

Látható, hogy ebben a megoldásban is megjelenik minden rezgésalak esetében a sajátkörfrekvenciával való osztás, azaz a magasabb rezgésalakok hatása itt is kisebb lesz.

3.3.3.2. Igénybevételek számítása

A többszabadságfokú rendszer $\underline{x}_g(t)$ válaszának ismeretében ki kell tudnunk számolni egyes keresztmetszetek, szerkezeti elemek igénybevételeit is. Keressük tehát a folytonos szerkezet tetszőleges S keresztmetszetének C igénybevételét, amit $C_S(t)$-sel jelölünk. Ahogy a szabadrezgésnél, most is abból kell kiindulnunk, hogy már meg tudjuk határozni azt a statikus erőrendszert, ami ugyanakkora elmozdulásokat okoz, mint az $\underline{x}_g(t)$ elmozdulásvektor. A merevségi mátrix fizikai jelentése alapján az

$$\underline{f}_{st}(t) = \underline{\underline{K}}\,\underline{x}_g(t) \tag{3.321}$$

vektor elemeit statikusan működtetve a szabadságfokokra ugyanazok az elmozdulások és alakváltozások lesznek a szerkezeten, mint az $\underline{x}_g(t)$ elmozdulásokból, így a reakciókat és igénybevételeket is számolhatjuk ezekből az erőkből statikusan. Az elmozdulások megoldását behelyettesítve a szerkezet igénybevételeinek számításához az

$$\underline{f}_{st}(t) = \underline{\underline{K}} \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j y_{gj}(t) \tag{3.322}$$

vektor elemeit kell működtetni a szabadságfokokra és abból a keresett igénybevételeket számolni. A képlet szerint a $\underline{\underline{K}}\underline{v}_j$ erőrendszerek $y_{gj}(t)$ kombinációit kell működtetni és abból a C_S igénybevételt számolni. A szuperpozíció elve alapján ez megegyezik a $\underline{\underline{K}}\underline{v}_j$ erőrendszerekből külön-külön számolt C_{Sj} *modális igénybevételek* $y_{gj}(t)$ együtthatókkal képzett kombinációjával:

$$C_S(t) = \sum_{j=1}^{N} C_{Sj} y_{gj}(t) \tag{3.323}$$

A C_{Sj} modális igénybevételeket most is az

$$\underline{f}_{st,j} = \underline{\underline{K}}\underline{v}_j = \omega_{0j}^2 \underline{\underline{M}}\underline{v}_j \tag{3.324}$$

modális erőrendszerből kell számolni. (A $\underline{v}_j$ vektor a többszabadságfokú rendszer sajátvektora, így kielégíti a (3.80) egyenletet: $\underline{\underline{K}}\underline{v}_j = \omega_{0j}^2 \underline{\underline{M}}\underline{v}_j$.)

Végezetül itt is jelezzük, hogy a (3.323) szerint számolt igénybevétel maximuma a C_{Sj} együtthatóktól, valamint a rezgésmódok kitérésétől függ. Felső határként az azonos előjelű szélsőértékek egyidejű felléptét kell feltételeznünk, amiből

$$C_S(t) \leq C_S^{max} = \sum_{j=1}^{N} |C_{Sj}|y_{gj}|^{max}| \,. \tag{3.325}$$

Rezgésről lévén szó, ugyanez negatív előjellel az igénybevétel lehetséges minimumát adja.

3.3.4. Többszabadságfokú rendszerek gerjesztése támaszmozgással

Egyszabadságfokú szerkezeteknél láttuk, hogy a támaszrezgés gerjesztett rezgésként kezelhető. Azt is láttuk, hogy meg kell különböztetnünk azt az esetet, amikor az elmozdulásokat, vagy az azokból származtatott mennyiségeket (sebesség, gyorsulás), illetve azt az esetet, amikor az alakváltozásokat és az azokból származtatott mennyiségeket (igénybevételeket, feszültségeket) keressük. Egyszabadságfokú rendszereknél a két esetet a támasz mozgását helyettesítő tehervektor számítása is megkülönböztette, ugyanezt várjuk többszabadságfokú rendszerek esetén, ezért nézzük meg külön-külön, hogyan számíthatjuk a tehervektorokat a két esetben.

3.3.4.1. Többszabadságfokú rendszerek gerjesztése támaszmozgással: elmozdulások

A támaszrezgés kezeléséhez egészítsük ki a diszkretizált rendszerünket *külső* szabadságfokokkal, amik legyenek a támaszoknak az elmozdulásai. A meg nem támasztott szabadságfokokat *belső* szabadságfokoknak nevezzük, és rendezzük a szabadságfokokat úgy, hogy a belső szabadságfokok legyenek előbb, így az elmozdulások vektorát az alábbi, ún. *partícionált* alakban írhatjuk:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_b(t) \\ \underline{x}_k(t) \end{bmatrix} \tag{3.326}$$

Hasonló módon partícionálhatjuk a $\underline{q}(t)$ tehervektort, a tömegmátrixot és a merevségi mátrixot pedig a soraik és oszlopaik szerint is partícionálhatjuk[17], így a mozgásegyenlet alakja az alábbi lesz:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{bb} & \underline{\underline{M}}_{bk} \\ \underline{\underline{M}}_{kb} & \underline{\underline{M}}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{x}}_b(t) \\ \ddot{\underline{x}}_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{bb} & \underline{\underline{K}}_{bk} \\ \underline{\underline{K}}_{kb} & \underline{\underline{K}}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_b(t) \\ \underline{x}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q}_b(t) \\ \underline{q}_k(t) \end{bmatrix}. \tag{3.327}$$

Egy többszabadságfokú rendszer szokásos mozgásegyenletéhez képest a (3.327) egyenletben két fontos eltérésre kell felhívnunk a figyelmet. Az egyik, hogy a külső csomópontok elmozdulásai, azaz az $\underline{x}_k(t)$ vektor elemei ismertek, így azok második deriváltjai, azaz az $\ddot{\underline{x}}_k(t)$ vektor elemei is ismertek. A másik eltérés, hogy a jobb oldali $\underline{q}_k(t)$ vektorban, ahol a külső csomópontokra ható erők szerepelnek, megjelennek a külső reakciók is, amik ismeretlenek, így ezt a tehervektort írhatjuk a terhek és a reakciók összegeként:

$$\underline{q}_k(t) = \underline{q}_{k,teher}(t) + \underline{r}_k(t). \tag{3.328}$$

Az egyenletrendszerben tehát a szokásostól eltérő módon mindkét oldalon megjelennek ismert és ismeretlen időfüggő mennyiségek. Bontsuk szét az egyenletrendszert blokksoronként a belső és a külső szabadságfokok egyenleteire:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{bb} & \underline{\underline{M}}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{x}}_b(t) \\ \ddot{\underline{x}}_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{bb} & \underline{\underline{K}}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_b(t) \\ \underline{x}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q}_b(t) \end{bmatrix}, \tag{3.329}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{kb} & \underline{\underline{M}}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{x}}_b(t) \\ \ddot{\underline{x}}_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{kb} & \underline{\underline{K}}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_b(t) \\ \underline{x}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q}_{k,teher}(t) + \underline{r}_k(t) \end{bmatrix}. \tag{3.330}$$

A felbontás alapján a megoldási stratégia az lehet, hogy a (3.329) egyenlet alapján meghatározzuk a belső csomópontok elmozdulásait, hiszen abban csak azok szerepelnek ismeretlenként, majd annak ismeretében megoldjuk a (3.330) egyenletet az $\underline{r}_k(t)$ reakciókhoz.

A (3.329) egyenletben bontsuk fel a szorzásokat:

$$\underline{\underline{M}}_{bb}\ddot{\underline{x}}_b(t) + \underline{\underline{M}}_{bk}\ddot{\underline{x}}_k(t) + \underline{\underline{K}}_{bb}\underline{x}_b(t) + \underline{\underline{K}}_{bk}\underline{x}_k(t) = \underline{q}_b(t), \tag{3.331}$$

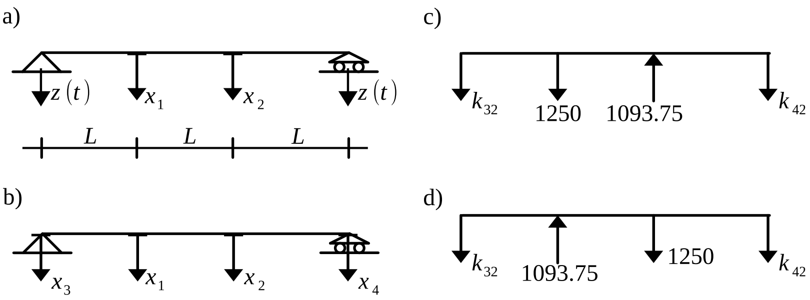
és vigyük át az ismert mennyiségeket a jobb oldalra:

$$\underline{\underline{M}}_{bb}\ddot{\underline{x}}_b(t) + \underline{\underline{K}}_{bb}\underline{x}_b(t) = \underline{q}_b(t) - \underline{\underline{K}}_{bk}\underline{x}_k(t) - \underline{\underline{M}}_{bk}\ddot{\underline{x}}_k(t), \tag{3.332}$$

A kapott egyenletrendszerben $\underline{\underline{M}}_{bb}$, $\underline{\underline{K}}_{bb}$ mátrixok és $\underline{x}_b(t)$ vektor a csak a belső csomópontok figyelembevételével számolt tömeg- és merevségi mátrix, és elmozdulásvektor, amit korábban indexek nélkül $\underline{\underline{M}}$-mel, $\underline{\underline{K}}$-val és $\underline{x}(t)$-vel jelöltünk. A jobb oldalon a

$$\underline{q}_b^t(t) = \underline{q}_b(t) - \underline{\underline{K}}_{bk}\underline{x}_k(t) - \underline{\underline{M}}_{bk}\ddot{\underline{x}}_k(t) \tag{3.333}$$

[17]Ezért lesz mindkét mátrixnak *bb*-, *bk*-, *kb*-, és *kk*-blokkja, amik rendre a belső-belső, belső-külső, külső-belső, külső-külső blokkoknak felelnek meg.



3.20. ábra. Kéttámaszú tartó támaszrezgése: a) a szerkezet modellje; b) a szerkezet modellje kiegészítve a külső szabadságfokokkal; c-d) a merevségi mátrix első és második oszlopának elemeinek számítása.

tehervektor az, ami a belső csomópontokra ható $\underline{q}_b(t)$ terhek mellett a támaszmozgást helyettesítő erőket is tartalmazza. A megoldás fő lépése tehát az

$$\underline{\underline{M}}_{bb}\ddot{\underline{x}}_b(t) + \underline{\underline{K}}_{bb}\underline{x}_b(t) = \underline{q}_b^t(t) \tag{3.334}$$

egyenletrendszer megoldása. A reakciókat a (3.330) egyenletből lehet meghatározni, az igénybevételek számításához pedig az

$$\underline{f}_s t(t) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{bb} & \underline{\underline{K}}_{bk} \\ \underline{\underline{K}}_{kb} & \underline{\underline{K}}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_b(t) \\ \underline{x}_k(t) \end{bmatrix} \tag{3.335}$$

erőket kell működtetni a szabadságfokokra és abból statikus módszerrel számolni az igénybevételeket.

A most bemutatott módszerrel tehát meghatározható az a gerjesztőerő, amit a szabadságfokokra kell működtetni, hogy helyettesítsük a támaszok mozgását amikor az elmozdulásokra van szükség. Megemlítjük, hogy ha a tömegmátrixot diszkrét rendszerben tömegpontokból, vagy diszkretizált rendszerben a tömegek pontokba redukálásával állítjuk elő, akkor a tömegmátrix diagonálmátrix lesz, így az $\underline{\underline{M}}_{bk}$ mátrix (és a $\underline{\underline{M}}_{kb}$ is) zérusmátrix lesz, mérete a külső és belső szabadságfokok számától függ. Ilyen esetben a támaszmozgásból származó gerjesztőerő önmagában a $-\underline{\underline{K}}_{bk}\underline{x}_k(t)$ szorzat lesz, ami talán leginkább hasonlít az egyszabadságfokú rendszereknél levezetett helyettesítő gerjesztőerőre (lásd a $-kz(t)$ tagot a (2.348) egyenlet jobb oldalán).

Ha egy támasz nem mozog, akkor a hozzá kapcsolódó komponense az $\underline{x}_k(t)$ vektornak nulla, a $\underline{\underline{K}}_{bk}$ mátrix neki megfelelő oszlopa nullával szorzódik, vagyis abból valóban nem keletkezik teher, viszont a reakciókat számolhatjuk a (3.330) egyenletből.

3.3.5. Példa (Többszabadságfokú rendszer harmonikus támaszmozgása)**.** *Számítsuk ki a 3.20.a) ábrán látható kéttámaszú tartó kétszabadságfokú modelljében a szabadságfokok maximális gyorsulását, ha a két támasz azonos fázisban rezeg a $z(t) = 0.03\cos(10t)$ harmonikus függvény szerint. Az egyes szabadságfokokba redukált tömegek $m = 10t$, a gerenda hajlítómerevsége $EI = 1800kNm^2$, támaszköze $L = 2.4m$.*

Megoldás
Először a kétszabadságfokú rendszer belső szabadságfokokhoz tartozó mátrixait kell kiszámítani. A tömegmátrix diagonálmátrix:

$$\underline{\underline{M}}_{bb} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}. \tag{3.336}$$

A merevségi mátrixot a hajlékonysági mátrixon keresztül számolhatjuk. Virtuális erők tételéből utóbbi elemei:

$$\underline{\underline{F}} = \frac{L^3}{9EI} \begin{bmatrix} 4 & 3.5 \\ 3.5 & 4 \end{bmatrix}. \tag{3.337}$$

Invertálást követően a merevségi mátrix:

$$\underline{\underline{K}}_{bb} = \frac{9EI}{3.75L^3} \begin{bmatrix} 4 & -3.5 \\ -3.5 & 4 \end{bmatrix}, \tag{3.338}$$

amibe behelyettesítve az értékeket:

$$\underline{\underline{K}}_{bb} = \begin{bmatrix} 1250 & -1093.75 \\ -1093.75 & 1250 \end{bmatrix}, \tag{3.339}$$

A következő lépésben a támaszmozgásból származó tehervektort kell előállítanunk. Egészítsük ki a rendszert a támaszoknál a 3. és 4. külső szabadságfokokkal a 3.20.b) ábra szerint, és írjuk fel a kiegészített rendszer mátrixait. Diagonál tömegmátrix használata esetén a külső szabadságfokokra jutó tömegek csak a reakciókat befolyásolják. Mivel csak egy-egy L hosszúságú szakasz kapcsolódik hozzájuk, tételezzük fel, hogy ezekből származó tömeg $m/2$ lesz:

$$\underline{\underline{M}}_{all} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \tag{3.340}$$

A kiegészített rendszer merevségi mátrixának elemeihez a mátrix fizikai jelentését használhatjuk. Az első oszlop elemei egyensúlyi helyzethez tartoznak, a 3.20.c) ábra mutatja ezeket az erőket. A végpontokra felírt nyomatéki egyenletekből:

$$\begin{aligned} k_{31} \cdot 3L + 1250 \cdot 2L - 1093.75 \cdot L = 0 \rightarrow \qquad & k_{31} = -468.75 \\ 1250 \cdot L - 1093.75 \cdot 2L + k_{41} \cdot 3L = 0 \rightarrow \qquad & k_{41} = 312.5. \end{aligned} \tag{3.341}$$

A második oszlop elemei is egyensúlyi helyzethez tartoznak, a 3.20.d) ábra mutatja ezeket az erőket. A végpontokra felírt nyomatéki egyenletekből:

$$\begin{aligned} k_{32} \cdot 3L - 1093.75 \cdot 2L + 1250 \cdot L = 0 \rightarrow \qquad & k_{32} = 312.5 \\ -1093.75 \cdot L + 1250 \cdot 2L + k_{42} \cdot 3L = 0 \rightarrow \qquad & k_{42} = -468.75. \end{aligned} \tag{3.342}$$

A merevségi mátrix szimmetrikus, így az első és második sor elemeit is tudjuk, végül a hiányzó négy elem a harmadik és a negyedik oszlop jelentése alapján számolható:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 1250 & -1093.75 & -468.75 & 312.5 \\ -1093.75 & 1250 & 312.5 & -468.75 \\ -468.75 & 312.5 & 208.33 & -52.08 \\ 312.5 & -468.75 & -52.08 & 208.33 \end{bmatrix}. \tag{3.343}$$

A megtámasztott szabadságfokok elmozdulásai és gyorsulásai:

$$\underline{x}_k(t) = \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.03 \end{bmatrix} \cos(10t), \qquad \underline{\ddot{x}}_k(t) = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} \cos(10t). \tag{3.344}$$

Ezeket felhasználva a (3.333) szerinti tehervektor felírható:

$$\underline{q}_b^t(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -468.75 & 312.5 \\ 312.5 & -468.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.03 \end{bmatrix} \cos(10t) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} \cos(10t) = \begin{bmatrix} 4.6875 \\ 4.6875 \end{bmatrix} \cos(10t). \tag{3.345}$$

A kibővített rendszer mátrixaiból a tehervektor előállításához rendre a jobb felső 2×2-es blokkokra lesz szükség: a méretnél a sorok száma a belső, az oszlopok száma a külső szabadságfokok számával egyezik meg, az csak véletlen, hogy ezek most megegyeztek.

A harmonikus helyettesítő gerjesztőerő ismeretében a rezgésegyenlet közvetlen megoldását (lásd (3.249)) használhatjuk a válasz amplitúdójának számításához:

$$\underline{x}_{g0} = \begin{bmatrix} 1250 - 10^2 \cdot 10 & -1093.75 \\ -1093.75 & 1250 - 10^2 \cdot 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4.6875 \\ 4.6875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.005556 \\ -0.005556 \end{bmatrix}, \tag{3.346}$$

amiből a válasz:

$$\underline{x}_g(t) = \begin{bmatrix} -0.005556 \\ -0.005556 \end{bmatrix} \cos(10t). \tag{3.347}$$

A negatív előjel a válasz fázisát mutatja: amikor a támaszok az egyensúlyi helyzethez képest lefelé mozdulnak el, akkor a szabadságfokok az egyensúlyi helyzethez képest felfelé. A szabadságfokok gyorsulásai az idő szerinti második deriválásból:

$$\underline{\ddot{x}}_g(t) = \begin{bmatrix} 0.5556 \\ 0.5556 \end{bmatrix} \cos(10t). \tag{3.348}$$

3.3.4.2. Többszabadságfokú rendszerek gerjesztése támaszmozgással: alakváltozások

Az alakváltozások, illetve alakváltozást okozó elmozdulások számításához tartozó tehervektor levezetéséhez ugyanúgy, mint az előbb, vezessük be a belső és külső szabadságfokokat, és írjuk fel azok mozgásegyenletét partícionált alakban:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{bb} & \underline{\underline{M}}_{bk} \\ \underline{\underline{M}}_{kb} & \underline{\underline{M}}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{x}}_b(t) \\ \ddot{\underline{x}}_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{bb} & \underline{\underline{K}}_{bk} \\ \underline{\underline{K}}_{kb} & \underline{\underline{K}}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_b(t) \\ \underline{x}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q}_b(t) \\ \underline{q}_k(t) \end{bmatrix} \tag{3.349}$$

A támaszok mozgására vezessük be azt a korlátozást, hogy az összes támasz mozgása egyetlen $z(t)$ skalárfüggvénnyel legyen arányos, és feleljen meg a támaszok merevtest-szerű elmozdulásának. Ezt indokolhatja például az, hogy az összes támasz azonos irányban és azonos kitéréssel mozog, vagy az, hogy egy olyan merev alaptesthez csatlakoznak, amelynek az elfordulása (ún. billegő mozgása) eredményezi a támaszok elmozdulásait. Az egyparaméteres támaszmozgás egyben azt jelenti, hogy a külső szabadságfokok elmozdulását

$$\underline{x}_k(t) = \underline{\iota}_k z(t) \tag{3.350}$$

alakban írhatjuk, ahol az $\underline{\iota}_k$ vektor a külső csomópontok *mutatóvektor*a, vagy *indexvektor*a, vagy *hatásvektor*a, és azt *mutatja meg*, hogy a támaszoknak a mozgás irányába történő egységnyi elmozdulása esetén mekkora az egyes külső szabadságfokok elmozdulása, mekkora az egységnyi támaszmozgás hatása. Ha csak vízszintes és függőleges eltolódási szabadságfokaink vannak, akkor egy vízszintes támaszrezgés esetén a vízszintes mozgást leíró szabadságfokok helyén 1, a függőleges mozgást leíró szabadságfokok helyén 0 van az $\underline{\iota}_k$ vektorban.

A mutatóvektor a szerkezet jellemzője, így időfüggetlen, tehát a külső szabadságfokok gyorsulása az alábbi lesz:

$$\ddot{\underline{x}}_k(t) = \underline{\iota}_k \ddot{z}(t) \tag{3.351}$$

A belső szabadságfokok elmozdulását bontsuk két részre. Az első rész legyen a belső szabadságfokoknak a teljes szerkezet merevtest-szerű elmozdulásából származó elmozdulása, a második rész pedig az ehhez hozzáadódó elmozdulások, amik az alakváltozásokat, azaz a támaszokhoz képesti elmozdulásokat tartalmazzák.

- A teljes szerkezet *merevtest-szerű elmozdulás*át a támaszok, és így a külső szabadságfokok kötött mozgása miatt időben a $z(t)$ függvény határozza meg. A belső szabadságfokok mozgásának merevtest-szerű részét az

$$\underline{x}_{b,m}(t) = \underline{\iota}_b z(t) \tag{3.352}$$

  képlettel számíthatjuk, ahol az $\underline{\iota}_b$ vektor a belső csomópontok *mutatóvektor*a, vagy *indexvektor*a, vagy *hatásvektor*a, és azt mutatja meg, hogy a támaszoknak a mozgás irányába történő egységnyi elmozdulása esetén mekkora az egyes belső szabadságfokok elmozdulása, mekkora az egységnyi támaszmozgás hatása. A külső szabadságfokokhoz hasonlóan itt is igaz, hogy ha csak vízszintes és függőleges eltolódási szabadságfokaink vannak, akkor egy vízszintes támaszrezgés esetén a vízszintes mozgást leíró szabadságfokok helyén 1, a függőleges mozgást leíró szabadságfokok helyén 0 van az $\underline{\iota}_b$ vektorban.

- Az *alakváltozást okozó elmozdulások*at jelöljük az $\underline{u}_b(t)$ vektorral. Mivel a merevtest-szerű mozgás a támaszokkal együtt mozgó szerkezet elmozdulásait tartalmazza, így az $\underline{u}_b(t)$ vektor elemei a támaszokhoz képesti elmozdulások lesznek, ez is indokolja, hogy a külső szabadságfokoknál nem említettük az $\underline{u}_k(t)$ vektort, hiszen az (a támaszok támaszokhoz képesti elmozdulása) nullvektor lenne.

A teljes elmozdulás a kettő összege lesz, azaz:

$$\underline{x}_b(t) = \underline{u}_b(t) + \underline{x}_{b,m}(t) = \underline{u}_b(t) + \underline{\iota}_b z(t), \tag{3.353}$$

míg a teljes gyorsulás:

$$\underline{\ddot{x}}_b(t) = \underline{\ddot{u}}_b(t) + \underline{\ddot{x}}_{b,m}(t) = \underline{\ddot{u}}_b(t) + \underline{\iota}_b \ddot{z}(t). \tag{3.354}$$

Helyettesítsük be a belső és külső szabadságfokok most kifejezett elmozdulásait és gyorsulásait a (3.349) egyenletbe:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{bb} & \underline{\underline{M}}_{bk} \\ \underline{\underline{M}}_{kb} & \underline{\underline{M}}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{u}}_b(t) + \underline{\iota}_b \ddot{z}(t) \\ \underline{\iota}_k \ddot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{bb} & \underline{\underline{K}}_{bk} \\ \underline{\underline{K}}_{kb} & \underline{\underline{K}}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_b(t) + \underline{\iota}_b z(t) \\ \underline{\iota}_k z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q}_b(t) \\ \underline{q}_k(t) \end{bmatrix} \tag{3.355}$$

Az egyenletrendszer ismeretlenei az $\underline{u}_b(t)$ vektor függvény elemei és a $\underline{q}_k(t)$ vektorban rejtőző külső reakcióerők függvényei. A megoldási stratégia most is az, hogy először a belső szabadságfokok egyenleteit írjuk át és oldjuk meg, majd az elmozdulások ismeretében a reakciókat a külső szabadságfokok egyenleteiből számoljuk. A belső szabadságfokok egyenletei:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{bb} & \underline{\underline{M}}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{u}}_b(t) + \underline{\iota}_b \ddot{z}(t) \\ \underline{\iota}_k \ddot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{bb} & \underline{\underline{K}}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_b(t) + \underline{\iota}_b z(t) \\ \underline{\iota}_k z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q}_b(t) \end{bmatrix}. \tag{3.356}$$

Bontsuk fel a szabadságfokok vektoraiban az összegzéseket az alábbi módon:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{u}}_b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_b(t) \end{bmatrix} + \\ &\qquad + \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{bb} & \underline{\underline{M}}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\iota}_b \ddot{z}(t) \\ \underline{\iota}_k \ddot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{bb} & \underline{\underline{K}}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\iota}_b z(t) \\ \underline{\iota}_k z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q}_b(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.357}$$

Az egyenletrendszer bal oldalán szereplő

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{bb} & \underline{\underline{K}}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\iota}_b z(t) \\ \underline{\iota}_k z(t) \end{bmatrix} \tag{3.358}$$

szorzatban az elmozdulások az összes (külső és belső) szabadságfok merevtest-szerű elmozdulását tartalmazzák. A merevségi mátrix fizikai jelentése szerint azokat az erőket számítja ki a mátrixot szorzó elmozdulásvektorból, ami az egyensúlyi állapotot fenttartja, mivel az elmozdulás miatti alakváltozások hatására a szabadságfokok nem lennének egyensúlyban. A merevtest-szerű elmozdulás esetén viszont nincsenek alakváltozások, zérus erőkkel fenn lehet tartani az egyensúlyt, ezért a (3.358) vektor egy nullvektor lesz.

A (3.356) egyenlet maradék részében rendezzük egy oldalra az ismeretlen $\underline{u}_b(t)$-t tartalmazó és nem tartalmazó tagokat:

$$\underline{\underline{M}}_{bb} \underline{\ddot{u}}_b(t) + \underline{\underline{K}}_{bb} \underline{u}_b(t) = \underline{q}_b(t) - \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{bb} & \underline{\underline{M}}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\iota}_b \ddot{z}(t) \\ \underline{\iota}_k \ddot{z}(t) \end{bmatrix} \tag{3.359}$$

A kapott egyenletrendszerben $\underline{\underline{M}}_{bb}$, $\underline{\underline{K}}_{bb}$ mátrixok a csak a belső csomópontok figyelembevételével számolt tömeg- és merevségi mátrix, amit korábban indexek nélkül $\underline{\underline{M}}$-mel és $\underline{\underline{K}}$-val jelöltünk. Az $\underline{u}_b(t)$ vektor a belső csomópontok támaszokhoz képesti elmozdulása (mivel a támaszok támaszokhoz képesti elmozdulása 0, így gyakran csak $\underline{u}(t)$-ként jelöljük), és bár az egyenlet hasonlít a többszabadságfokú rendszerek gerjesztett rezgésénél megszokott alakra, így a megoldását is hasonló módon hajthatjuk végre, de az $\underline{u}(t)$ mozgó koordinátarendszerben való definiáltsága miatt a tömegszer-gyorsulás tag nem tisztán Newton második törvényének az $m \cdot a$ oldala. A (3.359) egyenlet jobb oldalán a

$$\underline{q}_b^t(t) = \underline{q}_b(t) - \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{bb} & \underline{\underline{M}}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \iota_b \ddot{z}(t) \\ \iota_k \ddot{z}(t) \end{bmatrix} \tag{3.360}$$

tehervektor az, ami a belső csomópontokra ható $\underline{q}_b(t)$ terhek mellett a támaszmozgást helyettesítő erőket is tartalmazza. Ha csak a támaszmozgás terhét nézzük, akkor a tehervektor

$$\underline{q}_b^t(t) = - \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{bb} & \underline{\underline{M}}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \iota_b \ddot{z}(t) \\ \iota_k \ddot{z}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{bb} & \underline{\underline{M}}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \iota_b \\ \iota_k \end{bmatrix} \ddot{z}(t) \tag{3.361}$$

A $\ddot{z}(t)$ tagot szorzó mátrix-vektor-szorzatot az $\underline{m}$ vektorral jelöljük:

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{bb} & \underline{\underline{M}}_{bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \iota_b \\ \iota_k \end{bmatrix}, \tag{3.362}$$

ez az időtől független, viszont a támaszmozgás irányától az $\underline{\iota}$ vektorokon keresztül függő vektor a *támaszmozgás irányába mozgó szabadságfokonkénti tömegek vektora*. Az $\underline{m}$ vektort tehát úgy kaphatjuk meg, hogy a teljes szerkezet tömegmátrixát beszorozzuk a belső és külső csomópontoknak az egységnyi támaszmozgás hatására merevtest-szerű elmozdulásból létrejövő elmozdulásokból képzett mutatóvektorral, és a kapott vektornak vesszük a belső csomópontokhoz tartozó elemeit. A mozgó tömegek vektorát felhasználva a támaszmozgás miatti gerjesztést megadó tehervektor:

$$\underline{q}_b^t(t) = -\underline{m}\ddot{z}(t), \tag{3.363}$$

ami formailag az egyszabadságfokú rendszereknél levezetett (2.357) egyenlet jobb oldalán megjelenő $-m\ddot{z}(t)$ tagra hasonlít.

Tudjuk, hogy ha a tömegmátrixot diszkrét rendszerben tömegpontokból, vagy diszkretizált rendszerben a tömegek pontokba redukálásával állítjuk elő, akkor a tömegmátrix diagonálmátrix lesz, így az $\underline{\underline{M}}_{bk}$ mátrix (és a $\underline{\underline{M}}_{kb}$ is) zérusmátrix lesz, mérete a külső és belső szabadságfokok számától függ. Ilyen esetben a támaszmozgásból származó gerjesztőerő megegyezik a $-\underline{\underline{M}}_{bk}\iota_b\ddot{z}(t)$ képlettel számolttal, a tömegek vektora pedig az $\underline{\underline{M}}_{bk}\iota_b$ szorzattal, azaz nem követünk el hibát, ha tudatosan csak a belső csomópontokkal dolgozunk.

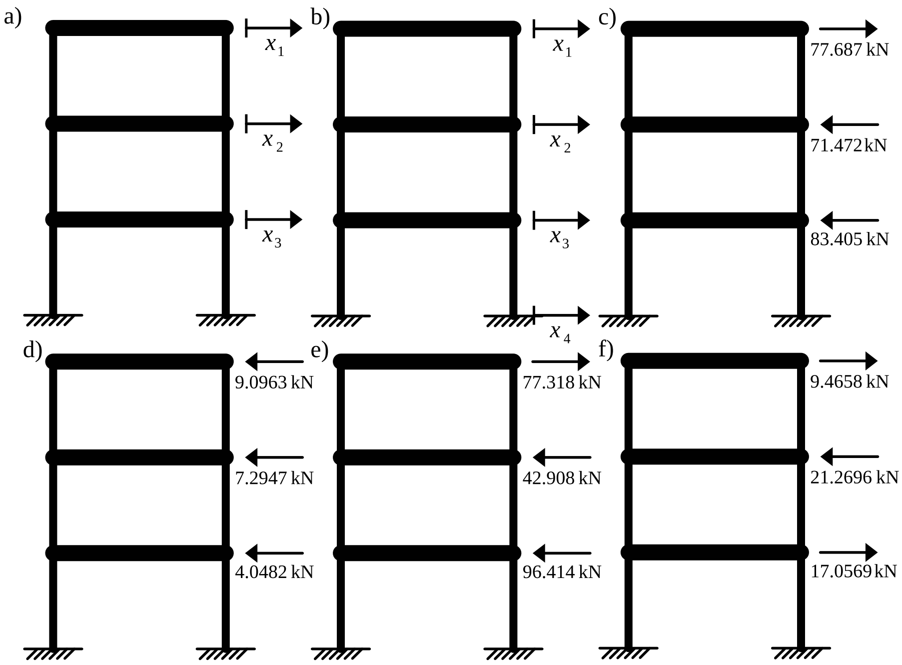
A megoldás fő lépése tehát az

$$\underline{\underline{M}}_{bb}\ddot{\underline{u}}_b(t) + \underline{\underline{K}}_{bb}\underline{u}_b(t) = -\underline{m}\ddot{z}(t) \tag{3.364}$$

egyenletrendszer megoldása, majd az $\underline{u}(t)$ ismeretében a (3.355) egyenlet második blokksorából:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{kb} & \underline{\underline{M}}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{u}}_b(t) + \iota_b \ddot{z}(t) \\ \iota_k \ddot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{kb} & \underline{\underline{K}}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_b(t) + \iota_b z(t) \\ \iota_k z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q}_k(t) \end{bmatrix} \tag{3.365}$$

megoldásaként a $\underline{q}_k(t)$ vektor elemeiből a reakciókat lehet számolni.



3.21. ábra. Háromszintes szerkezet támaszrezgése: a) a szerkezet modellje; b) a külső szabadságfokkal kiegészített modell; c) a maximális alakváltozásokat létrehozó statikus erőrendszer; d-f) a rezgésmódonként maximális igénybevételeket okozó erőrendszerek.

3.3.6. Példa (Többszabadságfokú rendszer harmonikus támaszmozgása)**.** *Határozzuk meg a 3.21.a) ábrán látható szerkezet oszlopaiban a maximális nyíróerőt és hajlítónyomatékot, ha a támasz vízszintesen* $0.05\cos(12t)$ *[m] függvény szerint rezeg. Az egyes szabadságfokokba redukált tömegek* $m = 9t$*, egy-egy oszlop hajlítómerevsége* $EI = 1800kNm^2$*, a szintek magassága* $h = 4m$*.*

Megoldás
Állítsuk elő először a belső szabadságfokokhoz tartozó tömeg- és merevségi mátrixot. A tömegmátrix:

$$\underline{\underline{M}}_{bb} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}. \tag{3.366}$$

A merevségi mátrixhoz egy oszlop helyettesítő merevsége az oszlopvégek befogott-befogott kapcsolata alapján:

$$k_o = \frac{12EI}{h^3} = \frac{12 \cdot 1800}{4^3} = 337.5. \tag{3.367}$$

Ezután a merevségi mátrix kompilálható (szintenként két-két oszloppal kell számolni):

$$\underline{\underline{K}}_{bb} = \begin{bmatrix} 675 & -6750 & \\ -675 & 675 & -675 \\ 0 & -675 & 1350 \end{bmatrix}. \tag{3.368}$$

Számoljunk modálanalízissel, ehhez numerikusan oldjuk meg az általánosított sajátértékfeladatot. A sajátkörfrekvenciák:

$$\omega_{01} = 3.8542\text{rad/s}, \qquad \omega_{02} = 10.7992\text{rad/s}, \qquad \omega_{03} = 15.6052, \tag{3.369}$$

A tömegmátrixra normált sajátvektorok pedig:

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.24566 \\ 0.19700 \\ 0.10933 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.19700 \\ 0.10933 \\ 0.24566 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.10933 \\ -0.24566 \\ 0.19700 \end{bmatrix}. \tag{3.370}$$

A támaszmozgást helyettesítő tehervektorhoz kiegészítjük a rendszert egy negyedik, külső szabadságfokkal a 3.21.b) ábra szerint. A rendszer merevtestszerű elmozdítása esetén minden szabadságfok egységnyivel mozdul el, így a mutatóvektor

$$\begin{bmatrix} \underline{\iota}_b \\ \underline{\iota}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.371}$$

lesz. Mivel diagonál tömegmátrixot használunk, ezért a külső szabadságfokok miatt kiegészített tömegmátrix belső szabadságfokoknak megfelelő soraiban csak nullák szerepelnek a külső szabadságfokok oszlopaiban, ezért a támaszmozgás irányába mozgó tömegek vektora:

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}. \tag{3.372}$$

A helyettesítő terhek vektora (3.364) alapján:

$$\underline{q}(t) = -\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} (-12^2) 0.05 \cos(12t) = \begin{bmatrix} 64.8 \\ 64.8 \\ 64.8 \end{bmatrix} \cos(12t). \tag{3.373}$$

Az egyes rezgésmódokban (3.280) alapján a válasz amplitúdója:

$$y_{g10} = \begin{bmatrix} 0.24566 & 0.19700 & 0.10933 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 64.8 \\ 64.8 \\ 64.8 \end{bmatrix} \frac{1}{3.8542^2} \frac{1}{1 - \frac{12^2}{3.8542^2}} =$$

$$= -0.276967. \tag{3.374}$$

$$y_{g20} = \begin{bmatrix} -0.19700 & 0.10933 & 0.24566 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 64.8 \\ 64.8 \\ 64.8 \end{bmatrix} \frac{1}{10.7992^2} \frac{1}{1 - \frac{12^2}{10.7992^2}} = \\ = -0.373925. \quad (3.375)$$

$$y_{g30} = \begin{bmatrix} 0.10933 & -0.24566 & 0.19700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 64.8 \\ 64.8 \\ 64.8 \end{bmatrix} \frac{1}{15.6052^2} \frac{1}{1 - \frac{12^2}{15.6052^2}} = \\ = 0.039504. \quad (3.376)$$

A szerkezet válasza tehát az alábbi lesz:

$$\underline{u}_g(t) = (\underline{v}_1 y_{g10} + \underline{v}_2 y_{g20} + \underline{v}_3 y_{g30}) \cos(12t) = \begin{bmatrix} 0.009944 \\ -0.1051485 \\ -0.1143559 \end{bmatrix} \cos(12t), \quad (3.377)$$

aminek az amplitúdóját az alábbi statikus erőrendszer hozza létre:

$$\underline{f}_{st} = \underline{\underline{K}} \begin{bmatrix} 0.009944 \\ -0.1051485 \\ -0.1143559 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77.687 \\ -71.472 \\ -83.405 \end{bmatrix} \text{kN}, \quad (3.378)$$

Ezt az erőrendszert ábrázoltuk a 3.21.c) ábrán, amiből az oszlopok igénybevételeit tudjuk kiolvasni. A legfelső szint oszlopait elvágva a metszet fölötti rész egyensúlya alapján ennek a szintnek a nyíróereje 77.687kN, egy oszlopra ennek a fele jut:

$$V_f = \frac{77.687}{2} = 38.844\text{kN}. \quad (3.379)$$

A befogott-befogott oszlop alsó és felső végein $V \cdot h/2$ nagyságú hajlítónyomaték keletkezik, azaz

$$M_f = 38.844 \frac{4}{2} = 77.687\text{kNm}. \quad (3.380)$$

A középső szint oszlopait elvágva a metszet fölötti rész egyensúlya alapján ennek a szintnek a nyíróereje $77.687 - 71.472 = 6.215$kN, egy oszlopra enneg a fele jut:

$$V_k = \frac{6.215}{2} = 3.108\text{kN}. \quad (3.381)$$

A befogott-befogott oszlop alsó és felső végein $V \cdot h/2$ nagyságú hajlítónyomaték keletkezik, azaz

$$M_k = 3.108 \frac{4}{2} = 6.215\text{kNm}. \quad (3.382)$$

A legalsó szint oszlopait elvágva a metszet fölötti rész egyensúlya alapján ennek a szintnek a nyíróereje $77.687 - 71.472 - 83.405 = -77.190$kN, egy oszlopra enneg a fele jut:

$$V_a = \frac{-77.190}{2} = -38.595\text{kN}. \tag{3.383}$$

A befogott-befogott oszlop alsó és felső végein $V \cdot h/2$ nagyságú hajlítónyomaték keletkezik, azaz

$$M_a = -38.595\frac{4}{2} = -77.190\text{kNm}. \tag{3.384}$$

Harmonikus gerjesztésről lévén szó az előjelek itt a fázist mutatják.

Az $\underline{u}$ vektorból kiolvashatók az egyes oszlopok alakváltozásai is, így a k_o merevséggel az azt létrehozó igénybevételeket közvetlenül megkaphatjuk. Például a felső oszlop alakváltozása:

$$\Delta u_f = 0.009944 - (-0.1051485) = 0.1150925, \tag{3.385}$$

az ezt létrehozó vízszintes eltolóerő, ami egyben az oszlop nyíróereje:

$$V_f = k_o \Delta u_f = 337.5 \cdot 0.1150925 = 38.844\text{kN}. \tag{3.386}$$

Az ugyanezen eltoláshoz tartozó hajlítónyomaték pedig:

$$M_f = \frac{6EI}{h^2}\Delta u_f = 675 \cdot 0.1150925 = 77.687\text{kNm}. \tag{3.387}$$

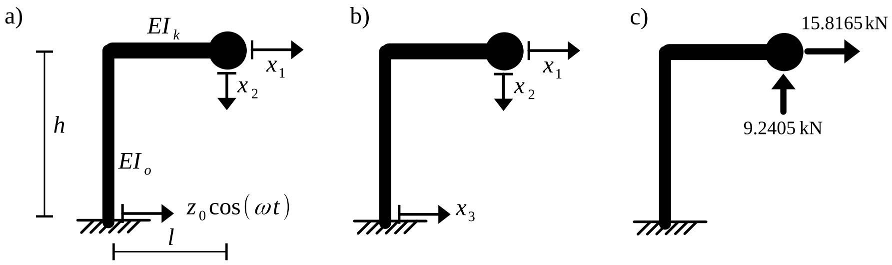
Természetesen mindegyik megegyezik az előbbi módszerrel számított eredménnyel.

Az igénybevételeket és az azokat létrehozó erőrendszereket *rezgésmódonként* is számolhattuk volna. Az első rezgésalak legnagyobb kitérésének megfelelő alakot az alábbi statikus erőrendszer hozná létre:

$$\underline{f}_{st1} = \underline{\underline{K}}\underline{v}_1 y_{g01} = \omega_{01}^2 \underline{\underline{M}}\underline{v}_1 y_{g01} = \begin{bmatrix} -9.0963 \\ -7.2947 \\ -4.0482 \end{bmatrix} \text{kN}, \tag{3.388}$$

A másik két módban pedig hasonló számítás alapján:

$$\underline{f}_{st2} = \begin{bmatrix} 77.318 \\ -42.908 \\ -96.414 \end{bmatrix} \text{kN}, \qquad \underline{f}_{st3} = \begin{bmatrix} 9.4658 \\ -21.2696 \\ 17.0569 \end{bmatrix} \text{kN}, \tag{3.389}$$



3.22. ábra. Konzolos oszlop támaszrezgése: a) a szerkezet modellje; b) a külső szabadságfokkal kiegészített modell; c) a maximális alakváltozásokat létrehozó statikus erőrendszer.

Ezeket az erőrendszereket ábrázoltuk a 3.21.d)-f) ábrán. A már látotthoz hasonló számítás alapján egy középső oszlop nyíróereje rezgésmódonként:

$$V_k^1 = \frac{-9.0963 - 7.2947}{2} = -8.1730, V_k^2 = \frac{77.318 - 42.908}{2} = 17.205, \\ V_k^3 = \frac{9.4658 - 21.2696}{2} = -5.9019, \tag{3.390}$$

melyek összege:

$$V_k = V_k^1 + V_k^2 + V_k^3 = 3.130\text{kN}, \tag{3.391}$$

akárcsak a fenti számításnál. Az összegzésnél kihasználtuk, hogy a harmonikus gerjesztés miatt az előjelek a gerjesztéshez képesti fázis adták meg.

3.3.7. Példa (Többszabadságfokú rendszer harmonikus támaszmozgása)**.** *Határozzuk meg a 3.22.a) ábrán látható szerkezet befogási keresztmetszetében a maximális hajlítónyomatékot, ha a támasz vízszintesen* $0.05\cos(4t)$ *[m] függvény szerint rezeg. A két szabadságfokba redukált tömeg egyaránt* $m = 9t$*, az oszlop hajlítómerevsége* $EI_o = 2400kNm^2$*, magassága* $h = 4.5m$*, a konzol hajlítómerevsége* $EI_k = 1800kNm^2$*, hossza* $l = 3.6m$*.*

Megoldás

A harmonikus gerjesztésre tekintettel a differenciálegyenlet közvetlen megoldására levezetett (3.249) képletet használjuk.

A tömegmátrix a két szabadságfoknak megfelelően

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \text{t}. \tag{3.392}$$

A merevségi mátrixhoz először a hajlékonysági mátrixot számítjuk ki. A részletek mellőzésével a mátrix elemei paraméteres és számadatokkal:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{h^3}{3EI_o} & \frac{h^2 l}{2EI_o} \\ \frac{h^2 l}{2EI_o} & \frac{hl^2}{EI_o} + \frac{l^3}{3EI_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.012656 & 0.015188 \\ 0.015188 & 0.032940 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{kN}}, \tag{3.393}$$

Aminek inverze a merevségi mátrix:

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{F}}^{-1} = \begin{bmatrix} 176.872 & -81.549 \\ -81.549 & 67.958 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}, \tag{3.394}$$

A támaszmozgást helyettesítő harmonikus teher amplitúdójának vektorát a (3.364) képlet alapján számoljuk. A szerkezetet a 3.22.b) ábrának megfelelően egészítsük ki a mozgó támasznak megfelelő külső szabadságfokkal.

Mivel diagonál-tömegmátrixot használunk, ezért a mozgó tömegek vektorának (3.362) szerinti számításánál a harmadik oszlopba csupa nulla kerül. Az egységnyi merevtest-szerű vízszintes elmozdítás esetén az első és a harmadik szabadságfok eltolódása egy lesz, a másodiké nulla, így a mutatóvektor elemei rendre 1, 0 és 1 lesznek. Ezekkel az $\underline{m}$ vektor:

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.395}$$

A $z(t) = z_0 \cos(\omega t)$ függvény szerint mozgó támasz gyorsulása az idő szerinti kétszeri deriválás után

$$\ddot{z}(t) = -z_0 \omega^2 \cos(\omega t), \tag{3.396}$$

így a tehervektor amplitúdója:

$$\underline{q}_0 = -\underline{m}(-\omega^2 z_0) = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 4^2 \cdot 0.05 = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.397}$$

A válasz amplitúdóvektora:

$$\begin{aligned} \underline{u}_{g0} &= \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right)^{-1} \underline{q}_0 = \\ &= \begin{bmatrix} 32.872 & -81.549 \\ -81.549 & -75.042 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.059837 \\ -0.064170 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.398}$$

Mint tudjuk, az amplitúdónak megfelelő elmozdulásokat létrehozó erőrendszert a merevségi mátrix segítségével számíthatjuk:

$$\underline{f}_g = \underline{\underline{K}} \underline{q}_0 = \begin{bmatrix} 15.8165 \\ -9.2405 \end{bmatrix}. \tag{3.399}$$

Ezt az erőrendszert láthatjuk a 3.22.c) ábrán, A második szabadságfokra ható erő előjelét a nyíl irányával vettük figyelembe. Ebből a két erőből a befogási keresztmetszetben a hajlítónyomaték:

$$M_{max} = 15.8165 \cdot 4.5 - 9.2405 \cdot 3.6 = 37.908 \mathrm{kNm}. \tag{3.400}$$

A kapott eredmény szorzódik az állandósult rezgés során $\cos(\omega t)$-vel, ami -1 és $+1$ között változik, így a maximumhoz a fenti eredmény abszolútértékére van szükség:

$$\boxed{M_{max} = 37.908\text{kNm}} \tag{3.401}$$

3.3.5. Többszabadságfokú rendszerek földrengésvizsgálata

Szerkezetek földrengésvizsgálatánál elsősorban az igénybevételekre van szükségünk, a támaszok pedig azonos fázisban, azonos irányban mozognak, ezért a vizsgálatot a 3.3.4.2. alpontban bemutatott teherrel végezzük. A feladatunk tehát az

$$\underline{\underline{M}}\underline{\ddot{u}}(t) + \underline{\underline{K}}\underline{u}(t) = -\underline{m}\ddot{z}(t) \tag{3.402}$$

differenciálegyenlet megoldása általános, illetve ismeretlen $z(t)$ függvény esetén. A feladat megoldását csillapítatlan rendszerre mutatjuk be. A tartószerkezetekben jellemző kis csillapítás esetén a gondolatmenet csak annyiban változik, hogy a válaszspektrumot a csillapítási hányadnak megfelelő válaszspektrumként kell előállítani és használni.

3.3.5.1. Előírt $z(t)$ földrengés vizsgálata

Többszabadságfokú rendszerek gerjesztett rezgéseinek vizsgalat során már többször is láthattuk, hogy a számítást nagyban megkönnyíti, ha a kapcsolt differenciálegyenletet átalakítjuk közönséges differenciálegyenletekké, melyek megoldása lényegesen egyszerűbb. Az egymással nem kapcsolt változókra való áttérést a *modálanalízis* segítségével érhetjük el, ami feltételezi, hogy ismerjük a (3.71) megoldásaként a rendszer ω_{0j} sajátkörfrekvenciáit és a $\underline{v}_j$ tömegmátrixra normált sajátvektorokat. A differenciálegyenlet megoldását keressük a rezgésalakok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{u}_g(t) = \underline{\underline{V}}\underline{y}_g(t) = \sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j y_{gj}(t). \tag{3.403}$$

Fenti képletben $\underline{\underline{V}}$ a tömegmátrixra normált sajátvektorokat tartalmazó modálmátrix, $\underline{y}(t)$ pedig az egyes rezgésalakok modális koordinátáit tartalmazó vektor. Mivel a rendszer $\underline{\underline{K}}$ és $\underline{\underline{M}}$ mátrixai időben állandók, így a rezgésjellemzők, például a $\underline{\underline{V}}$ mátrix sem változik, ezért a gyorsulások vektora

$$\underline{\ddot{u}}_g(t) = \underline{\underline{V}}\underline{\ddot{y}}_g(t). \tag{3.404}$$

alakban írható. A keresett alakot és a második deriváltját helyettesítsük be a (3.402) egyenletbe:

$$\underline{\underline{M}}\underline{\underline{V}}\underline{\ddot{y}}_g(t) + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{V}}\underline{y}_g(t) = -\underline{m}\ddot{z}(t), \tag{3.405}$$

és szorozzuk meg mindkét oldalt balról a modálmátrix transzponáltjával, azaz $\underline{\underline{V}}^T$-vel:

$$\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{M}}\underline{\underline{V}}\underline{\ddot{y}}_g(t) + \underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{K}}\underline{\underline{V}}\underline{y}_g(t) = -\underline{\underline{V}}^T\underline{m}\ddot{z}(t). \tag{3.406}$$

A sajátvektorok (3.179) szerinti tulajdonságait felhasználva a bal oldalon két diagonálmátrixot kaptunk:

$$\underline{\underline{I}}\underline{\ddot{y}}_g(t) + \underline{\underline{\Omega}}^2\underline{y}_g(t) = -\underline{\underline{V}}^T\underline{m}\ddot{z}(t), \tag{3.407}$$

a jobb oldalon pedig egy olyan vektort, aminek a j-edik eleme a j-edik sajátvektor transzponáltjának és a támaszmozgás irányába mozgó tömegek vektorának a szorzata, azaz a tömegek vektorának vetülete a $\underline{v}_j$ sajátvektorra. Ezt a vetületet *modális részvétel*nek nevezzük és Γ_j-vel jelöljük:

$$\Gamma_j = \underline{v}_j^T\underline{m}. \tag{3.408}$$

A modális részvétel tehát a rezgésmódhoz és a támaszmozgás irányához tartozó mennyiség, melynek négyzete a *modális tömeg*:

$$m_j = \Gamma_j^2 \tag{3.409}$$

Gyűjtsük a Γ_j értékeket a $\underline{\Gamma}$ vektorba:

$$\underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_N \end{bmatrix} = \underline{\underline{V}}^T\underline{m} = \underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{M}}\underline{\iota} \tag{3.410}$$

így az egyenletrendszert úgy írhatjuk, hogy:

$$\underline{\underline{I}}\underline{\ddot{y}}_g(t) + \underline{\underline{\Omega}}^2\underline{y}_g(t) = -\underline{\Gamma}\ddot{z}(t), \tag{3.411}$$

A bal oldali diagonálmátrixok miatt az egyenletrendszer j-edik sorában csak $\ddot{y}_{gj}(t)$ és $y_{gj}(t)$ szorzódik nullától különböző értékkel, ezért az egyenletrendszer *szétesik* N közönséges differenciálegyenletté. A példaként mondott j-edik sorból az lesz, hogy:

$$\ddot{y}_{gj}(t) + \omega_{0j}^2 y_{gj}(t) = -\Gamma_j\ddot{z}(t), \tag{3.412}$$

ami egy olyan csillapítatlan egyszabadságfokú rendszernek a differenciálegyenlete, melynek a tömege egységnyi, a rugómerevsége ω_{0j}^2, így a sajátkörfrekvenciája ω_{0j}, és a támaszrezgésből származó $-\Gamma_j\ddot{z}(t)$ erő gerjeszti. A (2.25) egyenlet megoldására korábban levezetett tetszőleges megoldásba behelyettesítve a fenti paramétereket a modális válasz megkapható.

A modális válaszból teherbírás vizsgálata esetén csak a szélsőértékre vagyunk kiváncsiak. A 2.6.2. szakaszban bemutattuk, hogy egy egységnyi tömegű rendszer esetén egy $z(t)$ támaszmozgás hatására a maximális kitérés az elmozdulás-válaszspektrumnak az adott sajátperiódushoz tartozó értékével egyenlő (hiszen így definiáltuk az S_u elmozdulás-válaszspektrumot). A (3.412) egyenletben ennek a támaszmozgásnak a Γ_j-szerese szerepel, ezért a modális kitérés maximuma

$$y_{gj}^{max} = \Gamma_j \cdot S_u(T_{0j}) \tag{3.413}$$

lesz. Ebből a maximális modális kitérésből származik a j-edik rezgésalakkal kialakuló legnagyobb kitérés, ami

$$\underline{u}_{j,max} = \underline{v}_j \cdot y_{gj}^{max} = \underline{v}_j\Gamma_j \cdot S_u(T_{0j}). \tag{3.414}$$

Az ugyanebben a rezgésalakban létrejövő legnagyobb igénybevételeket ebből az elmozdulásból, vagyis az ugyanekkora eltolódást létrehozó statikus erőrendszerből számolhatjuk. A számításhoz a merevségi mátrix fizikai jelentését használjuk fel, a $\underline{\underline{K}}$ mátrixot szorozva az elmozdulások vektorával megkapjuk az elmozdulást létrehozó erőrendszert. A j-edik módban ez:

$$\underline{f}_{j,max} = \underline{\underline{K}}\underline{x}_{j,max} = \underline{\underline{K}}\underline{v}_j \cdot \Gamma_j \cdot S_u(T_{0j}). \tag{3.415}$$

Fenti képletben a $\underline{v}_j$ vektor a többszabadságfokú rendszer sajátvektora, ami kielégíti a (3.80) egyenletet ($\underline{\underline{K}}\underline{v}_j = \omega_{0j}^2 \underline{\underline{M}}\underline{v}_j$), ezért

$$\underline{f}_{j,max} = \omega_{0j}^2 \underline{\underline{M}}\underline{v}_j \cdot \Gamma_j \cdot S_u(T_{0j}). \tag{3.416}$$

A képletben megjelenő $\omega_{0j}^2 S_u(T_{0j})$ szorzat az elmozdulási-válaszspektrum és az $S_a(T_{0j})$ pszeudogyorsulás-válaszspektrum közötti kapcsolatnak (lásd (2.368)) megfelelően a pszeudogyorsulás-válaszspektrum adott sajátperiódushoz tartozó értéke, így a maximális modális igénybevételeket létrehozó erőrendszert az

$$\underline{f}_{j,max} = \underline{\underline{M}}\underline{v}_j \cdot \Gamma_j \cdot S_a(T_{0j}) \tag{3.417}$$

képlettel számolhatjuk.

3.3.5.2. Tervezési válaszspektrum használata

A 2.6.2.1. alpontban bemutattuk, hogy ha nem ismerjük a leendő földrengést, akkor a szabvány milyen támpontot ad az egyszabadságfokú rendszerek esetén a maximális igénybevételt okozó helyettesítő statikus teher meghatározására (lásd (2.371)). A többszabadságfokú rendszerek vizsgálatát egyszabadságfokú rendszerekre vezettük vissza, így itt is használható ugyanez az eljárás, egyedül a pszeudogyorsulás-válaszspektrum $S_a(T_{0j})$ értékét kell lecserélnünk a (3.417) képletben a tervezési válaszspektrum $S_d(T_{0j})$ értékére:

$$\underline{f}_{j,max} = \underline{\underline{M}}\underline{v}_j \cdot \Gamma_j \cdot S_d(T_{0j}) \tag{3.418}$$

Egy S keresztmetszet C_{Sj} maximális igénybevételét a j-edik rezgésalakban ebből az erőrendszerből kell számolni.

Következő kérdés az egyes módokban számított maximumok összegzése. Ismert teher esetén a modális válaszok összegzését lehet a $\sum_{j=1}^{N} \underline{v}_j y_j(t)$ összegből számolni, a válaszspektrummal történő számítás esetén viszont minden egyes modális szélsőérték a rezgés miatt lehet pozitív vagy negatív, és felléphetnek azonos, vagy eltérő pillanatokban. Éppen ezért a modális maximumok összegzésére különböző módszerek használatosak, ezekből mutatunk néhány példát (zárójelben a szokásos rövidítésekkel).

Abszolútértékek összege. (ABSSUM[18]) Ez a legegyszerűbb összegzési mód, amikor az egyes módok maximumainak az abszolútértékét összegezzük, azaz:

$$C_S^{ABSSUM} = \sum_{j=1}^{N} |C_{Sj}|. \tag{3.419}$$

[18] Absolute values summarized

Az ABSSUM használatával azt feltételezzük, hogy mindegyik rezgésalakban azonos pillanatban és azonos előjellel fog fellépni a maximális igénybevétel. Egy 20s-ig tartó földrengés már hosszú rengésnek számít, és ez alatt is valószínűtlen, hogy sok rezgésalak esetén ez az egyidejűség bekövetkezzen, ezért a módszer a biztonság javára felülről közelít, a gazdaságosság szempontjából viszont a legrosszabb közelítés ez.

A négyzetösszegből vont négyzetgyök. (SRSS[19]) Az összegzés elnevezése meg is adja a számítási módot:

$$C_S^{SRSS} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} C_{Sj}^2}, \tag{3.420}$$

vagy ha a modális maximumokat egy $\underline{C}_S$ vektorba gyűjtjük, akkor ugyanerre az eredményre vezet az alábbi képlet:

$$C_S^{SRSS} = \sqrt{\underline{C}_S^T \underline{C}_S} = \sqrt{\underline{C}_S^T \underline{\underline{I}} \underline{C}_S}, \tag{3.421}$$

Ez az összegzési mód a négyzetreemelés révén nagyobb jelentőséget ad annak a modális eredménynek, amelyik igénybevétele kiemelkedik a többihez képest.

Négyzetösszegből vont négyzetgyök kiemelt első alakkal. Ez az összegzés figyelembe veszi azt, hogy az alacsonyabb rezgésalakok hatása általában nagyobb a szerkezetek válaszában, ezért kiemeli a négyzetösszegből az első alakból származó maximumot:

$$C_S = |C_{S1}| + \sqrt{\sum_{j=2}^{N} C_{Sj}^2}, \tag{3.422}$$

Teljes kvadratikus kombináció. (CQC[20]) Ez az összegzés a csillapítás azon hatását veszi figyelembe az összegzésben, hogy a szerkezeti csillapítás esetén a csillapítatlan rendszer rezgésalakjai nem függetlenek egymástól, közeli sajátkörfrekvenciák esetén jelentős hatásuk lehet egymásra. Ezért az összegzés egy olyan

$$C_S^{CQC} = \sqrt{\underline{C}_S^T \underline{\underline{\varrho}} \underline{C}_S}, \tag{3.423}$$

képlettel történik, ahol a $\underline{\underline{\varrho}}$ kombinációs mátrix j,k-eleme:

$$\rho_{jk} = \frac{8\xi^2 \left(1 + \frac{\omega_{0j}}{\omega_{0k}}\right) \left(\frac{\omega_{0j}}{\omega_{0k}}\right)^{3/2}}{\left(1 - \left(\frac{\omega_{0j}}{\omega_{0k}}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2 \left(1 + \frac{\omega_{0j}}{\omega_{0k}}\right)^2}. \tag{3.424}$$

A képletből kiolvasható, hogy egymáshoz közeli sajátkörfrekvenciák esetén nagyobb a hatás, csillapítatlan esetben pedig $\xi = 0$ miatt a kombinációs mátrix azonos lesz az egységmátrixszal, a módszer pedig az SRSS-sel.

[19]Square root of the sum of the squares.
[20]Complete Quadratic Combination

Mindegyik összegzési módszer esetén a végeredmény egy pozitív $C_{S,max}$ érték lesz, így a teherkombinációkban kell figyelembe venni azt, hogy a rezgés oda-vissza jellege miatt nem ismerjük az előjelet.

A földrengésvizsgálatnál a teher a rendszer tömegéből származik, ezért lehet lényeges megvizsgálni, hogy a számítás során a teljes tömeg mekkora részét vettük figyelembe. A modális részvétel definíciójakor (3.409)-ben definiáltuk a modális tömeget is. Ezek összege a *hatékony (effektív) tömeg*:

$$m_{eff} = \sum_{j=1}^{N} m_j. \tag{3.425}$$

A hatékony tömeget a modális részvételek $\underline{\Gamma}$ vektorából is számíthatjuk az alábbi módon:

$$m_{eff} = \underline{\Gamma}^T\underline{\Gamma} = \left(\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{M}}\underline{\iota}\right)^T \underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{M}}\underline{\iota} = \underline{\iota}^T\underline{\underline{M}}\underline{\underline{V}}\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{M}}\underline{\iota}. \tag{3.426}$$

A hatékony tömeg nem azonos a szerkezet teljes tömegével. A szerkezet diszkretizálása esetén a megtámasztott szabadságfokokba redukált tömegek nem jelennek meg a hatékony tömegben.

3.3.8. Példa (Többszabadságfokú rendszer földrengésvizsgálata)**.** *Határozzuk meg a 3.3.6. példában vizsgált, a 3.23.a) ábrán megismételt szerkezet alsó oszlopainak maximális nyíróerejét, a 3.23.b) ábrán látható tervezési válaszspektrummal megadott földrengésteherből. Az egyes szabadságfokokba redukált tömegek* $m = 9t$*, egy-egy oszlop hajlítómerevsége* $EI = 1800kNm^2$*, a szintek magassága* $h = 4m$*. A válaszspektrum adatai:* $T_B = 0.2s$, $T_C = 0.9s$, $T_D = 1.5s$, $a_{gR} = 1.1m/s^2$, $S_d^{max} = 2.5 \cdot a_{gR}$.

Megoldás

A 3.23.a) ábrán ismét felrajzoltuk a szerkezetet. Emlékeztetőül a sajátkörfrekvenciák:

$$\omega_{01} = 3.8542\text{rad/s}, \qquad \omega_{02} = 10.7992\text{rad/s}, \qquad \omega_{03} = 15.6052, \tag{3.427}$$

a tömegmátrixra normált sajátvektorok pedig:

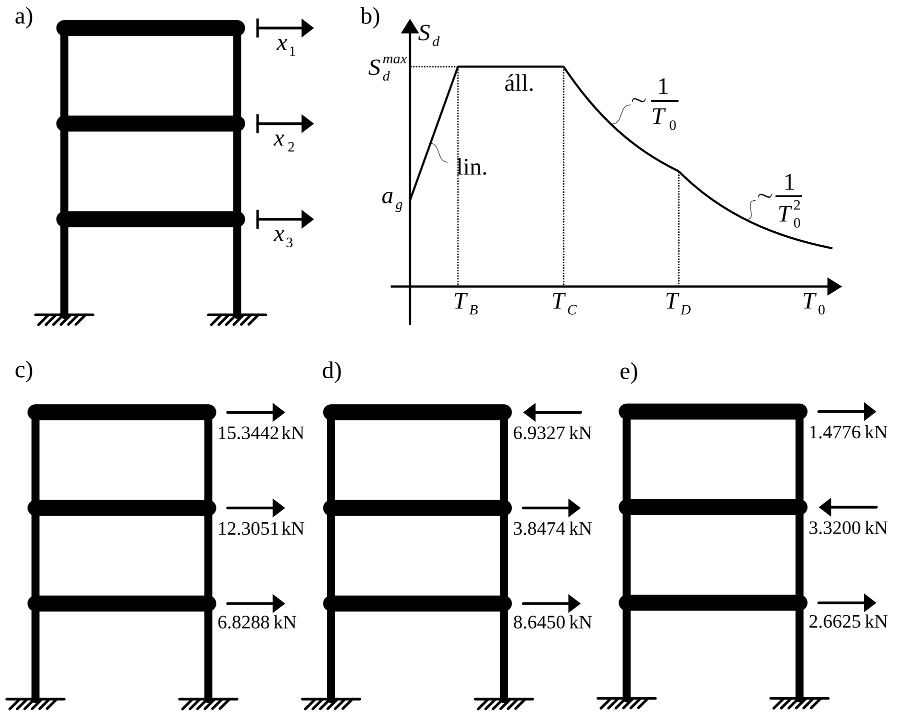
$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.24566 \\ 0.19700 \\ 0.10933 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.19700 \\ 0.10933 \\ 0.24566 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.10933 \\ -0.24566 \\ 0.19700 \end{bmatrix}. \tag{3.428}$$

A pszeudogyorsulás-válaszspektrum tervezési értékeihez szükségünk van a rezgésalakok periódusidejére, ezek:

$$\begin{aligned} T_{01} &= \tfrac{2\pi}{3.8542} = 1.6302\text{s}, \\ T_{02} &= \tfrac{2\pi}{10.7992} = 0.58182\text{s}, \\ T_{03} &= \tfrac{2\pi}{15.6052} = 0.40263\text{s}. \end{aligned} \tag{3.429}$$

Az első periódusidő nagyobb a T_D-nél, ezért mindkét hiperbolikus függvényt meg kell határoznunk. $T_0 = T_C$-nél a konstans függvény értéke S_d^{max}, ebből a hiperbolikus függvény:

$$S_d(T_0) = S_d^{max}\frac{T_C}{T_0}. \tag{3.430}$$



3.23. ábra. Háromszintes szerkezet földrengésvizsgálata: a) a szerkezet modellje b) a tervezési válaszspektrum; c-e) az egyes rezgésmódokban maximális igénybevételeket okozó erőrendszer

Ezután $T_0 = T_D$-nél a hiperbolikus függvény értéke $S_d^{max}\frac{T_C}{T_D}$, amiből a kvadratikus hiperbolikus függvény:

$$S_d(T_0) = S_d^{max}\frac{T_C T_D}{T_0^2}. \tag{3.431}$$

A második és harmadik periódusidő a platóra esik, így a három tervezési spektrumérték:

$$S_{d,1} = 1.3970\mathrm{m/s}^2, \qquad S_{d,2} = 2.75\mathrm{m/s}^2, \qquad S_{d,3} = 2.75\mathrm{m/s}^2. \tag{3.432}$$

A támaszmozgás irányába mozgó szabadságfokonkénti tömegek vektora:

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \tag{3.433}$$

amiből a modális részvétel:

$$\Gamma_1 = \underline{v}_1^T \underline{m} = 4.96791, \qquad \Gamma_2 = \underline{v}_2^T \underline{m} = 1.42186, \qquad \Gamma_3 = \underline{v}_3^T \underline{m} = 0.54605. \tag{3.434}$$

A rezgésmódonkénti igénybevételt rendre a (3.418) képlet szerint, azaz az

$$\underline{f}_{j,max} = \underline{\underline{M}}\underline{v}_j \cdot \Gamma_j \cdot S_d(T_{0j}) \tag{3.435}$$

képlettel számolt erőrendszer szerkezetre működtetésével kaphatjuk meg. Ezek eredményeit rezgésmódonként mutatjuk a 3.23.c)-e) ábrákon.

A legalsó szinten az *alapnyíróerő*[a] értéke rendre az erők összege, azaz

$$V_{b,1} = 34.47816\text{kN}, \qquad V_{b,2} = 5.55962\text{kN}, \qquad V_{b,3} = 0.81998\text{kN}. \tag{3.436}$$

Egy-egy oszlopra ennek mindig a fele jut (szintenként mindenhol két-két oszlop van, így a vizsgált legalsó szinten is), így egy oszlopra a módonkénti nyíróerő-maximum az alsó szinten:

$$V_{a,1} = 17.23908\text{kN}, \qquad V_{a,2} = 2.77981\text{kN}, \qquad V_{a,3} = 0.40999\text{kN}. \tag{3.437}$$

Összegzésre az ABSSUM és az SRSS összegzést mutatjuk meg:

$$V_{a,max}^{ABSSUM} = |17.23908| + |2.77981| + |0.40999| = 20.429\text{kN}, \tag{3.438}$$

$$V_{a,max}^{SRSS} = \sqrt{17.23908^2 + 2.77981^2 + 0.40999^2} = 17.467\text{kN}. \tag{3.439}$$

[a] Angolul base shear.

3.3.6. Többszabadságfokú rendszerek numerikus rezgésszámítása

3.3.6.1. A sajátértékfeladat részleges megoldása

A többszabadságfokú modellekkel a valóságban folytonos szerkezetek viselkedését szeretnénk modellezni a szükséges pontossággal. Azt is láttuk, hogy a többszabadságfokú rendszer válaszában modálanalízis használatakor a magasabb rezgésmódok részesedése egyre csökken. Ez a csökkenés bizonyos számú alak fölött már elhanyagolhatóvá teszi ezeknek a tagoknak a hatását, ha viszont nem számolunk a magasabb rezgésalakokkal, akkor azokat és a hozzájuk tartozó sajátkörfrekvenciákat sem kell kiszámolnunk.

Az építőmérnöki szoftverekben használt numerikus algoritmusok szerencsére pont olyanok, hogy az általánosított sajátértékfeladat megoldásakor sorrendben az első, második, harmadik, stb. (azaz a legkisebb) sajátkörfrekvenciákat és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat adják eredményül, így megoldható, hogy csak az első n rezgésalakot számítsa és vegye figyelembe a program. Ha n kisebb a szabadságfokok számánál, azaz $n < N$, akkor a sajátértékfeladat részleges megoldásáról beszélünk.

Ha csak n sajátvektorral számolunk, akkor a modális mátrixban is csak n oszlop ismert, vezessük be ennek a mátrixnak a jelölésére a felülvonást:

$$\underline{\underline{\bar{V}}} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \dots & \underline{v}_n \end{bmatrix}. \tag{3.440}$$

Modálanalízis során a megoldást az n sajátvektor kombinációjaként keressük, azaz a modális koordináták $\underline{\bar{y}}(t)$ vektorának is csak n eleme lesz, azaz a közelítő megoldás az alábbi lesz:

$$\underline{x}(t) \approx \underline{\underline{\bar{V}}}\,\underline{\bar{y}}(t) \tag{3.441}$$

A modálanalízisnél megszokott módon ezt behelyettesíthetjük a mozgás mátrix-differenciálegyenletébe, majd mindkét oldalt balról beszorozhatjuk $\underline{\underline{\bar{V}}}^T$-tal. A részleges megoldás esetén is igazak maradnak a sajátvektorok tulajdonságai, azaz a tömegmátrixra normáltság (3.81), annak következménye (3.167), valamint a tömegmátrixra és a merevségi mátrixra való páronkénti ortogonalitás (3.174) és (3.177). Ezeket röviden a (3.179) egyenletekhez hasonlóan írhatjuk fel (a felülvonás a diagonálmátrixoknál az $n \times n$-es méretre utal):

$$\underline{\underline{\bar{V}}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\bar{V}}} = \underline{\underline{\bar{I}}}, \qquad \underline{\underline{\bar{V}}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\bar{V}}} = \underline{\underline{\bar{\Omega}}}^2 \tag{3.442}$$

Ezeknek a tulajdonságoknak a felhasználásával a kapcsolt differenciálegyenletrendszer most is szétesik közönséges differenciálegyenletekre, de N helyett csak n egyenletünk lesz[21]. A rezgésmódonkénti számítások tehát változatlanok lesznek, csak a végső összegzést kevesebb alakra végezzük el.

Annak eldöntésére, hogy hány rezgésalakot kell figyelembe vennünk, három dolgot kell figyelembe vennünk.

- A teher időbeli változását a szerkezetnek követnie kell, ezért nagyobb hibát eredményezhet, ha olyan sajátkörfrekvenciájú alakot is elhanyagolunk, ami lassabban vállozik a tehernél. Ebben az esetben előfordulhat, hogy olyan alakot is elhagyunk, ami a rezonanciához közeli állapotban gerjesztődik. Ezt elkerülendő periodikus gerjesztés esetén a legmagasabb figyelembe vett sajátkörfrekvencia legyen nagyobb a gerjesztés legmagasabb figyelembe vett felharmonikusánál.
- A részleges modálanalízis során a teljes $\underline{q}(t)$ tehervektor helyett csak a

  $$\underline{\bar{q}}(t) = \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\bar{V}}}\,\underline{\underline{\bar{V}}}^T \underline{q}(t) \tag{3.443}$$

  tehervektor hatását számoljuk. A hibát a

  $$\Delta\underline{q}(t) = \underline{q}(t) - \underline{\bar{q}}(t) \tag{3.444}$$

  képlettel számolhatjuk, a fajlagos hibát pedig

  $$q_{err}(t) = \frac{|\Delta\underline{q}(t)|}{|\underline{q}(t)|} \tag{3.445}$$

  hányadossal.
- Földrengésvizsgálat esetén a terhet a pszeudogyorsulás és a tömeg szorzata eredményezi, így az elegendő teher figyelembevétele az elegendő tömeg figyelembevételével egyenértékű. Az összes alak figyelembevétele esetén

[21] Formálisan az összes sajátvektorból álló $\underline{\underline{V}}$ mátrixszal is szorozhattunk volna, a kihagyott sajátvektorok ortogonalitási tulajdonsága miatt az $n+1$-edik sortól kezdve a bal oldalon csupa nullák szerepelnénk, a jobb oldalon viszont az ezekre a módokra jutó vetületei a gerjesztésnek, amiket a közelítés során kihagyunk a számításból.

a (3.443) képletben az $\underline{\underline{MVV}}^T$ szorzat egy egységmátrixot eredményezne[22], míg az $\underline{\underline{MVV}}^T\underline{\underline{M}}$ szorzat a tömegmátrixot eredményezi. Részleges modálanalízi esetén a $\underline{\underline{M\bar{V}\bar{V}}}^T\underline{\underline{M}}$ szorzat a tömegmátrix közelítése lenne. A korábban látottak alapján a földrengésteher számításához a

$$\underline{\bar{\Gamma}} = \underline{\underline{\bar{V}}}^T\underline{\underline{M}}\underline{i} \tag{3.446}$$

szorzat a figyelembevett rezgésalakok modális részvételeit tartalmazza. Ennek elemeinek négyzetösszegét számolhatjuk:

$$\sum_{j=1}^{n} \Gamma_j^2 = \underline{\bar{\Gamma}}^T\underline{\bar{\Gamma}} = \underline{i}^T\underline{\underline{M}}^T\underline{\underline{\bar{V}\bar{V}}}^T\underline{\underline{M}}\underline{i}. \tag{3.447}$$

Látjuk, hogy a képletben megjelenik a tömegmátrix $\underline{\underline{M\bar{V}\bar{V}}}^T\underline{\underline{M}}$ közelítése, a számított skalár pedig a figyelembe vett (hatékony) tömeg. A modális részvétel négyzetét ezért nevezzük modális tömegnek:

$$m_j = \Gamma_j^2, \tag{3.448}$$

a hatékony tömeg ezek összege:

$$\bar{m}_{eff} = \sum_{j=1}^{n} m_j, \tag{3.449}$$

a figyelembe vett rezgésalakok számát pedig úgy kell megválasztani, hogy a teljes tömeg szabvány által előírt hányada megjelenjen a számításban.

3.3.6.2. A helyettesítő statikus terhek módszere

Az egyszerű szerkezetek földrengésvizsgálatára a szabvány megengedi a helyettesítő statikus terhek módszerének alkalmazását. Ekkor a szerkezet alap periódusidejének (esetleg közelítő) számítása után az ahhoz tartozó pszeudogyorsulást kell a tervezési válaszspektrumból kiolvasni, majd azt az épület tömegével beszorozva kapjuk az *alap nyíróerőt*[23]:

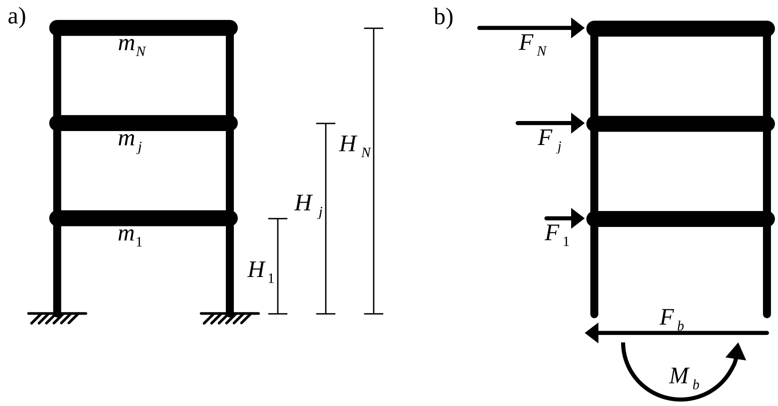
$$F_b = mS_d. \tag{3.450}$$

Ezután a statikus erőből kell a szintenkénti eltolóerőt, illetve felborító nyomatékot számítani. A kapott erőt a magasság mentén el kell osztani és az egyes szintekre működtetni. A terhek szintenkénti elosztásánál a gyorsulás magasság menti lineáris növekedését kell feltételezni úgy, hogy az erők eredője a teljes erőt adja. Jelölje H_j a j-edik szint támaszok feletti magasságát, m_j pedig annak tömegét. Így a j-edik szintre az

$$F_j = \frac{H_j m_j}{\sum_{k=1}^{N} H_k m_k} F_b. \tag{3.451}$$

[22]Hiszen a (3.179) egyenlet alapján a $\underline{\underline{V}}^T$ és az $\underline{\underline{MV}}$ mátrixok egymás inverzei

[23]Base shear.



3.24. ábra. Földrengésvizsgálat helyettesítő statikus módszerrel: a) a szerkezet modellje b) a teher szintenkénti elosztása, igénybevételek az alapszinten.

erőt kell működtetni[24], a felborító nyomaték[25] pedig

$$M_b = \sum_{j=1}^{N} H_j \frac{H_j m_j}{\sum_{k=1}^{N} H_k m_k} F_b. \tag{3.452}$$

Az alapnyíróerőből az oszlopok és merevítőfalak nyíróerőit és hajlítónyomatékait tudjuk számolni, a felborító nyomatékból pedig az oszlopok többletnormálerejét.

A 3.24. ábra mutatja a számítás során használt és kapott mennyiségek értelmezését.

A helyettesítő statikus terhek módszere tehát lényegében egy olyan redukált modálanalízis, ahol egyetlen, közelítőleg meghatározott rezgésalakból számolunk igénybevételeket, viszont a modális tömeg helyett a szerkezet teljes tömegét vesszük figyelembe.

3.3.6.3. A mozgásegyenlet numerikus megoldása

A többszabadságfokú rendszerek mozgásegyenletének numerikus megoldására három lehetőséget említünk, utalva a 2.5.3 szakaszban egyszabadságfokú rendszereknél bemutatott módszerekre.

Time-history analízis a modálanalízisen belül Mivel a modálanalízis során a kapcsolt differenciálegyenlet szétesik egyszabadságfokú rendszerek közönséges differenciálegyenleteire, azokat a 2.5.3 szakaszban látott módszerek bármelyikével megoldhatjuk, majd az egyes rezgésmódok eredményeit időlépésenként összegezhetjük.

Cauchy-Euler-, és Runge-Kutta-típusú módszerek A 2.5.3.1-2.5.3.3. alpontok módszerei többszabadságfokú rendszerek esetén a skalármennyiségek értelemszerű vektorokkal, mátrixokkal való behelyettesítése után használhatók.

[24] Gyakorlásként ellenőrizhető, hogy a szintenkénti erők összege valóban az alap nyíróerőt adja.

[25] overturning moment.

Az i-edik pillanatban az elmozdulások vektorát $\underline{u}_i$-vel, a sebességek vektorát $\underline{v}_i$-vel jelölve a mozgás differenciálegyenlete:

$$\underline{\underline{M}}\dot{\underline{v}}_i + \underline{\underline{C}}\underline{v}_i + \underline{\underline{K}}\underline{u}_i = \underline{q}_i \tag{3.453}$$

Ami átírható a sebesség deriváltjára:

$$\dot{\underline{v}}_i = -\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{C}}\underline{v}_i - \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}\underline{u}_i + \underline{q}_i. \tag{3.454}$$

Ezzel, és az elmozdulások

$$\dot{\underline{u}}_i = \underline{v}_i \tag{3.455}$$

szerinti deriváltjával az időlépésenkénti növekmények, és így az új értékek számolhatók. Cauchy-Euler módszerrel például:

$$\underline{u}_{i+1} = \underline{u}_i + \Delta t \cdot \dot{\underline{u}}_i, \qquad \underline{v}_{i+1} = \underline{v}_i + \Delta t \cdot \dot{\underline{v}}_i, \tag{3.456}$$

Newmark módszer A Newmark-módszer alapelve többszabadságfokú szerkezetek vizsgálata során is az, hogy a gyorsulás időlépésen belüli változására feltételezünk egy függvényt. Ennek a változásnak a segítségével paraméteresen kifejezzük a kezdőponti elmozdulás, sebesség, gyorsulás és a végponti elmozdulás segítségével a végponti sebességet és gyorsulást. Utóbbiakkal felírva a mozgásegyenletet a végpontban, behelyettesítés után egy, csak a végponti elmozdulást tartalmazó egyenletet kapunk.

Jelölje $\underline{a}_j$ és $\underline{a}_{j+1}$ a gyorsulást az időlépés kezdő- és végpontjában. Az időlépés közben változzon a gyorsulás az alábbi képlet szerint:

$$\underline{a}(t_j + \tau\Delta t) = \underline{a}_j + (\underline{a}_{j+1} - \underline{a}_j)f(\tau). \tag{3.457}$$

Azaz bevezettünk egy dimenziótlan τ időt, ami az időlépés során 0 és 1 között változik, és egy $f(\tau)$ függvényt, ami a gyorsulás változásának függvénye. A valóságban az $f(\tau)$ függvény időlépésről-időlépésre változhat, a számításhoz viszont rögzítettnek tekintjük az alakját. (Pár lehetséges példát mutatott az egyszabadságfokú rendszereknél a 2.31. ábra.)

A gyorsulásfüggvény ismeretében felírhatjuk a sebességfüggvényt is:

$$\underline{v}(t_j + \tau\Delta t) = \underline{v}_j + \int_{t_j}^{t_j+\tau\Delta t} \underline{a}(t_j + T)dT. \tag{3.458}$$

A gyorsulás (3.457) szerinti képletét behelyettesítve és az integrálást elvégezve kihasználhatjuk, hogy az $\underline{a}_j$, $\underline{a}_{j+1}$ értékek időben nem változnak, az idő és a dimenziótlan idő között pedig Δt szorzó van, így azt kapjuk, hogy:

$$\underline{v}(t_j + \tau\Delta t) = \underline{v}_j + \underline{a}_j\tau\Delta t + (\underline{a}_{j+1} - \underline{a}_j)\Delta t \int_0^{\tau} f(\mathcal{T})d\mathcal{T}. \tag{3.459}$$

Vezessük be az alábbi jelölést:

$$g(\tau) = \int_0^{\tau} f(\mathcal{T})d\mathcal{T}. \tag{3.460}$$

Amennyiben az $f(\tau)$ függvényt rögzítettük, úgy a $g(\tau)$ függvény is ismertnek tekinthető, és így a sebességfüggvény az időlépés alatt:

$$\underline{v}(t_j + \tau\Delta t) = \underline{v}_j + \underline{a}_j\tau\Delta t + (\underline{a}_{j+1} - \underline{a}_j)\Delta t \cdot g(\tau). \tag{3.461}$$

Jelölje α a $g(1)$ értéket. Ezt felhasználva a sebesség az időlépés végén:

$$\underline{v}_{j+1} = \underline{v}_j + \underline{a}_j \Delta t + (\underline{a}_{j+1} - \underline{a}_j)\Delta t \alpha. \tag{3.462}$$

A sebességfüggvény ismeretében felírhatjuk az elmozdulásfüggvényt:

$$\underline{u}(t_j + \tau\Delta t) = \underline{u}_j + \int_{t_j}^{t_j+\tau\Delta t} \underline{v}(t_j + T) dT. \tag{3.463}$$

A sebesség (3.461) szerinti képletét behelyettesítve és az integrálást elvégezve kihasználhatjuk, hogy a $\underline{v}_j$, $\underline{a}_j$, $\underline{a}_{j+1}$ értékek időben nem változnak, az idő és a dimenziótlan idő között pedig Δt szorzó van, így azt kapjuk, hogy:

$$\underline{u}(t_j + \tau\Delta t) = \underline{u}_j + \underline{v}_j \tau\Delta t + \underline{a}_j \frac{(\tau\Delta t)^2}{2} + (\underline{a}_{j+1} - \underline{a}_j)\Delta t^2 \int_0^\tau g(\mathcal{T}) d\mathcal{T}. \tag{3.464}$$

Jelölje β az $\int_0^1 g(\mathcal{T}) d\mathcal{T}$ értékét. Ezt felhasználva az elmozdulás az időlépés végén:

$$\underline{u}_{j+1} = \underline{u}_j + \underline{v}_j \Delta t + \underline{a}_j \frac{\Delta t^2}{2} + (\underline{a}_{j+1} - \underline{a}_j)\Delta t^2 \beta. \tag{3.465}$$

Ezután fejezzük ki a sebesség és a gyorsulás végponti értékeit a végponti elmozdulás segítségével. A gyorsulás (3.465) alapján:

$$\underline{a}_{j+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\underline{u}_{j+1} - \frac{1}{\beta\Delta t^2}\underline{u}_j - \frac{1}{\beta\Delta t}\underline{v}_j + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\underline{a}_j \tag{3.466}$$

majd ebből a sebesség (3.462) alapján:

$$\underline{v}_{j+1} = \frac{\alpha}{\beta\Delta t}\underline{u}_{j+1} - \frac{\alpha}{\beta\Delta t}\underline{u}_j + \underline{v}_j\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \underline{a}_j\Delta t\left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right) \tag{3.467}$$

Az így kifejezett mennyiségeket helyettesítsük be a mozgás differenciálegyenletébe a t_{j+1} pillanatban:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{M}} \cdot \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}\underline{u}_{j+1} - \frac{1}{\beta\Delta t^2}\underline{u}_j - \frac{1}{\beta\Delta t}\underline{v}_j + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\underline{a}_j\right] + \\ + \underline{\underline{C}} \cdot \left[\frac{\alpha}{\beta\Delta t}\underline{u}_{j+1} - \frac{\alpha}{\beta\Delta t}\underline{u}_j + \underline{v}_j\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \underline{a}_j\Delta t\left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right)\right] + \\ + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{u}_{j+1} = \underline{q}_{j+1}.\end{aligned} \tag{3.468}$$

Az ismeretlen $\underline{u}_{j+1}$ együtthatóit egyik, az előző lépésből ismert $\underline{u}_j$, $\underline{v}_j$, $\underline{a}_j$ mennyiségeket pedig a másik oldalra rendezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left[\underline{\underline{K}} + \frac{\alpha}{\beta\Delta t}\underline{\underline{C}} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\underline{\underline{M}}\right]\underline{u}_{j+1} = \\ \underline{q}_{j+1} + \underline{\underline{M}} \cdot \left[+\frac{1}{\beta\Delta t^2}\underline{u}_j + \frac{1}{\beta\Delta t}\underline{v}_j - \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\underline{a}_j\right] + \\ + \underline{\underline{C}} \cdot \left[\frac{\alpha}{\beta\Delta t}\underline{u}_j - \underline{v}_j\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) - \underline{a}_j\Delta t\left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.469}$$

A baloldalon az $\underline{u}_{j+1}$ együtthatóját hatékony merevségnek nevezzük:

$$\underline{\underline{K}}_{eff} = \underline{\underline{K}} + \frac{\alpha}{\beta \Delta t}\underline{\underline{C}} + \frac{1}{\beta \Delta t^2}\underline{\underline{M}}, \tag{3.470}$$

a jobb oldalt pedig hatékony tehernek:

$$\begin{aligned} \underline{q}_{eff} = \underline{q}_{j+1} + \underline{\underline{M}} \cdot \left[+ \frac{1}{\beta \Delta t^2}\underline{u}_j + \frac{1}{\beta \Delta t}\underline{v}_j - \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\underline{a}_j \right] + \\ + \underline{\underline{C}} \cdot \left[\frac{\alpha}{\beta \Delta t}\underline{u}_j - \underline{v}_j \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) - \underline{a}_j \Delta t \left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.471}$$

Így a mozgásegyenlet a

$$\underline{\underline{K}}_{eff}\underline{u}_{j+1} = \underline{q}_{eff,j+1} \tag{3.472}$$

alakú lesz. A $\underline{\underline{K}}_{eff}$ mátrix minden időlépésben azonos, ezért érdemes meghatározni és eltárolni a $\underline{\underline{K}}_{eff}^{-1}$ inverz mátrixot, így minden egyes időlépésben csak a hatékony teher aktuális értékét kell kiszámítani, majd a következő időlépés elmozdulásai az

$$\underline{u}_{j+1} = \underline{\underline{K}}_{eff}^{-1}\underline{q}_{eff,j+1} \tag{3.473}$$

módon számíthatók, végül az új sebességeket és gyorsulásokat a (3.467) és (3.466) képletekből számíthatjuk.

3.4. Keretek rezgésvizsgálata

3.4.1. Keretmodell: szabadsági fokok

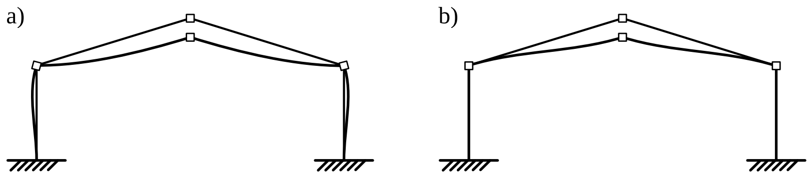
A rezgés szempontjából vizsgált építőmérnöki szerkezetek egy jelentős részét az ún. keretmodellel vizsgáljuk, amikor egy síkbeli keretként tekintünk a szerkezet elemeire, azt egymáshoz kapcsolt oszlopokból és gerendákból felépítve.

Keretszerkezeteket ma már szinte kizárólagosan számítógépes programmal vizsgálunk statikus és dinamikus terhekre egyaránt, de a programok használójának is illik ismernie a számítás alapjául szolgáló mechanikai hátteret. Ezt tekintjük át ebben a fejezetben síkbeli keretekre vonatkozóan.

A programok jellemzően elmozdulásmódszeren alapulnak, és olyan egyszerű algoritmusok vezérlik, melynek segítségével egy többszabadságfokú rendszer vizsgálatára vezetik vissza a számítást. A keret elemekre bontásához első lépésben csomópontokat kell felvenni, majd a csomóponti elmozdulásokból képezzük a szabadságfokokat.

Csak eltolódási szabadságfokok felvétele esetén a merevségi mátrix fizikai jelentéséből[26] arra juthatunk, hogy egyetlen csomópont elmozdítása esetén is az egész szerkezet alakváltozásokat szenved (lásd a 3.25.a) ábrát), vagyis az egyensúly fenntartásához minden szabadságfokra erőt kell működtetni, azaz a mátrix előállításához mindig a teljes szerkezetet kell figyelembe venni. Csomópontonként egy elfordulási szabadságfok hozzáadása esetén az egyes csomópontok közötti szakaszok (elemek) közül csak azok deformálódnak, melyeknek az

[26]Emlékeztetőül: a merevségi mátrix egy oszlopában azok a szabadságfokokra működtetendő erők vannak, amik hatására az összes szabadságfok a helyén marad, kivéve a mátrix oszlopának megfelelő szabadságfokot, melynek az elmozdulása éppen 1 lesz.



3.25. ábra. Keretmodell szabadságfokai: a) csak eltolódási szabadságfokoknál az egész szerkezet deformálódik, b) elfordulási szabadságfokokkal csak a kapcsolódó elemek deformálódnak.

egyik vége az érintett szabadságfok csomópontja (lásd a 3.25.b) ábra). A deformálatlan elemekről nem adódik át erő a szabadságfokokra, így a merevségi mátrixban sok elem zérus marad. Az elemekre bontás másik hatása, hogy az egyes elemekről a csomópontokra, szabadságfokokra átadódó erőket, nyomatékokat elemenként külön kezelhetjük, így a teljes merevségi mátrixot az elemi merevségi mátrixokból kompilálhatjuk.

A globális koordinátarendszer XY-síkjában levő keret j-edik csomópontjának elmozdulásvektora tehát az u_{jX}, u_{jY} eltolódásokból és a φ_{jZ} elfordulásból áll:

$$\underline{u}_j = \begin{bmatrix} u_{jX} \\ u_{jY} \\ \varphi_{jZ} \end{bmatrix}. \tag{3.474}$$

A teljes szerkezet elmozdulásvektora pedig írható az összes elemével (itt a helytakarékosság miatt egy sorvektor transzponáltjaként):

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_{1X} & u_{2Y} & \varphi_{1Z} & u_{2X} & u_{2Y} & \varphi_{2Z} & \dots & u_{NX} & u_{NY} & \varphi_{NZ} \end{bmatrix}^T, \tag{3.475}$$

vagy ún. blokkos alakban:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \vdots \\ \underline{u}_N \end{bmatrix}, \tag{3.476}$$

A merevségi mátrix számítása így algoritmizálhatóvá, gépesítve egyszerűbbé válik, igaz, a szabadságfokok száma, és így az egyenletek száma is megnövekszik. Az elfordulási szabadságfokokra vonatkozó sorok nyomatéki egyenleteket fejeznek majd ki.

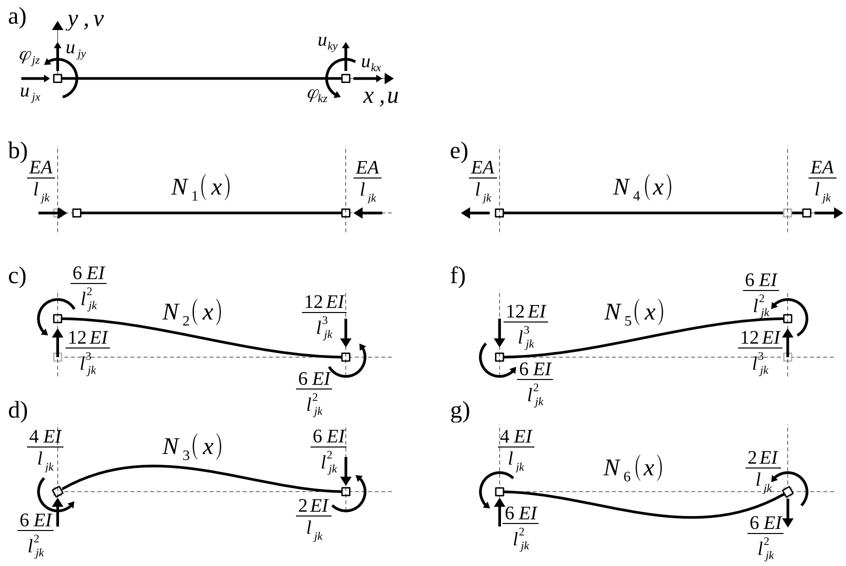
A továbbiakban áttekintjük, hogyan lehet a merevségi és a tömegmátrixot előállítani egy keretszerkezet egy eleme esetén, majd röviden áttekintjük, hogy lépésekkel lehet a teljes szerkezet merevségi mátrixát kompilálni.

3.4.2. Keret merevségi mátrixa

3.4.2.1. Elemi merevségi mátrix

Tekintsünk a j és k csomópontok közötti l hosszúságú rúdelemet, aminek a normálmerevsége EA, hajlítómerevsége EI. A rúdelemet a lokális xy-koordinátarendszerben vizsgáljuk, a hajlítás a z-tengely körül történik[27]. A kezdő és vég-

[27] Azaz az I inercia a keresztmetszet z-tengelyre vett I_z tehetetlenségi nyomatéka.



3.26. ábra. Rúdelem merevségi mátrixa: a) a jk-rúdelem és a szabadságfokai; b)-g) az egyes szabadsági fokokhoz tartozó merevségimátrix-oszlopnak megfelelő elmozdult alak és az egyensúlyt biztosító rúdvégi erők.

pont hat szabadságfoka alkotja az elem elmozdulásvektorát:

$$\underline{u}_{jk} = \begin{bmatrix} u_{jx} \\ u_{jy} \\ \varphi_{jz} \\ u_{ky} \\ u_{ky} \\ \varphi_{kz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}_j \\ \underline{u}_k \end{bmatrix}, \tag{3.477}$$

ezeket az elmozdulásokat mutatja a 3.26.a) ábra.

A jk-elem elemi merevségi mátrixa a lokális koordinátarendszerben:

$$\underline{\underline{K}}_{jk} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}. \tag{3.478}$$

3.4.2.2. Elemi merevségi mátrix fizikai jelentése

A 3.26.b)-g) ábrák az egyes szabadságfokok egységnyi elmozdítása miatt létrejövő elmozdult alakokat és az egyensúlyt fenntartó rúdvégi, azaz csomóponti erőket mutatják. A merevségi mátrix fizikai jelentése alapján a csomóponti erők a mátrix egy-egy oszlopának elemeivel egyenlők (a 3.26.b) ábra erői az első, a 3.26.c) a második, a 3.26.d) a harmadik oszlopnak, és így tovább). Látszik, hogy a mátrix szimmetrikus.

A merevségi mátrixot szokás blokkos alakban is írni:

$$\underline{\underline{K}}_{jk} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{jk}^{jj} & \underline{\underline{K}}_{jk}^{jk} \\ \underline{\underline{K}}_{jk}^{kj} & \underline{\underline{K}}_{jk}^{kk} \end{bmatrix}. \tag{3.479}$$

A blokkos felírásmódot használva az $\underline{u}_{jk}$ rúdvégi elmozdulások miatt a csomópontokra ható rugalmas visszatérítő az alábbi alakban írható:

$$\underline{f}_{r,jk} = -\underline{\underline{K}}_{jk}\underline{u}_{jk} = -\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{jk}^{jj}\underline{u}_j + \underline{\underline{K}}_{jk}^{jk}\underline{u}_k \\ \underline{\underline{K}}_{jk}^{kj}\underline{u}_j + \underline{\underline{K}}_{jk}^{kk}\underline{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_{r,j} \\ \underline{f}_{r,k} \end{bmatrix} \tag{3.480}$$

ahol a j csomópontra ható rugalmas visszatérítő erőket tartalmazó $\underline{f}_{r,j}$ vektor elemei a két eltolódási szabadságfokra ható erő és az elfordulási szabadságfokra ható nyomaték:

$$\underline{f}_{r,j} = \begin{bmatrix} f_{jx} \\ f_{jy} \\ m_{jz} \end{bmatrix} \tag{3.481}$$

A 3.480 képletéből egyben a merevségi mátrix *blokkjainak* fizikai jelentését is kiolvashatjuk. A $\underline{\underline{K}}_{jk}^{jj}$ blokk tartalmazza a kezdőpont elmozdulásaiból a végpontra működő erőket, a $\underline{\underline{K}}_{jk}^{jk}$ blokk tartalmazza a végpont elmozdulásaiból a végpontra működő erőket, a $\underline{\underline{K}}_{jk}^{kj}$ blokk tartalmazza a kezdőpont elmozdulásaiból a kezdőpontra működő erőket, a $\underline{\underline{K}}_{jk}^{kk}$ blokk tartalmazza a végpont elmozdulásaiból a kezdőpontra működő erőket (erők alatt általánosítva értve az erőket és nyomatékokat is).

A mátrix egyes elemeinek esetében az eltolódásból-erő, az eltolódásból-nyomaték, az elfordulásból-erő és az elfordulásból-nyomaték kapcsolatok alapján lehet kitalálni a nevezőben az l hosszúság kitevőjét. Például a mátrix 3-5 eleme eltolódásból származó nyomatékot számol, a mértékegysége tehát (erőszorozva-távolság)/távolság, azaz erő dimenziójú lesz. Valóban, a hajlítómerevség (erő-szorozva-távolság-a-négyzeten) mértékegységét (távolság-a-négyzeten)-nel kell osztanunk, hogy erőt kapjunk.

Mivel a merevségi mátrix egy-egy oszlopában egy-egy egyensúlyi állapothoz tartozó erők szerepelnek, azokra egyensúlyi egyenleteket írhatunk fel. Az x-irányú vetületi egyenletbe az első és a negyedik sorban szereplő erők kerülnek be mindig, így ennek e két sornak az összege minden oszlopban nullát kell, hogy adjon, e két sor egymás ellentettje. Az y-irányú vetületi egyenletbe a második és az ötödik sorban szereplő erők kerülnek be mindig, így ennek e két sornak az összege is minden oszlopban nullát kell, hogy adjon, e két sor egymás ellentettje. A kezdőpontra felírt nyomatéki egyenletbe a harmadik és hatodik sorban szereplő nyomatékokat és az ötödik sorban szereplő erő l-szeresét kell beírnunk, azaz az ötödik sorban minden oszlopban a harmadik és a hatodik sor összege l-ed részének ellentettje szerepel. A két utolsó kapcsolatból az is következik, hogy a második sor l-szerese a harmadik és hatodik sor összegével egyezik meg (ez egyébként a végpontra felírt nyomatéki egyenletből közvetlenül is adódik).

3.4.2.3. Végeselemes megfogalmazás

A végeselemmódszer a szerkezet elmozdulásait elemenként a szabadságfokok elmozdulásait felhasználva interpolálja az elem hossza mentén. Az interpolálás ún.

bázisfüggvények segítségével történik. A bázisfüggvényektől azt várjuk el, hogy egy szabadságfokhoz kapcsolódóan 1 legyen az értékük, az összes többi szabadságfokhoz kapcsolódóan pedig 0. Előállítási módszereiket itt nem részletezzük (majd az 5.2. alfejezetben), de a fenti tulajdonság alapján kijelenthető, hogy a 3.26.b)-g) ábrákon látható elmozdult alakok rendre egy-egy bázisfüggvénynek feleltethetők meg. A hosszirányú eltolódásnak megfelelő két bázisfüggvény:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{l}, \qquad N_4(x) = \frac{x}{l}, \tag{3.482}$$

amikkel a hosszirányú eltolódást interpoláljuk:

$$u(x) = u_{jx}N_1(x) + u_{kx}N_4(x). \tag{3.483}$$

A hajlítást eredményező szabadságfokoknak megfelelő négy bázisfüggvény:

$$\begin{aligned} N_2(x) &= 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}, \qquad & N_5(x) &= 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}, \\ N_3(x) &= x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \qquad & N_6(x) &= -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \end{aligned} \tag{3.484}$$

amikkel a merőleges eltolódást interpoláljuk:

$$v(x) = u_{jy}N_2(x) + \varphi_{jz}N_3(x) + u_{ky}N_5(x) + \varphi_{kz}N_6(x). \tag{3.485}$$

A (3.483) és (3.485) kapcsolatokat együtt úgy is írhatjuk, hogy:

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0N_4(x) & 0 & 0 & \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix} \underline{u}_{jk}, \tag{3.486}$$

vagy röviden

$$\underline{u}(x) = \underline{\underline{N}}(x)\underline{u}_{jk}, \tag{3.487}$$

ahol $\underline{u}(x)$ az *elmozdulásfüggvények vektora*, $\underline{\underline{N}}(x)$ pedig a *bázisfüggvények mátrixa*.

Vezessük be az alábbi *operátormátrixot*[28]:

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \frac{d(\cdot)}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2(\cdot)}{dx^2} \end{bmatrix}. \tag{3.488}$$

Könnyű belátni, hogy az $\underline{\underline{L}}\underline{u}(x)$ szorzat két eleme a rúd keresztmetszetének fajlagos nyúlása és a görbülete:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{L}}\underline{u}(x) = \begin{bmatrix} \frac{du(x)}{dx} \\ \frac{d^2v(x)}{dx^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon(x) \\ \kappa(x) \end{bmatrix}. \tag{3.489}$$

Az $\underline{\underline{L}}$ operátormátrixot a bázisfüggvények mátrixára alkalmazva kapjuk az *alakváltozás-mátrix*ot:

$$\underline{\underline{B}}(x) = \underline{\underline{L}}\underline{\underline{N}}(x). \tag{3.490}$$

[28]Az operátor azt határozza meg, hogy a mögé írt függvényen milyen műveleteket kell elvégezni.

Az alakváltozási mátrix elemei:

$$\underline{\underline{B}}(x) = \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} & 0 & 0 & \frac{dN_4(x)}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2N_2(x)}{dx^2} & \frac{d^2N_3(x)}{dx^2} & 0 & \frac{d^2N_5(x)}{dx^2} & \frac{d^2N_6(x)}{dx^2} \end{bmatrix}. \tag{3.491}$$

Az alakváltozási mátrix egyik alkalmazási területe a keresztmetszeti alakváltozások számítása a csomóponti elmozdulásokból:

$$\underline{\varepsilon}(x) = \underline{\underline{B}}(x)\underline{v}. \tag{3.492}$$

Végül a keresztmetszet normál- és hajlítómerevségét gyűjtsük a $\underline{\underline{D}}$ mátrix főátlójába:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}, \tag{3.493}$$

amivel a keresztmetszeti igénybevételeket tudjuk számolni:

$$\underline{\sigma}(x) = \begin{bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{bmatrix} \underline{\underline{D}}\underline{\varepsilon}(x). \tag{3.494}$$

Fenti mátrixokkal a rúdelem merevségi mátrixát az alábbi képlettel számolhatjuk:

$$\underline{\underline{K}}_{jk} = \int_0^l \underline{\underline{B}}^T(x)\underline{\underline{D}}\underline{\underline{B}}(x)dx. \tag{3.495}$$

A hármas mátrixszorzat integrálásához természetesen az egyes elemek integrálását kell elvégezni. Emlékeztetünk, hogy mátrixszorzat lm-elemének számításához az első mátrix l-edik sorát kel szorozni a közbenső mátrixokkal, majd végül az utolsó mátrix m-edik oszlopával. Figyelembevéve, hogy a $\underline{\underline{B}}^T(x)$ mátrix l-edik sora a $\underline{\underline{B}}(x)$ mátrix l-edik oszlopának transzponáltja, az lm-elemet az alábbi képlettel számíthatjuk:

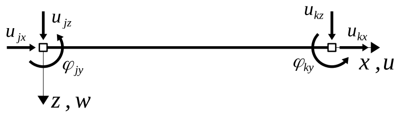
$$k_{jk}^{lm} = \int_0^l \underline{b}_l^T(x)\underline{\underline{D}}\underline{b}_m(x)dx. \tag{3.496}$$

Ebből az előállítási módból látszik, hogy az elemi merevségi mátrix szimmetrikus lesz. A műveleteket elvégezve a (3.478) képletben írtakkal azonos eredményt kapunk.

3.4.2.4. Más koordinátarendszerek

A 3.27. ábra egy, az xz-koordinátarendszerben elhelyezkedő rúdelemet mutat a szabadságfokaival. Mint látjuk, a z tengely lefelé mutat, emiatt a merőleges eltolódások pozitív iránya megfordult a 3.26.a) ábrán rajzolthoz képest, ezzel a szabadságfokra ható erők pozitív iránya is megfordult. Természetesen most is meghatározhatnánk az elem merevségi mátrixát annak jelentése alapján, azonban a második és az ötödik szabadságfokhoz ellentétes elmozdult alakot kellene felvenni.

Ehelyett használjuk ki a merevségi mátrix fizikai jelentését és a szabadságfokok irányának megfordítását. Mivel a második és ötödik szabadságfok irányát megfordítottuk, ezért a (3.478) képletében a második és az ötödik oszlopot az elmozdulás ellentettjével kellene szoroznunk, vagyis ezeket az oszlopokat -1-gyel



3.27. ábra. Rúdelem az xz-síkban.

meg kell szoroznunk. A második és ötödik szabadságfok irányának megfordítása miatt az ezekre a szabadságfokokra ható erők, azaz a második és ötödik sor esetében a pozitív irány megfordul, vagyis az erők előjelét meg kell fordítani, a második és ötödik sort -1-gyel szorozni kell. Végeredményül a 2-2, 2-5, 5-2 és 5-5 elemeket kétszer szorozzuk -1-gyel, így azok változatlanok maradnak, mindössze nyolc nemzérus tag előjele módosul. Az eredmény az alábbi elemi merevségi mátrix lesz:

$$\underline{\underline{K}}_{jk}^{xz} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}. \tag{3.497}$$

3.4.3. Tömegmátrixok

Dinamikai vizsgálathoz a merevségi mátrix mellett a tömegmátrixot is elő kell állítanunk a keretszerkezet esetére. A következő három szakaszban ennek mutatjuk meg három lehetséges módját. Mindhárom esetben feltesszük, hogy a rúdelem egységnyi hosszra jutó *fajlagos tömege* μ[29].

3.4.3.1. Diagonál tömegmátrix

A diagonál tömegmátrix a legegyszerűbb közelítés. Elvágjuk a rúdelemet a felénél, és a félrúd tehetetlen tömegét a csomóponti végpontjába redukáljuk. Az eltolódási szabadságfokokhoz ennek megfelelően a tömeg, az elfordulási szabadságfokokhoz pedig a végpont körüli elfordulási tehetetlenség[30] kerül:

$$\underline{\underline{M}}_{diag} = \begin{bmatrix} \frac{\mu l_{jk}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu l_{jk}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\frac{\mu l_{jk}}{2}\left(\frac{l_{jk}}{2}\right)^2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu l_{jk}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu l_{jk}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\frac{\mu l_{jk}}{2}\left(\frac{l_{jk}}{2}\right)^2}{3} \end{bmatrix}. \tag{3.498}$$

[29] A rúd ϱ sűrűségével kifejezve $\mu = \varrho A$.

[30] Tömeg szorozva a hossz négyzetével és osztva hárommal

A fél rúdelem tömegét kiemelve:

$$\underline{\underline{M}}_{diag} = \frac{\mu l_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_{jk}^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_{jk}}{12} \end{bmatrix}. \tag{3.499}$$

A diagonál tömegmátrix előnye, hogy a koordinátarendszer forgatása esetén is változatlan marad, így a szerkezet kompilált tömegmátrixa is diagonálmátrix lesz, ami az általánosított sajátértékfeladat megoldásánál kihasználható.

3.4.3.2. Blokk-diagonál tömegmátrix

A blokkdiagonál tömegmátrix számításakor figyelembe veszünk egy további, a diagonál tömegmátrix számításakor elhanyagolt hatást. Ahhoz, hogy a félbevágott rúdelem egyik felének a tengelyre merőleges haladó mozgást eredményező egységnyi gyorsulását, vagy a csomópont körüli elfordulással egységnyi szöggyorsulását hozzuk létre, nem elegendő a csomópontban működtetni egy erőt, vagy egy nyomatékot, hanem rendre egy nyomatékot vagy egy erőt is működtetni kell. Az egységnyi gyorsulásokhoz az erőt a súlypontban kellene működtetni, ezért a csomópontba történő $l_{jk}/4$-gyel történő eltolás esetén egy az eltolásnak megfelelő előjelű nyomatékot kell működtetni a csomópontban, A szöggyorsulás esetén a súlypontnak lesz egy körpályán érintőirányú gyorsulása, amit a csomópontban átadódó erő hozhat létre. Ezeket a hatásokat figyelembevéve az alábbi tömegmátrixot kapjuk az xy lokális koordinátarendszerben:

$$\underline{\underline{M}}_{blokkdiag} = \frac{\mu l_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{l_{jk}}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_{jk}}{4} & \frac{l_{jk}^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{l_{jk}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{jk}}{4} & \frac{l_{jk}}{12} \end{bmatrix}. \tag{3.500}$$

A blokkdiagonál tömegmátrix a koordinátarendszer transzformálásakor is blokkdiagonál szerkezetű marad (csak a 3×3-as főátlóblokkok térhetnek el nullától, de a főátlóblokk sosem válik diagonálmátrixszá), de ez általános esetben a kompilálás után is így marad, vagyis az általánosított sajátértékfeladat megoldásakor nem diagonálmátrix lesz a tömegmátrix. Kivételt képez az olyan szerkezet, ahol az összes csomópont esetén igaz, hogy a kapcsolódó fél rúdelemek súlypontja a csomópontra esik. Ekkor a kompilálás után a szerkezet tömegmátrixa diagonálmátrix lesz.

3.4.3.3. Konzisztens tömegmátrix

A végeselemes jelölésrendszert használva lehetőség van egy, a folytonos tömegeloszlást jobban közelítő tömegmátrix meghatározására is. Ekkor a rúd mentén a keresztmetszetek gyorsulásait nem a fél rúdelemek merevtestszerű mozgása alapján számoljuk a csomópontok szabadságfokainak gyorsulásaiból, hanem a végpontok között interpoláljuk azokat a csomóponti értékek segítségével. Az interpolálást a merevségi mátrixnál is használt bázisfüggvények segítségével hajtjuk végre, ezért ezt a tömegmátrixot *konzisztens tömegmátrix*nak, esetleg merevséggel konzisztens tömegmátrixnak nevezzük[31].

A konzisztens tömegmátrix számításához vegyük figyelembe, hogy az elemi rúdszakasz fajlagos tömege a normál- és a hajlítórezgés esetén is μ, ezért vezessük be az alábbi mátrixot:

$$\underline{\underline{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}. \tag{3.501}$$

Ezt felhasználva a konzisztens tömegmátrix számítási képlete:

$$\underline{\underline{M}}_{konz} = \int_0^{l_{jk}} \underline{\underline{N}}^T(x)\underline{\underline{\mu}}\,\underline{\underline{N}}(x)dx. \tag{3.502}$$

A mátrix elemei pedig:

$$\underline{\underline{M}}_{konz} = \mu l_{jk} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & \frac{11}{210}l_{jk} & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420}l_{jk} \\ 0 & \frac{11}{210}l_{jk} & \frac{1}{105}l_{jk}^2 & 0 & \frac{13}{420}l_{jk} & -\frac{1}{140}l_{jk}^2 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{13}{420}l_{jk} & 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210}l_{jk} \\ 0 & -\frac{13}{420}l_{jk} & -\frac{1}{140}l_{jk}^2 & 0 & -\frac{11}{210}l_{jk} & \frac{1}{105}l_{jk}^2 \end{bmatrix}. \tag{3.503}$$

A konzisztens tömegmátrix blokkonkénti forgatása során a főátlóblokkon kívüli blokkok nem nullázódnak ki, így az ilyen elemi tömegmátrixokból kompilált tömegmátrix olyan blokkszerkezetű lesz, mint a merevségi mátrix.

Az xz-síkban elhelyezkedő rúdelem esetén (lásd 3.27) az elemi konzisztens tömegmátrixot ugyanúgy származtathatjuk (3.503)-ból, ahogy a merevségi mátrixnál tettük. A második és ötödik szabadságfokok irányának megfordítása miatt a mátrix második és ötödik sorát, illetve oszlopát kell -1-gyel szorozni, az eredmény pedig az alábbi lesz:

$$\underline{\underline{M}}_{konz,xz} = \mu l_{jk} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210}l_{jk} & 0 & \frac{9}{70} & \frac{13}{420}l_{jk} \\ 0 & -\frac{11}{210}l_{jk} & \frac{1}{105}l_{jk}^2 & 0 & -\frac{13}{420}l_{jk} & -\frac{1}{140}l_{jk}^2 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420}l_{jk} & 0 & \frac{13}{35} & \frac{11}{210}l_{jk} \\ 0 & \frac{13}{420}l_{jk} & -\frac{1}{140}l_{jk}^2 & 0 & \frac{11}{210}l_{jk} & \frac{1}{105}l_{jk}^2 \end{bmatrix}. \tag{3.504}$$

3.4.4. Rendszermátrixok összeállítása

3.4.4.1. Mátrixok transzformálása

Tegyük fel, hogy a jk-rúdelem xyz lokális koordinátarendszerében megadott valamilyen $\underline{v}^{lok}$ vektort a $\underline{\underline{T}}_{jk}$ mátrix forgatja az XYZ globális koordinátarendszerbeli $\underline{v}^{gl}$ vektorba[32], azaz:

$$\underline{v}^{gl} = \underline{\underline{T}}_{jk}\underline{v}^{lok}. \tag{3.505}$$

[31] Hiszen konzisztens módon ugyanazokat az $N_l(x)$ függvényeket használjuk a $\underline{\underline{K}}$ és az $\underline{\underline{M}}$ számítására.

[32] Egy ilyen forgatáskor a vektor valójában változatlan marad, csak az azt jellemző számhármas egy másik koordinátarendszerben jelenti a tengelyirányú vetületeit.

A transzformáló mátrix oszlopai az x-, y-, z-irányú egységvektoroknak az XYZ-koordinátarendszerben megadott értékei lesznek:

$$\underline{\underline{T}}_{jk} = \begin{bmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \end{bmatrix} \tag{3.506}$$

A $\underline{\underline{T}}_{jk}$ forgatómátrix *ortogonális mátrix*, azaz a transzponáltja megegyezik az inverzével:

$$\underline{\underline{T}}_{jk}^{-1} = \underline{\underline{T}}_{jk}^{T}, \tag{3.507}$$

így a globális koordinátarendszerből a lokális koordinátarendszerbe való forgatás is könnyen felírható, ha megoldjuk (3.505)-t $\underline{v}^{lok}$-ra:

$$\underline{v}^{lok} = \underline{\underline{T}}_{jk}^{-1}\underline{v}^{gl} = \underline{\underline{T}}_{jk}^{T}\underline{v}^{gl}. \tag{3.508}$$

Az xy- és XY-síkban elhelyezkedő keret esetén a síkbeli eltolódások és erők, illetve a síkra merőleges tengely körüli elfordulások és nyomatékok egymástól függetlenül transzformálódnak, így az $\underline{u}_j$ és $\underline{u}_k$ csomóponti elmozdulásvektorokra és az $\underline{f}_j$ és $\underline{f}_k$ csomóponti erővektorokra egyaránt alkalmazhatók a $\underline{\underline{T}}_{jk}$ és $\underline{\underline{T}}_{jk}^{T}$ mátrixok.

Korábban már láttuk (3.480)-ban, hogy a lokális koordinátarendszerben felírt elemi merevségi mátrix szerepe az, hogy a rúdelem alakváltozása miatti rugalmas visszatérítő erőt tudjuk belőle számolni a csomóponti elmozdulásokból:

$$\begin{bmatrix} \underline{f}_{r,j}^{lok} \\ \underline{f}_{r,k}^{lok} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{jk}^{jj,lok} & \underline{\underline{K}}_{jk}^{jk,lok} \\ \underline{\underline{K}}_{jk}^{kj,lok} & \underline{\underline{K}}_{jk}^{kk,lok} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_j^{lok} \\ \underline{u}_k^{lok} \end{bmatrix}, \tag{3.509}$$

ahol mind az elmozdulások, mind az erők a lokális koordinátarendszerben vannak megadva.

A lokális elmozdulásokat (3.508) segítségével felírhatjuk a globális elmozdulásokkal:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_j^{lok} \\ \underline{u}_k^{lok} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_{jk}^{T}\underline{u}_j^{gl} \\ \underline{\underline{T}}_{jk}^{T}\underline{u}_k^{gl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_{jk}^{T} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{T}}_{jk}^{T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_j^{gl} \\ \underline{u}_k^{gl} \end{bmatrix}. \tag{3.510}$$

A globális erőket (3.505)-t felhasználva felírhatjuk a lokális erőkből:

$$\begin{bmatrix} \underline{f}_{r,j}^{gl} \\ \underline{f}_{r,k}^{gl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_{jk}\underline{f}_{r,j}^{lok} \\ \underline{\underline{T}}_{jk}\underline{f}_{r,k}^{lok} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_{jk} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{T}}_{jk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{f}_{r,j}^{lok} \\ \underline{f}_{r,k}^{lok} \end{bmatrix}. \tag{3.511}$$

Helyettesítsük be (3.510)-t (3.509)-ba, majd szorozzuk be balról a kapott egyenletet a (3.511)-ban megjelenő mátrixszal, így a csomóponti erők vektorait a globális koordinátarendszerben kapjuk meg:

$$\begin{bmatrix} \underline{f}_{r,j}^{gl} \\ \underline{f}_{r,k}^{gl} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_{jk} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{T}}_{jk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{jk}^{jj,lok} & \underline{\underline{K}}_{jk}^{jk,lok} \\ \underline{\underline{K}}_{jk}^{kj,lok} & \underline{\underline{K}}_{jk}^{kk,lok} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_{jk}^{T} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{T}}_{jk}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_j^{gl} \\ \underline{u}_k^{gl} \end{bmatrix}. \tag{3.512}$$

A hármas mátrix-szorzat szerepe, hogy a globális elmozdulásokból származó visszatérítő erőket számítja ki a globális koordinátarendszerben, vagyis ez a szorzat az elemi merevségi mátrix a globális koordinátarendszerben:

$$\begin{bmatrix} \underline{f}_{r,j}^{gl} \\ \underline{f}_{r,k}^{gl} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{jk}^{jj,gl} & \underline{\underline{K}}_{jk}^{jk,gl} \\ \underline{\underline{K}}_{jk}^{kj,gl} & \underline{\underline{K}}_{jk}^{kk,gl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_j^{gl} \\ \underline{u}_k^{gl} \end{bmatrix}. \tag{3.513}$$

A hármas mátrix-szorzat műveleteit elvégezve azt kapjuk, hogy:

$$\underline{\underline{K}}_e^{gl} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{jk}^{jj,gl} & \underline{\underline{K}}_{jk}^{jk,gl} \\ \underline{\underline{K}}_{jk}^{kj,gl} & \underline{\underline{K}}_{jk}^{kk,gl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_{jk} \underline{\underline{K}}_{jk}^{jj,lok} \underline{\underline{T}}_{jk}^T & \underline{\underline{T}}_{jk} \underline{\underline{K}}_{jk}^{jk,lok} \underline{\underline{T}}_{jk}^T \\ \underline{\underline{T}}_{jk} \underline{\underline{K}}_{jk}^{kj,lok} \underline{\underline{T}}_{jk}^T & \underline{\underline{T}}_{jk} \underline{\underline{K}}_{jk}^{kk,lok} \underline{\underline{T}}_{jk}^T \end{bmatrix} \tag{3.514}$$

Azaz a koordinátarendszer transzformációját blokkonként lehet elvégezni.

Megjegyezzük, hogy a kezdő- és végpontok erővektorainak transzformálását végző 6×6-os mátrixot formálisan helyettesíthetnénk egyetlen mátrixszal:

$$\hat{\underline{\underline{T}}}_{jk} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_{jk} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{T}}_{jk} \end{bmatrix}, \tag{3.515}$$

amivel a merevségi mátrix transzformálása az alábbi egyszerűbb alakban is írható:

$$\underline{\underline{K}}_e^{gl} = \hat{\underline{\underline{T}}}_{jk} \underline{\underline{K}}_e^{lok} \hat{\underline{\underline{T}}}_{jk}^T. \tag{3.516}$$

A tényleges számítást viszont ilyenkor is a 3×3-as blokkokon végeznénk, hiszen lényegesen kevesebb számítási műveletet igényel a 3×3-as mátrixok szorzása, mint a 6×6-os mátrixoké, még úgy is, hogy előbbit négyszer kell elvégezni a négy blokkra.

Tömegmátrix transzformálását ugyanígy blokkonként végezhetjük, így azt külön nem vezetjük végig. Végül megjegyezzük, hogy a transzformálás megtartja a mátrixok szimmetriáját.

3.4.4.2. Mátrixok kompilálása

A mátrixok kompilálásának hátterében a szuperpozíció elve áll. Az egyes csomópontokra az egyes rúdelemekből átadódó erőket egymástól függetlenül számolhatjuk és összegezhetjük őket. Tudva, hogy egy elemi merevségi mátrix lm blokkja az m csomópont egységnyi elmozdulásai miatt az l csomópontra működtetendő egyensúlyozó erőket tartalmazza, az ezeket az erőket tartalmazó 3×3-as blokkot az egész szerkezet 3×3-as lm-blokkjához kell hozzáadni. A kompilálás menete tehát a következő:

- Létrehozzuk a teljes szerkezet merevségi mátrixát, $\underline{\underline{K}}_{all}$-t, N csomópont esetén ez egy $3N \times 3N$-méretű mátrix, amit zérusokkal töltünk fel.
- Minden egyes jk-rúdelemnek:
  - kiszámítjuk az elemi merevségi mátrixát a lokális koordinátarendszerben (3.478),
  - transzformáljuk az elemi merevségi mátrixát a globális koordinátarendszerbe (3.514),
  - a jj-blokkot hozzáadjuk a $\underline{\underline{K}}_{all}$ mátrix jj-blokkjához,
  - a jk-blokkot hozzáadjuk a $\underline{\underline{K}}_{all}$ mátrix jk-blokkjához,
  - a kj-blokkot hozzáadjuk a $\underline{\underline{K}}_{all}$ mátrix kj-blokkjához,
  - a kk-blokkot hozzáadjuk a $\underline{\underline{K}}_{all}$ mátrix kk-blokkjához.

A tömegmátrix kompilálásakor ugyanezeket a lépéseket kell végrehajtani, csak értelemszerűen az elemi tömegmátrixok blokkjait kell hozzáadni az előzetesen nullákkal feltöltött $3N \times 3N$-méretű $\underline{\underline{M}}_{all}$-mátrix blokkjaihoz.

3.4.4.3. Támaszok figyelembevétele

A kopilálás eredményeként kapott $\underline{\underline{M}}_{all}$ és $\underline{\underline{K}}_{all}$ mátrixokban még nincsenek figyelembevéve a támaszok.

A megtámasztott szabadságfokok esetén a 3.3.4.1. alpontban bemutatott módszert használhatjuk Mozdulatlan támasz esetén töröljük a megtámasztott szabadságfokoknak megfelelő sorokat és oszlopokat a mátrixokból, illetve a megtámasztott szabadságfoknak megfelelő elemeket a vektorokból. Ha a támasz mozog, akkor az egyenletrendszer bal oldalán ugyanúgy végrehajtható a fenti művelet, viszont a (3.333) képletnek megfelelően módosítanunk kell a tehervektort.

Rugalmasan megtámasztott szabadságfok esetén a támasz rugómerevségét kell hozzáadnunk az általa megtámasztott szabadságfokhoz tartozó főátlóelemhez a merevségi mátrixban.

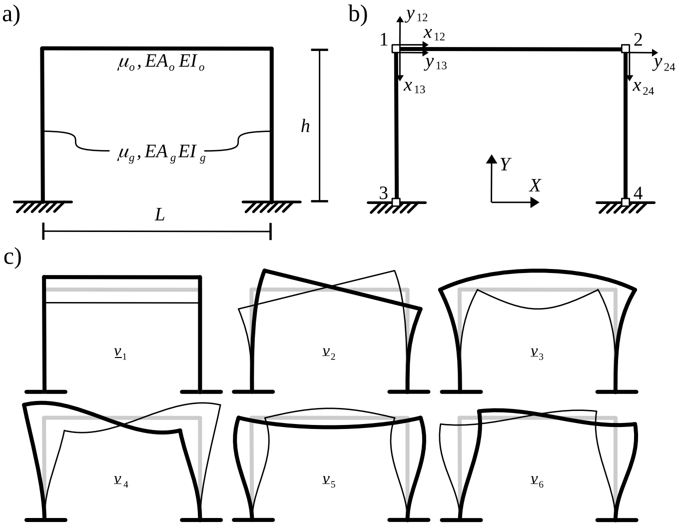
A rugalmas megtámasztással gyakran közelítik a merev támaszokat is. Ilyenkor egy *kellően nagy* merevségű rugóval támasztják meg a szerkezetet, és természetesen adódik a kérdés, hogy mekkora az a kellően nagy. Túlságosan nagy fiktív rugómerevségek ugyanis numerikusan instabillá tehetik a számítást, a túl kicsik viszont megnövelik az elmozdulásokban a merevtestszerű elmozdulások súlyát. A helyes értékek megválasztásához az alábbiakat javasoljuk megfontolni:

- A rugók alakváltozása legyen elhanyagolható a szerkezet elmozdulásaihoz képest, azaz nagyságrendekkel legyenek kisebbek.
- A rugók merevségének egy nagyságrenddel való növelése már ne változtasson az eredményeken a szignifikáns jegyekben. (Ez jelentheti elmozdulások, igénybevételek, de akár figyelembe vett sajátkörfrekvenciák értékeit.)
- A rugalmasan megtámasztott rugalmas szerkezet első sajátkörfrekvenciáját a merevségek szétválasztásával a Föppl-Papkovich összegzési tétellel közelíthetjük. A rugalmasan megtámasztott merev test és a fixen megtámasztott rugalmas szerkezet sajátkörfrekvenciáiból számolt sajátkörfrekvencia akkor lesz közel a fixen megtámasztott rugalmas szerkezet sajátkörfrekvenciájához, ha a rugalmasan megtámasztott merev test sajátkörfrekvenciája nagyságrendekkel nagyobb a rugalmasan megtámasztott rugalmas szerkezet sajátkörfrekvenciájának numerikusan számított értékénél.

A támaszok figyelembevétele utáni tömegmátrixot $\underline{\underline{M}}$-mel, a merevségi mátrixot pedig $\underline{\underline{K}}$-val jelölve a rezgésvizsgálat további lépései már egy többszabadságfokú rendszer vizsgálatával egyezik meg.

3.4.5. Példák

3.4.1. Példa (Keret 6 szabadsági fokkal)**.** *Határozzuk meg a 3.28.a) ábrán látható keret merevségi mátrixát, diagonál tömegmátrixát és a sajátkörfrekvenciákat három rúdelem használatával!*
Az oszlopok adatai: $\mu_o = 0.5t/m$, $EA_o = 1200kN$, $EI_o = 24000kNm^2$, $h = 4m$.
A gerenda adatai: $\mu_g = 0.6t/m$, $EA_g = 2400kN$, $EI_g = 12000kNm^2$, $L = 6m$.



3.28. ábra. a) A keretszerkezet modellje.b) A csomópontok és rúdelemek. c) A számított rezgésalakok vázlata.

Megoldás

Számozzuk a csomópontokat a következőképpen: a felső csomópontokkal kezdjük balról-jobbra, majd a megtámasztott csomópontokkal folytassuk ugyancsak balról jobbra. Az így kapott csomópont-sorszámokat, a rúdelemek római számokkal jelölt sorszámát és a hozzájuk rendelt lokális koordinátarendszereket mutatja a 3.28.b) ábra. A teljes merevségi mátrix és tömegmátrix 12×12-es lesz, amit a kompilálás során rúdelemenként fogunk feltölteni, amihez először állítsuk elő mindegyik rúdelem mátrixait a globális koordinátarendszerben.

- Az $1-3$ rúdelem elemi merevségi mátrixa a lokális koordinátarendszerben:

$$\underline{\underline{K}}^{lok}_{13} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 & -300 & 0 & 0 \\ 0 & 4500 & 9000 & 0-4500 & 9000 & \\ 0 & 9000 & 24000 & 0 & -9000 & 12000 \\ -300 & 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & -4500 & -9000 & 04500 & -9000 & \\ 0 & 9000 & 12000 & 0 & -9000 & 24000 \end{bmatrix} \quad (3.517)$$

A globális koordinátarendszerbe a

$$\underline{\underline{T}}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.518)$$

mátrix forgatja a három elemű vektorokat, a mátrix blokkonkénti forgatásának eredménye:

$$\underline{\underline{K}}_{13}^{gl} = \begin{bmatrix} 4500 & 0 & 9000 & -4500 & 0 & 9000 \\ 0 & 300 & 0 & 0-300 & 0 & \\ 9000 & 0 & 24000 & -9000 & 0 & 12000 \\ -4500 & 0 & -9000 & 4500 & 0 & -9000 \\ 0 & -300 & 0 & 0300 & 0 & \\ 9000 & 0 & 12000 & -9000 & 0 & 24000 \end{bmatrix} \tag{3.519}$$

A rúdelem diagonál tömegmátrixa azonos a lokális és a globális koordinátarendszerben:

$$\underline{\underline{M}}_{13} = \langle 1 \quad 1 \quad 1.333 \quad 1 \quad 1 \quad 1.333 \rangle \tag{3.520}$$

- Az $1-2$ rúdelem elemi merevségi mátrixa a lokális koordinátarendszerben:

$$\underline{\underline{K}}_{12}^{lok} = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 & -400 & 0 & 0 \\ 0 & 666.7 & 2000 & 0-666.7 & 2000 & \\ 0 & 2000 & 8000 & 0 & -2000 & 4000 \\ -400 & 0 & 0 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & -666.7 & -2000 & 0666.7 & -2000 & \\ 0 & 2000 & 4000 & 0 & -2000 & 8000 \end{bmatrix} \tag{3.521}$$

A gerenda lokális koordinátarendszere megyegyezik a globális koordinátarendszerrel, így ezt nem kell forgatni:

$$\underline{\underline{K}}_{13}^{gl} = \underline{\underline{K}}_{12}^{lok} \tag{3.522}$$

A rúdelem diagonál tömegmátrixa azonos a lokális és a globális koordinátarendszerben:

$$\underline{\underline{M}}_{12} = \langle 1.8 \quad 1.8 \quad 5.4 \quad 1.8 \quad 1.8 \quad 5.4 \rangle \tag{3.523}$$

- A $2-4$ rúdelem azonos méretű az $1-3$ rúdelemmel, így a lokális koordinátarendszerben azonosak a merevségi mátrixaik:

$$\underline{\underline{K}}_{24}^{lok} = \underline{\underline{K}}_{13}^{lok}. \tag{3.524}$$

E két elem esetén a lokális koordinátarendszerek is azonos állásúak, így ugyanazzal a transzformációval kapnánk a globális koordinátarendszerben a mátrixot, tehát értelemszerűen az is meg fog egyezni:

$$\underline{\underline{K}}_{24}^{gl} = \underline{\underline{K}}_{13}^{gl}. \tag{3.525}$$

A tömegmátrixok az azonos méretek és anyagjellemzők miatt szintén megegyeznek, és a diagonálmátrixot transzformálni sem kell:

$$\underline{\underline{M}}_{24} = \underline{\underline{M}}_{12}. \tag{3.526}$$

A kompilálás során az 13-elem mátrixainak 11-, 13-, 31-, 33-blokkjait rendre a teljes mátrixok 11-, 13-, 31-, 33-blokkjaihoz kell hozzáadnunk. Az 12-elem mátrixainak 11-, 12-, 21-, 22-blokkjait rendre a teljes mátrixok 11-, 12-, 21-, 22-blokkjaihoz kell hozzáadnunk. Végül a 24-elem mátrixainak 22-, 24-, 42-, 44-blokkjait rendre a teljes mátrixok 22-, 24-, 42-, 44-blokkjaihoz kell hozzáadnunk. Az eredményül kapott mátrixok közül a teljes merevségi mátrix blokkszerkezetét mutatjuk be:

$$\underline{\underline{K}}_{all} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{13}^{11} + \underline{\underline{K}}_{12}^{11} & \underline{\underline{K}}_{12}^{12} & \underline{\underline{K}}_{13}^{13} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{K}}_{12}^{21} & \underline{\underline{K}}_{12}^{22} + \underline{\underline{K}}_{24}^{22} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{24}^{24} \\ \underline{\underline{K}}_{13}^{31} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{13}^{33} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{24}^{42} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{24}^{44} \end{bmatrix} \tag{3.527}$$

Az oszloptalpaknál levő befogások miatt a támaszok figyelembevétele során a mátrixok harmadik és negyedik blokksorát és blokkoszlopát töröljük, így az alábbi mátrixok maradnak a szerkezet merevségi mátrixának és a tömegmátrixának:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 4900 & 0 & 9000 & -400 & 0 & 0 \\ 0 & 967 & 2000 & 0 & -667 & 2000 \\ 9000 & 2000 & 32000 & 0 & -2000 & 4000 \\ -400 & 0 & 0 & 4900 & 0 & 9000 \\ 0 & -667 & -2000 & 0 & 967 & -2000 \\ 0 & 2000 & 4000 & 9000 & -2000 & 32000 \end{bmatrix} \tag{3.528}$$

$$\underline{\underline{M}} = \langle 2.8 \quad 2.8 \quad 6.733 \quad 2.8 \quad 2.8 \quad 6.733 \rangle \tag{3.529}$$

Az általánosított sajátértékfeladat megoldásaként adódik a sajátkörfrekvenciák spektrálmátrixa:

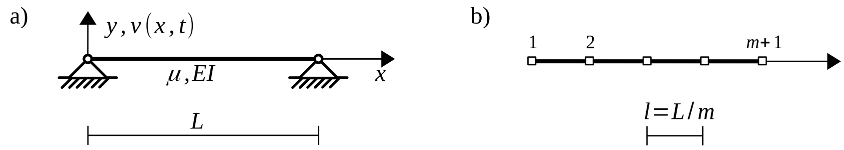
$$\underline{\underline{\Omega}} = \langle 10.351 \quad 13.645 \quad 25.759 \quad 30.985 \quad 73.401 \quad 79.942 \rangle , \tag{3.530}$$

A sajátvektorok mátrixa pedig:

$$\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} 0 & 0.21133 & -0.36346 & -0.32599 & -0.21556 & 0.16626 \\ 0.422578 & 0.33604 & 0 & 0.24888 & 0 & 0.060866 \\ 0 & -0.093423 & 0.13901 & 0.065629 & -0.23438 & 0.24743 \\ 0 & 0.21133 & 0.36346 & -0.32599 & 0.21556 & 0.16626 \\ 0.42258 & -0.33604 & 0 & -0.24888 & 0 & -0.060866 \\ 0 & -0.093423 & -0.13901 & 0.065629 & 0.23438 & 0.24743 \end{bmatrix} \tag{3.531}$$

A kapott rezgésalakokat 3.28.c) ábrán vázoltuk.

3.4.2. Példa (Gerenda konvergenciája). *Határozzuk meg a 3.29.a) ábrán látható rendszer hajlítórezgéshez tartozó sajátkörfrekvenciáit különböző elemszám esetén. Használjunk konzisztens tömegmátrixot és $1, 2, \ldots, 9$ rúdelemet!*
A gerenda adatai: $\mu = 0.6t/m$, $EI = 12000kNm^2$, $L = 12m$.



3.29. ábra. a) A csuklós-csuklós megtámasztású gerenda. b) A csomópontok és rúdelemek.

Megoldás

Az egyenes tengelyű gerenda esetén a normálirányú és a hajlítórezgések szétválaszthatók, így jelen feladatban csomópontonként kettő szabadságfok elegendő: a tengelyre merőleges eltolódás és az elfordulás. Emiatt az elemi mátrixokból is csak a második, harmadik, ötödik és hatodik sorokból és oszlopokból képzett 4×4-es mátrixokra lesz szükség, egy blokk mérete pedig 2×2 lesz. Transzformálásra sem lesz szükség, hiszen minden elem ugyanúgy áll.

Egy elem merevségi mátrixa tehát az alábbi lesz:

$$\underline{\underline{K}}_{jk} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \tag{3.532}$$

a konzisztens tömegmátrix pedig:

$$\underline{\underline{M}}_{konz} = \mu l_{jk} \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{210} l_{jk} & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420} l_{jk} \\ \frac{11}{210} l_{jk} & \frac{1}{105} l_{jk}^2 & \frac{13}{420} l_{jk} & -\frac{1}{140} l_{jk}^2 \\ \frac{9}{70} & \frac{13}{420} l_{jk} & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210} l_{jk} \\ -\frac{13}{420} l_{jk} & -\frac{1}{140} l_{jk}^2 & -\frac{11}{210} l_{jk} & \frac{1}{105} l_{jk}^2 \end{bmatrix}. \tag{3.533}$$

A gerendát m egyenlő hosszúságú elemre bontva a csomópontok sorszámozása rendre 1 és $m+1$ között fog változni (lásd a 3.29. ábrát). Mindegyik rúdelem $l = L/m$ hosszú lesz, a j-edik rúdelem kezdő csomópontja a j-edik, végpontja a $j+1$-edik lesz. A kompilálást a $2m+1 \times 2m+1$-méretű $\underline{\underline{K}}_{all}$ és $\underline{\underline{M}}_{all}$ mátrixokba kell elvégezni az alábbi séma szerint:

$$\underline{\underline{K}}_{all} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{12}^{11} & \underline{\underline{K}}_{12}^{12} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{K}}_{12}^{21} & \underline{\underline{K}}_{12}^{22} + \underline{\underline{K}}_{23}^{22} & \underline{\underline{K}}_{23}^{23} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \vdots \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{23}^{32} & \underline{\underline{K}}_{23}^{33} + \underline{\underline{K}}_{34}^{33} & \underline{\underline{K}}_{34}^{34} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \cdots & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{m-1,m}^{m,m} + \underline{\underline{K}}_{m,m+1}^{m,m} & \underline{\underline{K}}_{m,m+1}^{m,m+1} \\ \underline{\underline{0}} & \cdots & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}_{m,m+1}^{m+1,m} & \underline{\underline{K}}_{m,m+1}^{m+1,m+1} \end{bmatrix} \tag{3.534}$$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\omega_{0,1}$	10.758	9.731	9.701	9.695	9.694	9.693	9.693	9.693	9.693
$\omega_{0,2}$	49.301	43.033	39.230	38.924	38.836	38.803	38.789	38.782	38.778
$\omega_{0,3}$	—	108.167	96.825	88.830	87.929	87.580	87.425	87.348	87.306
$\omega_{0,4}$	—	197.203	180.038	172.133	158.659	156.919	156.109	155.698	155.474
$\omega_{0,5}$	—	—	322.141	273.604	268.957	248.754	246.024	244.568	243.756
$\omega_{0,6}$	—	—	443.706	432.669	388.239	387.298	359.120	355.319	353.068
$\omega_{0,7}$	—	—	—	648.202	565.271	523.752	527.156	489.743	484.848
$\omega_{0,8}$	—	—	—	788.811	802.846	720.153	680.088	688.530	640.605
$\omega_{0,9}$	—	—	—	—	1080.56	973.506	896.660	857.235	871.421
$\omega_{0,10}$	—	—	—	—	1232.52	1288.57	1166.75	1094.42	1055.20
$\omega_{0,11}$	—	—	—	—	—	1615.77	1499.53	1382.54	1313.22
$\omega_{0,12}$	—	—	—	—	—	1774.82	1886.32	1730.68	1620.34
$\omega_{0,13}$	—	—	—	—	—	—	2252.02	2142.18	1984.54
$\omega_{0,14}$	—	—	—	—	—	—	2415.73	2592.81	2412.48
$\omega_{0,15}$	—	—	—	—	—	—	—	2988.34	2899.28
$\omega_{0,16}$	—	—	—	—	—	—	—	3155.24	3405.43
$\omega_{0,17}$	—	—	—	—	—	—	—	—	3824.18
$\omega_{0,18}$	—	—	—	—	—	—	—	—	3993.35

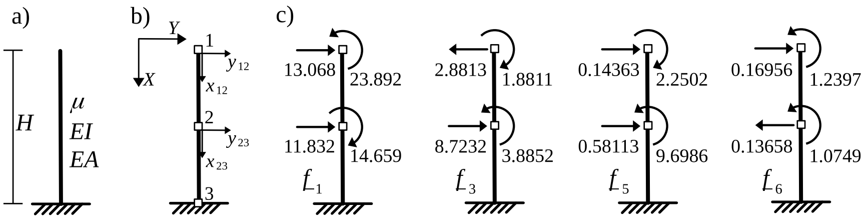
3.1. táblázat. A 3.4.2. példa kéttámaszú gerendájának sajátkörfrekvenciái m rúdelemmel számolva.

A peremfeltételeket most a két csuklós támasszal kell figyelembe vennünk. Ezek az első és az utolsó csomópont első szabadságfokának az elmozdulását akadályozzák meg, vagyis a $\underline{\underline{K}}_{all}$ és $\underline{\underline{M}}_{all}$ mátrixokból az első és a $2m+1$-edik sort és oszlopot kell törölni, így a feladatban a szabadságfokok száma $2m$ lesz a mátrixok pedig $2m \times 2m$ méretűek lesznek.

A kapott $\underline{\underline{K}}$ és $\underline{\underline{M}}$ mátrixokkal megoldva az általánosított sajátérték-feladatot, az elemek számának függvényében kiszámítottuk a sajátkörfrekvenciákat. A számított értékeket a 3.1. táblázatban mutatjuk be.

Egy-egy oszlop a fejlécben jelölt elemszámmal végzett számítás eredményét mutatja, így a szabadságfokok számának kétszerese számú eredmény kapható. Egy-egy sorban egy sajátkörfrekvencia konvergenciájáról azt állapíthatjuk meg, hogy néhány kezdeti, a végsőnél sokkal nagyobb érték után lassan közelítenek egy végleges értékhez. A végleges sajátkörfrekvenciától lényegesen eltérő eredményeket kiemelve azt láthatjuk, hogy egy adott számítás esetén a sajátkörfrekvenciák felső felébe eső eredmények mindig távol vannak még a konvergenciától. A folytonos szerkezetnek az ezekhez a sajátkörfrekvenciákhoz tartozó rezgésalakjainál már több inflexiós pont alakul ki, mint az elemek száma, a diszkretizált rendszerben viszont egy elemen belül a szakaszonkénti harmadfokú közelítés miatt legfeljebb egy inflexiós pont lehet, azaz a rezgésalak közelítése a diszkretizálás miatt kissé nagyon durva. Az alak függvényterének előírásával a valóságos szerkezetnél merevebbé tesszük a számolt numerikus modellt, emiatt kapunk nagyobb sajátkörfrekvenciát.

3.4.3. Példa (Kémény földrengés-vizsgálata)**.** *Határozzuk meg egy kémény (lásd a 3.30.a) ábra) befogási keresztmetszetének maximális igénybevételeit rezgésalakonként, ha a vízszintes támaszmozgáshoz tartozó pszeudogyorsulás-válaszspektrum értéke mindegyik rezgésalakhoz $S_d = 2.5 m/s^2$. A kéményt bontsuk két azonos rúdelemre és használjunk konzisztens tömegmátrixot.*
Az oszlop adatai: $\mu = 0.7 t/m$, $EA = 4800 kN$, $EI = 36000 kNm^2$, $H = 24 m$.



3.30. ábra. a) Az alul befogott oszlop.b) A csomópontok és rúdelemek. c) Az egyes rezgésalakokhoz számolt maximális igénybevételt okozó erőrendszerek.

Megoldás

Diszkretizáljuk a kéményt a 3.30.b) ábrán látható módon, és vegyük fel a globális koordinátarendszert úgy, hogy az XY-tengelyek essenek egybe az xy-tengelyekkel, így nem kell majd transzformálni.. Az elemi merevségi mátrixok azonosak az 12- és a 23-elem esetén:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 & -400 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 1500 & 0 & -250 & 1500 \\ 0 & 1500 & 12000 & 0 & -1500 & 6000 \\ -400 & 0 & 0 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & -250 & -1500 & 0 & 250 & -1500 \\ 0 & 1500 & 6000 & 0 & -1500 & 12000 \end{bmatrix}, \tag{3.535}$$

és ugyanez elmondható a konzisztens tömegmátrixról is:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 2.8 & 0 & 0 & 1.4 & 0 & 0 \\ 0 & 3.12 & 5.28 & 0 & 1.08 & -3.12 \\ 0 & 5.28 & 11.52 & 0 & 3.12 & -8.64 \\ 1.4 & 0 & 0 & 2.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.08 & 3.12 & 0 & 3.12 & -5.28 \\ 0 & -3.12 & -8.64 & 0 & -5.28 & 11.52 \end{bmatrix} \tag{3.536}$$

Kompilálás után a teljes mátrixok értékei:

$$\underline{\underline{K}}_{all} = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 & -400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 1500 & 0 & -250 & 1500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1500 & 12000 & 0 & -1500 & 6000 & 0 & 0 & 0 \\ -400 & 0 & 0 & 800 & 0 & 0 & -400 & 0 & 0 \\ 0 & -250 & -1500 & 0 & 500 & 0 & 0 & -250 & 1500 \\ 0 & 1500 & 6000 & 0 & 0 & 24000 & 0 & -1500 & 6000 \\ 0 & 0 & 0 & -400 & 0 & 0 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -250 & -1500 & 0 & 250 & -1500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1500 & 6000 & 0 & -1500 & 12000 \end{bmatrix}, \tag{3.537}$$

$$\underline{\underline{M}}_{all} = \begin{bmatrix} 2.8 & 0 & 0 & 1.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.12 & 5.28 & 0 & 1.08 & -3.12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.28 & 11.52 & 0 & 3.12 & -8.64 & 0 & 0 & 0 \\ 1.4 & 0 & 0 & 5.6 & 0 & 0 & 1.4 & 0 & 0 \\ 0 & 1.08 & 3.12 & 0 & 6.24 & 0 & 0 & 1.08 & -3.12 \\ 0 & -3.12 & -8.64 & 0 & 0 & 23.04 & 0 & 3.12 & -8.64 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4 & 0 & 0 & 2.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.08 & 3.12 & 0 & 3.12 & -5.28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.12 & -8.64 & 0 & -5.28 & 11.52 \end{bmatrix}. \tag{3.538}$$

Az alsó csomópont merev befogása miatt az utolsó három sort és oszlopot törölhetjük a mátrixokból, így kapjuk a modálanalízishez szükséges két 6×6-os mátrixot:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 & -400 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 1500 & 0 & -250 & 1500 \\ 0 & 1500 & 12000 & 0 & -1500 & 6000 \\ -400 & 0 & 0 & 800 & 0 & 0 \\ 0 & -250 & -1500 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 1500 & 6000 & 0 & 0 & 24000 \end{bmatrix}, \tag{3.539}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 2.8 & 0 & 0 & 1.4 & 0 & 0 \\ 0 & 3.12 & 5.28 & 0 & 1.08 & -3.12 \\ 0 & 5.28 & 11.52 & 0 & 3.12 & -8.64 \\ 1.4 & 0 & 0 & 5.6 & 0 & 0 \\ 0 & 1.08 & 3.12 & 0 & 6.24 & 0 \\ 0 & -3.12 & -8.64 & 0 & 0 & 23.04 \end{bmatrix}, \tag{3.540}$$

Az általánosított sajátértékfeladat megoldásából a sajátkörfrekvenciák:

$$\underline{\underline{\Omega}} = \langle 1.38497 \quad 5.55991 \quad 8.74888 \quad 19.4229 \quad 29.5903 \quad 85.8838 \rangle \tag{3.541}$$

A rezgésalakok pedig:

$$\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} 0 & 0.363219 & 0 & 0.525581 & 0 & 0 \\ 0.488425 & 0 & 0.492753 & 0 & 0.548029 & -0.920285 \\ -0.028014 & 0 & -0.0988487 & 0 & -0.220225 & 0.741213 \\ 0 & 0.256834 & 0 & -0.371642 & 0 & 0 \\ 0.165829 & 0 & -0.355676 & 0 & 0.0557476 & -0.233015 \\ -0.0236691 & 0 & -0.00891967 & 0 & 0.174625 & 0.199562 \end{bmatrix}. \tag{3.542}$$

A teher meghatározásához szükségünk van a támasz irányába mozgó terhek vektorára (lásd (3.362)), amihez a mutatóvektor:

$$\underline{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \tag{3.543}$$

Hiszen a támasszal kiegészített rendszerben minden csomópont második szabadságfoka tolódik el vízszintesen. A külső csomópontokkal kiegészített szerkezet tömegmátrixának belső csomópontokhoz tartozó sorai az $\underline{\underline{M}}_{all}$

mátrix első hat sora. A szorzást elvégezve azt kapjuk, hogy:

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.2 \\ 8.4 \\ 0 \\ 8.4 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.544}$$

A modális részvételek közül a második és a negyedik rezgésalak a függőleges rezgésekhez tartozik, azok nullák lesznek, a hajlítórezgésekhez pedig (3.410) alapján az alábbi értékek adódnak:

$$\Gamma_1 = 3.2090, \qquad \Gamma_3 = -1.7484, \qquad \Gamma_5 = 0.92011, \qquad \Gamma_6 = 0.40366. \tag{3.545}$$

A rezgésmódonkénti maximális igénybevételeket okozó erőrendszereket (3.418) alapján számíthatjuk[a]. A második és negyedik alakhoz zérusvektorok tartoznak, a többi:

$$\underline{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 13.068 \\ 23.892 \\ 0 \\ 11.832 \\ -14.659 \end{bmatrix}, \underline{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.8813 \\ -1.8811 \\ 0 \\ 8.7232 \\ 3.8852 \end{bmatrix}, \underline{f}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.14363 \\ -2.2502 \\ 0 \\ 0.58113 \\ 9.6986 \end{bmatrix}, \underline{f}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.16956 \\ 1.2397 \\ 0 \\ -0.13658 \\ 1.0749 \end{bmatrix} \tag{3.546}$$

A nemzérus erőrendszereket a 3.30.c) ábrán rajzoltuk fel. Ezek alapján a rezgésmódonkénti maximális befogási nyomatékok egy konzol nyomatékai:

$$\begin{aligned} M_1 &= -13.068 \cdot 24 + 23.892 - 11.832\dot{1}2 - 14.659 = -446.39 kNm \\ M_3 &= 2.8813 \cdot 24 - 1.8811 - 8.7232 \cdot 12 + 3.8852 = -33.523 kNm \\ M_5 &= -0.14363 \cdot 24 - 2.2502 - 0.58113 \cdot 12 + 9.6986 = -2.9723 kNm \\ M_6 &= -0.16956 \cdot 24 + 1.2397 + 0.13658 \cdot 12 + 1.0749 = -0.11600 kNm \end{aligned} \tag{3.547}$$

A második és negyedik rezgésalakban nem keletkezik nyomaték, azaz

$$M_2 = M_4 = 0. \tag{3.548}$$

A (3.547) egyenletben kapott nyomatékok ugyan előjeles mennyiségek, de a további használat szempontjából az abszolútértékük számít. Az abszolútértékek összegével számolva a maximális nyomaték 483.0kNm-re adódna, és jól látszik, hogy az utolsó alak szerepe már így is elhanyagolható lenne. A hatékony tömeget számolva (lásd (3.426)) azonban arra juthatunk, hogy a szerkezet $\mu \cdot H = 16.8$ tonnás teljes tömegéből csak $\sum_j \Gamma_j^2 = 14.3645$ tonnát vettünk figyelembe, ami kb. 85 százalék. A hiányzó tömegnek az az oka, hogy a két elem még egy elég durva felbontás, ami miatt túl nagy tömeget redukáltunk a támaszhoz képest nem mozgó támaszba.

[a] Itt most minden alakra meg volt adva S_d értéke. Ennek hiányában természetesen a sajátkörfrekvenciákból számolt periódusidőknek megfelelő értékeket kellene kiolvasni a válaszspektrum diagramjából.

3.4.4. Példa (Rugalmas megtámasztás konvergenciája). *Határozzuk meg egy befogott-befogott tartó (lásd 3.31.a) ábra) hajlítórezgéshez tartozó sajátkörfrekvenciáit a támasz rugalmas megtámasztással történő helyettesítésével Használjunk konzisztens tömegmátrixot és* 3 *rúdelemet!*
A gerenda adatai: $\mu = 2.1t/m$, $EI = 1200kNm^2$, $L = 12m$.

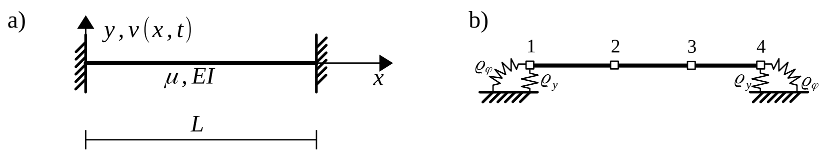
Megoldás
Csak a hajlítórezgéssel foglalkozunk, ezért csomópontonként két szabadságfokunk van (a függőleges eltolódás és az elfordulás), az elemi merevségi mátrix pedig 4×4-es:

$$\underline{\underline{K}}_e = \begin{bmatrix} 225 & 450 & -225 & 450 \\ 450 & 1200 & -450 & 600 \\ -225 & -450 & 225 & -450 \\ 450 & 600 & -450 & 1200 \end{bmatrix}. \tag{3.549}$$

Az elemi konzisztens tömegmátrix szintén 4×4-es:

$$\underline{\underline{M}}_e = \begin{bmatrix} 31.2 & 17.6 & 10.8 & -10.4 \\ 17.6 & 12.8 & 10.4 & -9.6 \\ 10.8 & 10.4 & 31.2 & -17.6 \\ -10.4 & -9.6 & -17.6 & 12.8 \end{bmatrix}. \tag{3.550}$$

A három rúdelem (3.549) szerinti elemi merevségi mátrixaiból kompi-



3.31. ábra. a) A befogott-befogott gerenda.b) A csomópontok, rúdelemek és a rugalmas megtámasztás.

lálhatjuk a teljes merevségi mátrixot:

$$\underline{\underline{K}}_{all} = \begin{bmatrix} 225 & 450 & -225 & 450 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 450 & 1200 & -450 & 600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -225 & -450 & 450 & 0 & -225 & 450 & 0 & 0 \\ 450 & 600 & 0 & 2400 & -450 & 600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -225 & -450 & 450 & 0 & -225 & 450 \\ 0 & 0 & 450 & 600 & 0 & 2400 & -450 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -225 & -450 & 225 & -450 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 450 & 600 & -450 & 1200 \end{bmatrix}, \tag{3.551}$$

a (3.550) szerinti elemi tömegmátrixokból pedig teljes tömegmátrixot kapjuk:

$$\underline{\underline{M}}_{all} = \begin{bmatrix} 31.2 & 17.6 & 10.8 & -10.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17.6 & 12.8 & 10.4 & -9.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10.8 & 10.4 & 62.4 & 0 & 10.8 & -10.4 & 0 & 0 \\ -10.4 & -9.6 & 0 & 25.6 & 10.4 & -9.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.8 & 10.4 & 62.4 & 0 & 10.8 & -10.4 \\ 0 & 0 & -10.4 & -9.6 & 0 & 25.6 & 10.4 & -9.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10.8 & 10.4 & 31.2 & -17.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10.4 & -9.6 & -17.6 & 12.8 \end{bmatrix} \tag{3.552}$$

A rugalmas megtámasztásokat (lásd 3.31.b) ábra) úgy vesszük figyelembe, hogy a megtámasztott szabadságfokokhoz tartozó főátló-elemekhez hozzáadjuk a megtámasztó rugó merevségét:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 225+\varrho_y & 450 & -225 & 450 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 450 & 1200+\varrho_\varphi & -450 & 600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -225 & -450 & 450 & 0 & -225 & 450 & 0 & 0 \\ 450 & 600 & 0 & 2400 & -450 & 600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -225 & -450 & 450 & 0 & -225 & 450 \\ 0 & 0 & 450 & 600 & 0 & 2400 & -450 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -225 & -450 & 225+\varrho_y & -450 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 450 & 600 & -450 & 1200+\varrho_\varphi \end{bmatrix} \tag{3.553}$$

A rugalmas támaszok esetében nem változik a mátrixok mérete, így a teljes tömegmátrix egyben a számításban használt tömegmátrix lesz:

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}_{all} \tag{3.554}$$

A kapott $\underline{\underline{K}}$ és $\underline{\underline{M}}$ mátrixokkal megoldva az általánosított sajátértékfeladatot, a rugómerevségek függvényében kiszámítottuk a sajátkörfrekvenciákat. Példánkban azonos számértékeket használunk a kétféle merevségre, de azok valójában különböző mértékegységűek, azaz különböző mennyiségek. A számított sajátkörfrekvenciákat a 3.2. táblázatban mutatjuk be. Az első sorban a megtámasztás nélküli eset, azaz a $\underline{\underline{K}}_{all}$ és $\underline{\underline{M}}_{all}$ mátrixokból számolt sajátkörfrekvenciák láthatók. Mivel nincs támasz, a csak függőleges eltolódású síkbeli feladatnak megfelelően két független merevtest-szerű

$\varrho_y = \varrho_\varphi$	$\sqrt{\frac{2\varrho_y}{\mu L}}$	$\omega_{0,1}$	$\omega_{0,2}$	$\omega_{0,3}$	$\omega_{0,4}$	$\omega_{0,5}$	$\omega_{0,6}$	$\omega_{0,7}$	$\omega_{0,8}$
0	0	0	0	1.1777	3.254	7.138	12.813	24.81	30.52
10^{-2}	0.00891	0.0089	0.0156	1.1779	3.254	7.138	12.813	24.81	30.52
10^{-1}	0.02817	0.0281	0.0495	1.1793	3.255	7.138	12.813	24.81	30.52
10^{0}	0.08909	0.0880	0.1561	1.1933	3.261	7.143	12.818	24.82	30.53
10^{1}	0.28172	0.2530	0.4848	1.3285	3.324	7.187	12.866	24.93	30.62
10^{2}	0.89088	0.5134	1.3115	2.2439	3.907	7.608	13.314	25.97	31.46
10^{3}	2.8172	0.8743	2.3805	4.6012	6.766	10.167	15.929	35.19	39.73
10^{4}	8.9087	1.1287	3.1310	7.0343	12.834	19.715	22.714	84.77	90.50
10^{5}	28.172	1.1739	3.2835	7.6107	15.043	56.893	59.413	258.75	274.01
10^{6}	89.087	1.1787	3.3003	7.6733	15.242	178.193	184.806	815.26	862.62
10^{7}	281.72	1.1792	3.3020	7.6796	15.261	562.955	583.466	2577.1	2726.6
∞	∞	1.1793	3.3022	7.6807	15.263	-	-	-	-

3.2. táblázat. A 3.4.4. példa gerendájának sajátkörfrekvenciái a támaszok rugómerevségének függvényében.

mozgás, azaz két zérus sajátkörfrekvenecia van. Az utolsó sorban a merev megtámasztás pontos figyelembevételével, azaz a mátrixok kondenzálásával kapott 4×4-es mátrixokból számolt négy sajátkörfrekvencia látható. Az adott diszkretizálás mellett ezek az értékek tartoznak a végtelen rugómerevséghez, így a konvergencia esetén ezekhez az értékekhez tartanak a sajátkörfrekvenciák. Az utolsó négy sajátkörfrekvencia a rugómerevség növelésével már a végtelenhez tart, tízszer akkora rugómerevséghez kb. $\sqrt{10}$-szer akkora sajátkörfrekvenciák tartoznak az utolsó négy oszlop alsó soraiban.

A gerenda függőleges, merevtestszerű rezgése esetén a két ϱ_y rugó támasztaná meg a μL tömegű gerendát. Ennek az egyszabadságfokú rendszernek a sajátkörfrrkvenciáját a második oszlopban tüntettük fel. Látható, hogy egy-egy sajátkörfrekvencia akkor van közel a „pontos” értékhez, amikor ez a sajátkörfrekvencia legalább egy nagyságrenddel nagyobb a számított eredménynél.

4. fejezet

Folytonos szerkezetek mechanikai rezgései

4.1. Húzott-nyomott gerenda rezgése

Folytonos szerkezetek rezgései közül először a húzott-nyomott rúd differenciálegyenletét és a megoldás lépéseit mutatjuk be. Legyen adott az E rugalmassági moduluszú, ϱ sűrűségü anyagból készült prizmatikus rúd. A rúd keresztmetszeti területe A, a rúd tengelye egybeesik az x-tengellyel. A rudat a hossza mentén a $p(x,t)$ intenzitású, tengelyirányú erő terheli. A rúd *fajlagos tömeg*ét jelölje $\mu = \varrho A$.

Keressük a keresztmetszetek hosszirányú elmozdulásának $u(x,t)$ függvényét, ami kielégíti a rúd végein előírt peremfeltételeket, és a t_0 időpontban előírt kezdeti feltételeket.

A kezdeti feltételek általános alakja

$$u(x,t_0) = u_0(x), \qquad \dot{u}(x,t_0) = v_0(x), \tag{4.1}$$

ahol $u_0(x)$ a kezdeti alak függvénye, $v_0(x)$ pedig a kezdeti sebességfüggvény.

A peremfeltételek a megtámasztási viszonyoktól függenek. Jelölje x_0 és x_L a rúd kezdő- és végpontjának koordinátáját. Első példaként a mindkét végén megtámasztott rúd peremfeltételei:

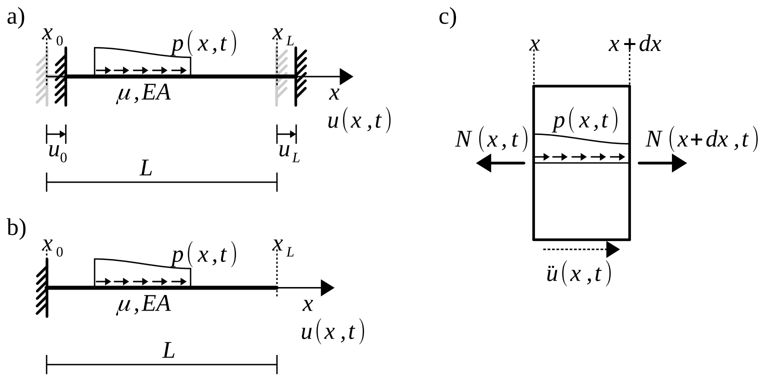
$$u(x_0,t) = u_0, \qquad u(x_L,t) = u_L, \tag{4.2}$$

ahol u_0 és u_L a rúd két végének előírt elmozdulása. (Mozdulatlan támaszok esetén természetesen nulla az értékük.) Második példaként a kezdőpontjában megtámasztott, a végpontjában szabad végű rúd peremfeltételei mozdulatlan támasz és terheletlen rúdvég esetén:

$$u(x_0,t) = 0, \qquad u'(x_L,t) = 0. \tag{4.3}$$

A két példát a 4.1.a)-b) ábra mutatja. Megjegyezzük, hogy a peremfeltételek változtatásával számtalan további lehetséges feladat képezhető[1].

[1]Csak említés szintjén mondjuk itt az időben változó peremfeltételt, illetve a rugalmas megtámasztás miatti peremfeltételt.



4.1. ábra. Húzott-nyomott rúd modellje a) mindkét végén megtámasztott, előírt támaszelmozdulással, b) egyik végén megtámasztott, másik végén szabad rúd, c) elemi hosszúságú rúdszakasz elkülönítése.

4.1.1. Rezgés differenciálegyenlete

A húzott–nyomott rúd rezgésének differenciálegyenletéhez tekintsük egy elemi darab elkülönítését a 4.1.c) ábra szerint. A rudat elvágtuk az x és a tőle elemien kicsiny dx távolságra levő $x + dx$ koordinátájú keresztmetszeteknél. Az ábrán feltüntettük az elemi darabra ható erőket, azaz a kezdő- és végkeresztmetszetre ható $N(x, t)$ és $N(x + dx, t)$ normálerőket, valamint a megoszló erőt. Utóbbi a dx hosszúság elemien kicsiny volta miatt közelíthető a hossz mentén állandó $p(x, t)$ intenzitással. Ezek az erők együttesen hozzák létre a μdx tömegű elemi darab gyorsulását, azaz *Newton második mozgástörvényét* felírhatjuk:

$$\mu dx\ddot{u}(x,t) = -N(x,t) + N(x+dx,t) + p(x,t)dx. \tag{4.4}$$

Fejtsük Taylor-sorba a normálerő függvényét az x pont körül:

$$N(x+dx,t) = N(x,1) + \frac{\partial N(x,t)}{\partial x}dx + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 N(x,t)}{\partial x}dx^2 + \dots \tag{4.5}$$

Vezessük be az x szerinti parciális derivált jelölésére a $'$ szimbólumot. Ezután a dx-ben magasabb fokú tagokat elhanyagolva a normálerő az $x + dx$ keresztmetszetnél közelítőleg:

$$N(x+dx,t) \approx N(x,t) + N'(x,t)dx. \tag{4.6}$$

Ezt behelyettesítve (4.4)-be:

$$\mu dx\ddot{u}(x,t) = -N(x,t) + N(x,t) + N'(x,t)dx + p(x,t)dx. \tag{4.7}$$

Egyszerűsítsük az egyenletet $-N(x,t) + N(x,t) = 0$-val, és osszuk le mindkét oldalt dx-szel, így azt kapjuk, hogy:

$$\mu\ddot{u}(x,t) = N'(x,t) + p(x,t). \tag{4.8}$$

(Ha nem közelítettük volna korábban $p(x,t)$-t és $N(x+dx,t)$-t, akkor most még egy $dx \to 0$ határátmenetre lenne szükség, hogy azoktól a tagoktól megszabaduljunk.

A húzott-nyomott rúd *geometriai egyenlete* az alakváltozások (itt az $\varepsilon(x,t)$ fajlagos nyúlás) és az elmozdulások közötti kapcsolatot adja meg:

$$\varepsilon(x,t) = u'(x,t). \tag{4.9}$$

Az *anyagegyenlet* a keresztmetszet igénybevétele és alakváltozása közötti kapcsolatot írja le:

$$N(x,t) = EA\varepsilon(x,t), \tag{4.10}$$

ahol EA a keresztmetszet *normálmerevsége*. Helyettesítsük be (4.9)-t (4.10) jobb oldalába:

$$N(x,t) = EAu'(x,t), \tag{4.11}$$

majd ennek deriváltját (4.8) jobb oldalába. Az ismert és ismeretlen függvényeket egy oldalra rendezve kapjuk a *húzott-nyomott rúd mozgásának parciális differenciálegyenletét*:

$$EAu''(x,t) - \mu\ddot{u}(x,t) = -p(x,t). \tag{4.12}$$

A teljes megoldáshoz a feladatot ki kell egészíteni a megfelelő kezdeti- és peremfeltételekkel. A megoldás stratégiája az egy- és többszabadságfokú rendszereknél látotthoz hasonló. A *szabadrezgés-feladat* megoldásaként kapjuk meg a sajátkörfrekvenciákat és a sajátrezgésalakokat. A rezgés ezek lineáris kombinációjaként adódik, ahol az egyes alakok együtthatóit a kezdeti feltételekből kell meghatározni. A *gerjesztett rendszer* esetén a megoldás egy partikuláris megoldásnak és a szabadrezgés általános megoldásának az összegeként adódik, utóbbi paramétereit a kezdeti feltételek függvényében kell meghatározni. A hasonlóságnak megfelelően először a szabadrezgés megoldását mutatjuk be.

4.1.2. Szabadrezgés megoldása állóhullámokkal

A húzott–nyomott rúd szabadrezgésének a parciális differenciálegyenlete:

$$EAu''(x,t) - \mu\ddot{u}(x,t) = 0. \tag{4.13}$$

4.1.2.1. Megoldás feltételezett alakja

Keressük a megoldást az alábbi alakban:

$$u(x,t) = v(x)\left(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)\right), \tag{4.14}$$

azaz válasszuk szét a térbeli és időbeli változást a $v(x)$ alakfüggvény és az $(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t))$ harmonikus függvény szorzataként. (Utóbbit abból a tapasztalatból kiindulva, hogy az idő szerinti második deriváltak esetén ilyen időfüggéseket kaptunk korábban.)

A változók szétválasztásának köszönhetően a parciális deriváltak könnyen felírhatók:

$$u''(x,t) = v''(x)\left(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)\right), \tag{4.15}$$

$$\ddot{u}(x,t) = v(x)(-\omega_0^2)\left(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)\right). \tag{4.16}$$

A differenciálegyenletbe behelyettesítve

$$\begin{aligned} &EAv''(x)\left(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)\right) + \\ &\qquad + \mu v(x)(\omega_0^2)\left(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)\right) = 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Nemtriviális megoldást keresünk, így a nem mindig zérus harmonikus[2] taggal leoszthatjuk az egyenletet, így a rezgésalak közönséges differenciálegyenletét kapjuk:

$$EAv''(x) + \mu\omega_0^2 v(x) = 0. \tag{4.18}$$

4.1.2.2. Alakfüggvény feltételezett alakja

Keressük az alakfüggvényt az alábbi alakban:

$$v(x) = A\cos\left(\frac{\psi}{L}x\right) + B\sin\left(\frac{\psi}{L}x\right), \tag{4.19}$$

ahol ψ az alakot meghatározó *frekvenciaparaméter*, L pedig egy rögzített hosszúság (például lehet a rúd hossza). A feltételezett alak második deriváltja így:

$$v''(x) = -\frac{\psi^2}{L^2}\left(A\cos\left(\frac{\psi}{L}x\right) + B\sin\left(\frac{\psi}{L}x\right)\right) = -\frac{\psi^2}{L^2}v(x), \tag{4.20}$$

amit behelyettesíthetünk a differenciálegyenletbe:

$$-EA\frac{\psi^2}{L^2}v(x) + \mu\omega_0^2 v(x) = 0. \tag{4.21}$$

A nemtriviális megoldás esetén leoszthatjuk az egyenletet $v(x)$-szel, így az ω_0 sajátkörfrekvencia és a ψ frekvenciaparaméter között az alábbi összefüggés írható fel:

$$\psi = \omega_0\sqrt{\frac{\mu L^2}{EA}}, \qquad \omega_0 = \psi\sqrt{\frac{EA}{\mu L^2}}. \tag{4.22}$$

A képletben EA/L az L hosszúságú rúdszakasz helyettesítő rugómerevségével egyenlő, μL pedig ugyanennek a szakasznak a tömege, azaz egy merevség-tömeg hányadostól függ itt is a sajátkörfrekvencia.. A két egyenlet azt is kifejezi, hogy e két mennyiség egymással szoros kapcsolatban áll. Ha egy nagyobb frekvenciaparaméter miatt a (4.19) egyenlet szerinti rezgésalak a hossz mentén gyorsabban változik, akkor ez az alak a nagyobb sajátkörfrekvenciának megfelelően gyorsabban fog rezegni.

4.1.2.3. Peremfeltételek

A következő lépés az alak meghatározásához a (4.19) szerinti alak A és B paraméterének, valamint a frekvenciaparaméternek a számítása. Ehhez a peremfeltételeket kell felírni és az így kapott egyenletrendszer lehetséges megoldásait megtalálni. Egy x_P pontban $u(x_P, t)$-re előírt zérus érték a (4.14) szerint feltételezett alakkal

$$u(x_P, t) = v(x_P)\left(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)\right) = 0 \quad \to \quad v(x_P) = 0. \tag{4.23}$$

Hasonló módon egy x_Q pontban a deriváltra előírt feltételből a deriváltra vonatkozó peremfeltétel származtatható:

$$u'(x_Q, t) = v'(x_Q)\left(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)\right) = 0 \quad \to \quad v'(x_Q) = 0. \tag{4.24}$$

[2] $(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t))$

A másodrendű differenciálegyenlethez a két peremen összesen két feltételt írhatunk elő, ezekben az egyenletekben az A és B paraméterek együtthatói a ψ függvényében írhatók fel, azaz formálisan egy

$$\underline{\underline{F}}(\psi)\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{4.25}$$

homogén lineáris egyenletrendszer írható fel, amiben a $\underline{\underline{F}}(\psi)$ *frekvenciamátrix* tartalmazza a peremfeltételeket kifejező egyenletrendszerben az általános megoldás paramétereinek együtthatóit. A homogén egyenletrendszernek akkor van nemtriviális megoldása, ha az együtthatómátrix szinguláris, azaz determinánsa zérus:

$$\left|\underline{\underline{F}}(\psi)\right|=0. \tag{4.26}$$

Ez egy nemlineáris egyenletet eredményez ψ-re, aminek végtelen sok megoldása van, jelöljük ezeket növekvő sorba rendezve ψ_1, ψ_2, $\psi_3, \ldots$-tal. Mindegyik ψ_r-hez külön meg kell oldani a (4.25) egyenletrendszert az A_r és B_r értékekhez. Az egyenletrendszer két egyenlete azonban nem független egymástól, hiszen a mátrix szinguláris, ezért nincs egyértelmű megoldás, csak az A_r és B_r értékek egymáshoz viszonyított arányát kapjuk meg. Ez hasonló jelenség, mint amikor a többszabadságfokú rendszereknél a sajátvektort nem lehetett egyértelműen megkapni.

Folytonos szerkezetnél is szükség lehet a rezgésalakok egyértelművé tételére. Itt a tömegre normálást használjuk, ami azt jelenti, hogy úgy skálázzuk a függvényt, hogy teljesüljön az alábbi kapcsolat:

$$\int_0^L \mu v_r^2(x)dx=1. \tag{4.27}$$

4.1.1. Példa (Mindkét végén megtámasztott rúd)**.** *Határozzuk meg a 4.1.a) ábra szerinti, mindkét végén megtámasztott rúd sajátkörfrekvenciáit és rezgésalakjait, ha a támaszok elmozdulásai $u_0=u_L=0$.*

Megoldás
Helyezzük el a koordinátarendszert szimmetrikusan, így a rezgő rúd két peremfeltételei:

$$u(-L/2,t)=0, \qquad u(L/2,t)=0. \tag{4.28}$$

A (4.14) szerint feltételezett alakot behelyettesítve, az alakfüggvényre az alábbi peremfeltételeket kapjuk:

$$v(-L/2)=0, \qquad v(L/2)=0, \tag{4.29}$$

azaz a (4.19) szerinti feltételezett alakot behelyettesítve:

$$\begin{aligned}A\cos\left(-\frac{\psi}{2}\right)+B\sin\left(-\frac{\psi}{2}\right)&=0\\A\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)+B\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)&=0.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Az A és B paraméterek együtthatóiból képzett frekvenciamátrix:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\psi}{2}\right) & \sin\left(-\frac{\psi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \end{bmatrix}. \tag{4.31}$$

Fejtsük ki a frekvenciamátrix determinánsát, használjuk fel a harmonikus függvények szimmetriáit[a], és tegyük egyenlővé a determinánst nullával:

$$|\underline{\underline{F}}| = 2\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) = 0. \tag{4.32}$$

Ennek az egyenletnek kétféle megoldása van:

$$\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \to \psi = (2k-1)\pi, \tag{4.33}$$

vagy

$$\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \to \psi = 2k\pi. \tag{4.34}$$

amit most összefoglalva írhatunk úgy, hogy:

$$\psi_r = r\pi. \tag{4.35}$$

Az r-edik sajátkörfrekvencia (4.22) alapján:

$$\omega_{0r} = r\pi\sqrt{\frac{EA}{\mu L^2}}. \tag{4.36}$$

A rezgésalakokat a (4.30) egyenletek bármelyikébe történő visszahelyettesítéssel kapjuk meg. Páratlan r-értékekre A nullával szorzódik, így $B_r = 0$ és A értéke tetszőleges:

$$v_r(x) = A_r \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \tag{4.37}$$

Az alak r darab szinusz-félhullámból áll, a függvény páros, azaz ábrázolva szimmetrikus lesz.

Páros r-értékek esetén B szorzódik nullával, ,így $A_r = 0$ és B értéke lehet tetszőleges:

$$v_r(x) = B_r \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \tag{4.38}$$

a kapott rezgésalak most is r darab szinusz-félhullámból áll, a függvény páratlan, azaz ábrázolva antimetrikus lesz.

A rezgésalakok egyértelművé tételéhez a tömegre normálás (4.27) szerinti feltétele most akkor teljesül, ha az A_r vagy B_r paraméterek értéke mindegyik alak esetén $\sqrt{\frac{2}{\mu L}}$.

Megjegyezzük, hogy ugyanezeket a sajátkörfrekvenciákat és rezgésalakokat kaptuk volna akkor is, ha a koordinátarendszer kezdőpontját a rúd kezdőpontjába helyezzük: a sajátkörfrekvenciák közvetlenül, a fenti megosztás nélkül jöttek volna ki, az összes alak $B_r \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)$ alakú lett volna, viszont az alakok szimmetriája nem látszódott volna a képletekből.

[a] $\cos(-x) = \cos(x)$ és $\sin(-x) = -\sin(x)$

4.1.2. Példa (Egyik végén megtámasztott rúd)**.** *Határozzuk meg a 4.1.b) ábra szerinti, egyik végén megtámasztott rúd sajátkörfrekvenciáit és rezgésalakjait, mozdulatlan támasz és terheletlen rúdvég mellett.*

Megoldás
Helyezzük el a koordinátarendszer origóját a rúd kezdőpontjába, így a rezgő rúd két peremfeltétele:

$$u(0,t) = 0, \qquad u'(L,t) = 0. \tag{4.39}$$

A (4.14) szerint feltételezett alakot behelyettesítve, az alakfüggvényre az alábbi peremfeltételeket kapjuk:

$$v(0) = 0, \qquad v'(L) = 0, \tag{4.40}$$

azaz a (4.19) szerinti feltételezett alakot behelyettesítve:

$$\begin{gathered} A\cos(0) + B\sin(0) = 0 \\ \psi\left(-A\sin(\psi) + B\cos(\psi)\right) = 0. \end{gathered} \tag{4.41}$$

Az A és B paraméterek együtthatóiból képzett frekvenciamátrix:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix}. \tag{4.42}$$

Fejtsük ki a frekvenciamátrix determinánsát, használjuk fel, hogy $\cos(0) = 1$ és $\sin(0) = 0$, és tegyük egyenlővé a determinánst nullával:

$$|\underline{\underline{F}}| = \cos(\psi) = 0. \tag{4.43}$$

Ennek az egyenletnek egyféle megoldása van:

$$\cos(\psi) \to \psi_r = \frac{(2r-1)\pi}{2}. \tag{4.44}$$

Az r-edik sajátkörfrekvencia (4.22) alapján:

$$\omega_{0r} = \frac{(2r-1)\pi}{2}\sqrt{\frac{EA}{\mu L^2}}. \tag{4.45}$$

A rezgésalakokat a (4.41) egyenletek egyikébe történő visszahelyettesítéssel kapjuk meg. Bármilyen r értékre B nullával szorzódik, így $A = 0$ és B értéke tetszőleges, így a rezgésalakok:

$$v_r(x) = B_r \sin\left(\frac{(2r-1)\pi x}{2L}\right). \tag{4.46}$$

A rezgésalakok egyértelművé tételéhez a tömegre normálás (4.27) szerinti feltétele most akkor teljesül, ha a B_r paraméter mindegyik alak esetén $\sqrt{\frac{2}{\mu L}}$ értékű.

Az egyértelművé tett rezgésalakokkal a szabadrezgés általános megoldása:

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x)\left(a_r \cos(\omega_{0r} t) + b_r \sin(\omega_{0r} t)\right), \tag{4.47}$$

ahol a végtelen számú a_r, b_r paraméter a kezdeti feltételektől, azaz a kezdeti alaktól és sebességtől függ.

A paraméterek számításához tekintsük át az alakfüggvények néhány tulajdonságát.

4.1.2.4. Az alakfüggvények tulajdonságai

Tekintsünk két különböző frekvenciaparamétert, ψ_p-t és ψ_r-t, ahol $p \neq r$, és a hozzájuk tartozó rezgésalakokat, azaz $v_p(x)$-t és $v_r(x)$-t. Vezessük be a két rezgésalak tömeggel képzett skaláris szorzatát:

$$\int v_p(x) \mu v_r(x) dx, \tag{4.48}$$

majd helyettesítsük $v_p(x)$-et a (4.20) szerint a második deriváltjával.

$$\int v_p(x) \mu v_r(x) dx = \int -\frac{L^2}{\psi_p^2} v_p''(x) \mu v_r(x) dx, \tag{4.49}$$

Integráljuk parciálisan a kifejezés jobb oldalát[3]:

$$\int -\frac{L^2}{\psi_p^2} v_p''(x) \mu v_r(x) dx = -\frac{L^2}{\psi_p^2}\left(\left[v_p'(x) \mu v_r(x) dx\right] - \int v_p'(x) \mu v_r'(x) dx\right). \tag{4.50}$$

A rúd végein megadott peremfeltételek miatt vagy az elmozdulás, vagy az alakváltozás nulla a rúd végein, ezért a $\left[v_p'(x) \mu v_r(x) dx\right]$ tag kiértékelésekor az egyik szorzótényező nulla lesz az alsó és a felső behelyettesítési értéknél is, vagyis ez a tag zérus lesz, így az eredeti szorzatintegrál értéke az alábbira adódik:

$$\boxed{\int v_p(x) \mu v_r(x) dx = \frac{L^2}{\psi_p}^2 \int v_p'(x) \mu v_r'(x) dx.} \tag{4.51}$$

[3] Azaz az $\int u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)] - \int u(x)v'(x)dx$ -ben legyen $u'(x) = v_p''(x)$ és $v(x) = v_r(x)$.

Ugyanezeket a lépéseket elvégezhetjük p és r szerepét felcserélve, azaz helyettesítsük $v_r(x)$-et a (4.20) szerint a második deriváltjával.

$$\int v_p(x)\mu v_r(x)dx = \int -\frac{L^2}{\psi_r^2} v_p(x)\mu v_r''(x)dx, \tag{4.52}$$

és integráljuk parciálisan a kifejezés jobb oldalát

$$\int -\frac{L^2}{\psi_r^2} v_p(x)\mu v_r''(x)dx = -\frac{L^2}{\psi_r^2}\left([v_p(x)\mu v_r'(x)dx] - \int v_p'(x)\mu v_r'(x)dx\right). \tag{4.53}$$

Most a $[v_p(x)\mu v_r'(x)dx]$ tagról állapíthatjuk meg, hogy a peremen előírt zérus eltolódás, vagy alakváltozás miatt mind az alsó, mind a felső határ kiértékelése nullát ad, azaz az eredeti szorzatintegrál értéke az alábbira adódik:

$$\boxed{\int v_p(x)\mu v_r(x)dx = \frac{L^2}{\psi_r}^2 \int v_p'(x)\mu v_r'(x)dx,} \tag{4.54}$$

Összehasonlítva (4.51)-t és (4.54)-t a két baloldal azonos, így a jobboldalak is egyenlők:

$$\frac{L^2}{\psi_p}^2 \int v_p'(x)\mu v_r'(x)dx = \frac{L^2}{\psi_r}^2 \int v_p'(x)\mu v_r'(x)dx, \tag{4.55}$$

ami az eltérő ψ_p és ψ_r miatt csak akkor lehetséges, ha az integrálkifejezés nulla:

$$\int v_p'(x)\mu v_r'(x)dx = 0. \tag{4.56}$$

Ebből viszont az következik, hogy az eredeti szorzatintegrál értéke nulla:

$$\boxed{\int v_p(x)\mu v_r(x)dx = 0.} \tag{4.57}$$

A rezgésalakok ezen tulajdonságát a *rezgésalakok ortogonalitásának* nevezzük.

4.1.2.5. Kezdeti feltételek kielégítése

A feladatunk az

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x)\left(a_r\cos(\omega_{0r}t) + b_r\sin(\omega_{0r}t)\right), \tag{4.58}$$

általános megoldással és az annak deriválásával kapott

$$\dot{u}(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x)\omega_{0r}\left(-a_r\sin(\omega_{0r}t) + b_r\cos(\omega_{0r}t)\right). \tag{4.59}$$

sebességfüggvénnyel kielégíteni a $t_0 = 0$ pillanatban megadott

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \dot{u}(x,0) = v_0(x) \tag{4.60}$$

kezdeti feltételeket[4], azaz határozzuk meg az a_r, b_r értékeket úgy, hogy teljesüljön az alábbi két egyenlet (itt már behelyettesítettük a $t = 0$-t):

$$u_0(x) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) a_r, \qquad v_0(x) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x)\omega_{0r} b_r. \tag{4.61}$$

Mindkét egyenletben végtelen ismeretlen szerepel, ezért általános esetben a feladat közvetlenül nem oldható meg. Szorozzuk be mindkét egyenletet a $\mu v_p(x)$ függvénnyel és integráljuk az egyenletek oldalait a rúd hossza mentén:

$$\int \mu v_p(x) u_0(x) dx = \int \sum_{r=1}^{\infty} \mu v_p(x) v_r(x) a_r dx, \tag{4.62}$$

$$\int \mu v_p(x) v_0(x) dx = \int \sum_{r=1}^{\infty} \mu v_p(x) v_r(x) \omega_{0r} b_r dx. \tag{4.63}$$

Az integrálást az összegzés indexétől függetlenül végezhetjük el, ezért az integrálás bevihető az összegzéseken belülre, az a_r és b_r paraméterek pedig kiemelhetők az integrálásokból:

$$\int \mu v_p(x) u_0(x) dx = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \int \mu v_p(x) v_r(x) dx, \tag{4.64}$$

$$\int \mu v_p(x) v_0(x) dx = \sum_{r=1}^{\infty} \omega_{0r} b_r \int \mu v_p(x) v_r(x) dx. \tag{4.65}$$

A kapott két kifejezés jobb oldalán az összegzés során a $p \neq r$ esetekben az integrál a rezgésalakok ortogonalitása miatt nulla lesz, így csak az $r = p$ esetben lesz nemzérus szorzótényezője az a_r és a b_r paraméternek, amik ekkor ráadásul a_p és b_p lesznek. Ezek a nemzérus szorzótényezők ráadásul a rezgésalakok normálása miatt egy (lásd a (4.27) egyenletet), amiből közvetlenül adódik, hogy:

$$\int \mu v_r(x) u_0(x) dx = a_r, \tag{4.66}$$

$$\int \mu v_r(x) v_0(x) dx = \omega_{0r} b_r. \tag{4.67}$$

Az $u_0(x)$, $v_0(x)$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldás tehát:

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) \left(\int \mu v_r(x) u_0(x) dx \cdot \cos(\omega_{0r} t) + \frac{\int \mu v_r(x) v_0(x) dx}{\omega_{0r}} \cdot \sin(\omega_{0r} t) \right), \tag{4.68}$$

4.1.3. Példa (Megnyújtott rúd elengedése)**.** *Hozzunk létre a 4.1.2. példa jobb oldali végére ható statikus F erővel egy statikus kezdeti alakot, majd határozzuk meg a kialakuló rezgés függvényét, ha hirtelen elengedjük a rúd végét!*

---

[4] Korábban már bemutattuk, hogy a nem $t_0 = 0$-nál megadott kezdeti feltételek esetén a harmonikus függvények időbeni eltolásával kihasználható a $t_0 = 0$ eset azon könnyebbsége, hogy $\cos 0 = 1$ és $\sin 0 = 0$.

Megoldás
A sajátkörfrekvenciák és a rezgésalakok (4.45) és (4.46) alapján már rendelkezésre állnak:

$$\omega_{0r} = \frac{(2r-1)\pi}{2}\sqrt{\frac{EA}{\mu L^2}}, \qquad v_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu L}}\sin\left(\frac{(2r-1)\pi x}{2L}\right). \tag{4.69}$$

A kezdeti alak a végpontban ható F húzóerő hatására az alábbi lineáris függvény:

$$u_0(x) = \frac{Fx}{EA}, \tag{4.70}$$

hiszen kielégíti az $u_0(0) = 0$ peremfeltételt, a fajlagos nyúlás pedig minden pontban az F húzóerőnek megfelelő $F = EA$. A kezdeti $v_0(x)$ sebesség nulla.

Az r-edik rezgésalak a_r együtthatója (4.66) alapján:

$$a_r = \int_0^L \mu\sqrt{\frac{2}{\mu L}}\sin\left(\frac{(2r-1)\pi x}{2L}\right)\frac{Fx}{EA}dx \tag{4.71}$$

Emeljük ki a konstans $\frac{F\mu}{EA}\sqrt{\frac{2}{\mu L}}$-t, a maradék integrál értéke:

$$\int_0^L x\sin\left(\frac{(2r-1)\pi x}{2L}\right)dx = \frac{-4L^2\cos(r\pi)}{\pi^2(2r-1)^2} \tag{4.72}$$

A képletben r egész, így felhasználható, hogy $\cos(r\pi) = (-1)^r$. A kezdeti feltételeket kielégítő (4.68) egyenletbe behelyettesítve a_r-t:

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\mu L}}\sin\left(\frac{(2r-1)\pi x}{2L}\right)\frac{F\mu}{EA}\sqrt{\frac{2}{\mu L}}\frac{-4L^2(-1)^r}{\pi^2(2r-1)^2}\cos(\omega_{0r}t), \tag{4.73}$$

ami a lehetséges egyszerűsítések elvégzése után:

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{-8FL(-1)^r}{EA\pi^2(2r-1)^2}\sin\left(\frac{(2r-1)\pi x}{2L}\right)\cos\left((2r-1)\omega_{01}t\right) \tag{4.74}$$

4.1.3. Szabadrezgés megoldása haladó hullámokkal

A szabadrezgés feladatának másik megoldási módszere az ún. haladó hullámokkal történő megoldás. Ehhez alakítsuk át a szabadrezgés (4.13) szerinti differenciálegyenletét:

$$\frac{EA}{\mu}u''(x,t) - \ddot{u}(x,t) = 0. \tag{4.75}$$

Ilyenkor a megoldást az alábbi alakban keressük:

$$u(x,t) = u_e(x - c_n t) + u_h(x + c_n t), \tag{4.76}$$

ahol c_n a *normálirányú hullámsebesség*, $u_e(x)$ egy előre-, $u_h(x)$ pedig egy hátrafelé haladó hullám alakja a $t = 0$ pillanatban. Az előrefelé (illetve hátrafelé) haladás értelmezéséhez arra érdemes gondolni, hogy a t időpontban az x koordinátájú pontba az a függvényérték kerül, ami eredetileg $c_n t$ távolsággal hátrébb (illetve előrébb) helyezkedett el, az idő előrehaladtával tehát az $u_e(x)$ függvény (illetve az $u_h(x)$ függvény) változatlan alakkal előrefelé (illetve hátrafelé) halad.

A függvény feltételezett alakjának hely szerinti második deriváltja:

$$u''(x,t) = u_e''(x - c_n t) + u_h''(x + c_n t), \tag{4.77}$$

A függvény idő szerinti első- és második deriválásakor a láncszabályt kell alkalmaznunk:

$$\dot{u}(x,t) = -c_n u_e'(x - c_n t) + c_n u_h'(x + c_n t), \tag{4.78}$$

$$\ddot{u}(x,t) = c_n^2 u_e''(x - c_n t) + c_n^2 u_h''(x + c_n t), \tag{4.79}$$

Ezeket behelyettesítve a szabadrezgés (4.75) szerinti differenciálegyenletébe:

$$\frac{EA}{\mu}\left(u_e''(x - c_n t) + u_h''(x + c_n t)\right) - c_n^2\left(u_e''(x - c_n t) + u_h''(x + c_n t)\right) = 0. \tag{4.80}$$

Ez az egyenlet bármilyen függvény esetén teljesül, ha $c_n^2 = EA/\mu$, azaz

$$c_n = \sqrt{\frac{EA}{\mu}}. \tag{4.81}$$

Az előre- és a hátrafelé haladó hullámok alakjának meghatározásához a kezdeti feltételeket írjuk fel a $t = 0$ pillanatban:

$$u_0(x) = u_e(x) + u_h(x), \qquad v_0(x) = -c_n u_e'(x) + c_n u_h'(x). \tag{4.82}$$

A második egyenlet hossz mentén történő integrálásakor a bal oldalon az $\int v_0(x)$ kifejezéshez hozzá kell adnunk egy C konstanst, így az oldalak átrendezése után az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$u_e(x) + u_h(x) = u_0(x), \tag{4.83}$$

$$-u_e(x) + u_h(x) = \frac{\int_{x_0}^{x} v_0(\xi)d\xi}{c_n} + C. \tag{4.84}$$

A két egyenlet összegzésével és különbségével megkaphatjuk a keresett alakfüggvényeket a rúd hossza mentén:

$$u_e(x) = \frac{u_0(x)}{2} - \frac{\int_{x_0}^{x} v_0(\xi)d\xi}{2c_n} - \frac{C}{2}, \tag{4.85}$$

$$u_h(x) = \frac{u_0(x)}{2} + \frac{\int_{x_0}^{x} v_0(\xi)d\xi}{2c_n} + \frac{C}{2}. \tag{4.86}$$

Megjegyezzük, hogy a C értéke tetszőleges a fenti képletekben, de egy hullám esetén mindenképpen rögzített, hiszen csak a két függvény összege számít. Hasonló okból az integrálás x_0 kezdőpontja is tetszőleges érték lehet a rúd hossza mentén, fontos viszont, hogy ne essen kívül az értelmezési tartományon, hiszen ott nincs megadva kezdeti alak és sebesség.

A fenti módszerrel tehát megkaphatjuk az előre- és a hátrafelé haladó hullámoknak a kezdeti feltételeket kielégítő alakját a rúd hossza mentén. Nem tudjuk azonban, hogy a rúd kezdőpontjában milyen függvény érkezik az előre-haladó hullám miatt, illetve hogy a rúd végpontjában milyen függvény érkezik a hátrafelé haladó hullám miatt, azaz milyen $u_e(x)$ és $u_h(x)$ alakja a rúd hosszán kívül. Ezeket a szakaszokat a peremfeltételek segítségével lehet előállítani.

Ha egy x_t koordinátájú pontban egy mozdulatlan támasz adja a peremfeltételt, akkor abban a pontban az elmozdulásfüggvény értéke minden időpillanatban nulla:

$$u(x_t, t) = u_e(x_t - c_n t) + u_h(x_t + c_n t) = 0. \tag{4.87}$$

A peremfeltételeket a kezdeti alaknak teljesíteni kell, így az a kezdeti pillanatban peremen igaz lesz a két haladó hullámra, azaz:

$$u_e(x_t) + u_h(x_t) = 0, \qquad \to \qquad u_e(x_t) = -u_h(x_t) \tag{4.88}$$

Az állandó zérus elmozdulás azt is jelenti, hogy az elmozdulás idő szerinti deriváltja is nulla:

$$\dot{u}(x_t, t) = -c_n u_e'(x_t - c_n t) + c_n u_h'(x_t + c_n t) = 0, \tag{4.89}$$

amiből az első deriváltakra minden t pillanatban igaz, hogy

$$u_e'(x_t - c_n t) = u_h'(x_t + c_n t), \tag{4.90}$$

azaz x_t-től bármilyen h távolságra:

$$u_e'(x_t - h) = u_h'(x_t + h), \tag{4.91}$$

Az x_t-beli érték és a deriváltak segítségével $u_h(x)$ függvény értéke az $x + H$ helyen:

$$u_h(x_t + H) = u_h(x_t) + \int_0^H u_h'(x_t + h)dh, \tag{4.92}$$

míg $u_e(x)$ függvény értéke az $x_t - H$ helyen:

$$u_e(x_t - H) = u_e(x_t) - \int_0^H u_e'(x_t - h)dh, \tag{4.93}$$

A peremen felvett függvényértékek és a deriváltak közötti kapcsolatokat behelyettesítve az utóbbi kapcsolat átírható:

$$u_e(x_t - H) = -u_h(x_t) - \int_0^H u_h'(x_t + h)dh. \tag{4.94}$$

Ez azt jelenti, hogy a két függvény az x_t pontra nézve antimetrikus: amilyen alak az egyik függvény miatt elhagyja a tartományt, annak az ellentettje jön az értelmezési tartományba.

Ha egy x_s koordinátájú pontban egy szabad rúdvég adja a peremfeltételt, akkor abban a pontban az elmozdulásfüggvény hossz szerinti deriváltjának értéke minden időpillanatban nulla:

$$u'(x_s, t) = u_e'(x_s - c_n t) + u_h'(x_s + c_n t) = 0. \tag{4.95}$$

A peremfeltételeket a kezdeti alaknak teljesíteni kell, így a peremfeltétel a kezdeti pillanatban a peremen igaz lesz a két haladó hullám alakjának összegére, azaz:

$$u_e'(x_s) + u_h'(x_s) = 0, \qquad \rightarrow \qquad u_e'(x_s) = -u_h'(x_s) \tag{4.96}$$

Az állandó zérus alakváltozás azt is jelenti, hogy az alakváltozás idő szerinti deriváltja is nulla:

$$\dot{u}'(x_s, t) = -c_n u_e''(x_s - c_n t) + c_n u_h''(x_s + c_n t) = 0, \tag{4.97}$$

amiből a második deriváltakra minden t pillanatban igaz, hogy

$$u_e''(x_s - c_n t) = u_h''(x_s + c_n t), \tag{4.98}$$

azaz x_s-től bármilyen h távolságra:

$$u_e''(x_s - h) = u_h''(x_s + h), \tag{4.99}$$

Az x_s-beli érték és a deriváltak segítségével $u_h'(x)$ függvény értéke az $x_s + H$ helyen:

$$u_h'(x_s + H) = u_h'(x_s) + \int_0^H u_h''(x_s + h)dh, \tag{4.100}$$

míg $u_e'(x)$ függvény értéke az $x_s - H$ helyen:

$$u_e'(x_s - H) = u_e'(x_s) - \int_0^H u_e''(x_s - h)dh, \tag{4.101}$$

A peremen felvett függvényértékek és a deriváltak közötti kapcsolatokat behelyettesítve az utóbbi kapcsolat átírható:

$$u_e'(x_s - H) = -u_h'(x_s) - \int_0^H u_h''(x_s + h)dh. \tag{4.102}$$

Ez azt jelenti, hogy a két függvény deriváltja az x_s pontra nézve antimetrikus, így távolodva az x_s peremtől amennyivel az egyik függvény növekszik, ugyanannyival növekszik a másik (hiszen a hátrafelé távolodásnál a derivált ellentettjével számolnánk a növekményt), az eltolódásfüggvény pedig szimmetrikus.

A kezdeti feltételekből tehát szimmetrikus, illetve antimetrikus tükrözések sorozatával kapható meg az $u_e(x)$ és $u_h(x)$ függvényeknek a rúd hosszán kívüli részei.

Hangsúlyozzuk tehát, hogy a haladó hullámokkal történő megoldásnál pont fordított a megoldás menete, mint az állóhullámokkal (rezgésalakokkal) való megoldásnál: itt előbb a kezdeti, majd a peremfeltételeket elégítjük ki, míg a rezgésalakokkal először a peremfeltételeket elégítjük ki, majd azok lineáris kombinációival a kezdeti feltételeket.

4.1.4. Példa (Megnyújtott rúd elengedése). *Hozzunk létre a 4.1.2. példa jobb oldali végére ható statikus F erővel egy kezdeti alakot, majd határozzuk meg a kialakuló rezgés függvényét, ha hirtelen elengedjük a rúd végét!*

Megoldás

A kezdeti alak azonos a 4.1.3. példában bemutatottal:

$$u_0(x) = \frac{Fx}{EA}, \tag{4.103}$$

a kezdeti sebesség pedig most is $v_0(x) = 0$.

Ezeket felhasználva a két haladó hullám (4.85) és (4.86) alapján az egyszerűség kedvéért $C = 0$ felvételével:

$$u_e(x) = u_h(x) = \frac{u_0(x)}{2} = \frac{Fx}{2EA}. \tag{4.104}$$

Ezek a kezdeti alakok érvényesek az $x = (0; L)$ tartományon.

A hátrafelé haladó lineáris $u_h(x)$ függvény L/c_n idő alatt kerül ki teljesen a rúd tartományából az $x = 0$ pontban, ezalatt az idő alatt az $u_e(x)$ függvény $x = (-L; 0)$ tartományon érvényes alakja lép be a rúd tartományába. A (4.94) szerinti antimetria akkor teljesül, ha az $x = (-L; 0)$ szakaszon az $u_e(x)$ függvény alakja:

$$u_e(x) = \frac{Fx}{2EA}. \tag{4.105}$$

Az előrefelé haladó lineáris $u_e(x)$ függvény és az előbbi képlet szerinti meghosszabbítása $2L/c_n$ idő alatt kerül ki teljesen a rúd tartományából az $x = L$ pontban, ezalatt az idő alatt az $u_h(x)$ függvény $x = (L; 3L)$ tartományon érvényes alakja lép be a rúd tartományába. A (4.102) szerinti szimmetria akkor teljesül, ha az $x = (L; 3L)$ szakaszon az $u_h(x)$ függvény alakja:

$$u_h(x) = \frac{F(2-x)}{2EA}. \tag{4.106}$$

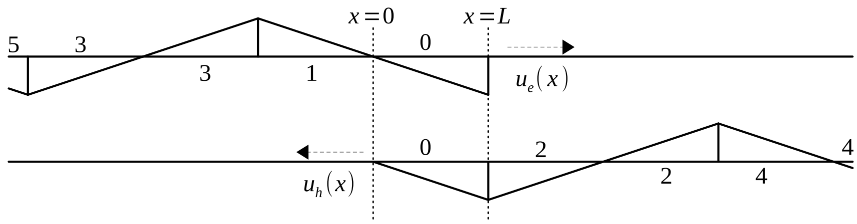
Ez a hátrafelé haladó függvény L/c_n idő után kezd kilépni a rúd tartományából, és $3L/c_n$ idő után hagyja el azt. Ezalatt az idő alatt az $u_e(x)$ függvény $x = (-3L; -L)$ tartományon levő része lép be az $x = 0$ helyen, ahol a (4.94) szerinti antimetria akkor teljesül, ha az $x = (-3L; -L)$ szakaszon az $u_e(x)$ függvény alakja:

$$u_e(x) = \frac{F(-2-x)}{2EA}. \tag{4.107}$$

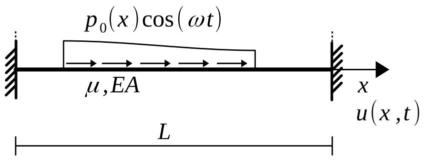
A most kiszámolt tartomány $2L/c_n$ idő után kezdi elhagyni a rúd tartományát $x = L$-nél, ekkortól a hátrafelé haladó hullám $x = (3L; 5L)$ közötti szakasza lép be, ami a (4.102) szerinti szimmetriát akkor teljesíti, ha az $x = (3L; 5L)$ szakaszon az $u_h(x)$ függvény alakja:

$$u_h(x) = \frac{F(-4+x)}{2EA}. \tag{4.108}$$

A tükrözéseket oda-vissza folytatva kapható meg az $u_e(x)$ és $u_h(x)$ függvények releváns része, ahogy azt a 4.2. ábrán mutatjuk. az egyes szakaszok alatti számok a tükrözések egymás utáni sorszámát jelölik.



4.2. ábra. A haladó hullámok rúdon kívüli részeinek származtatása.



4.3. ábra. Időben harmonikusan gerjesztett húzott-nyomott rúd modellje.

4.1.4. Gerjesztett rezgések

4.1.4.1. Harmonikus gerjesztés, közvetlen megoldás

Terhelje a rudat egy időben harmonikus függvény szerint változó intenzitású $p(x,t)$ erő. (Lásd a 4.3. ábrát.) A gerjesztés körfrekvenciája legyen ω, az intenzitás amplitúdója $p_0(x)$, keressük a gerjesztett rezgésnek az állandósult részét.

A mozgás differenciálegyenlete:

$$EAu''(x,t) - \mu\ddot{u}(x,t) = -p_0(x)\cos(\omega t). \tag{4.109}$$

Az állandósult rezgésrész harmonikus gerjesztés esetén szintén harmonikus függvény lesz, *közvetlen* megoldás során keressük az alábbi alakban:

$$u(x,t) = \hat{u}(x)\cos(\omega t), \tag{4.110}$$

azaz válasszuk szét az idő és a tér szerinti változást. A feltételezett alak második deriváltjai:

$$u''(x,t) = \hat{u}''(x)\cos(\omega t), \qquad \ddot{u}(x,t) = \hat{u}(x)(-\omega^2)\cos(\omega t). \tag{4.111}$$

Ezeket behelyettesítve a mozgás differenciálegyenletébe azt kapjuk, hogy:

$$EA\hat{u}''(x)\cos(\omega t) + \mu\hat{u}(x)\omega^2\cos(\omega t) = -p_0(x)\cos(\omega t). \tag{4.112}$$

Egyszerűsítve $\cos(\omega t)$-vel a rezgés alakjára az alábbi közönséges differenciálegyenletet kapjuk:

$$EA\hat{u}''(x) + \mu\omega^2\hat{u}(x) = -p_0(x). \tag{4.113}$$

Matematikailag ez azonos egy csillapítatlan egyszabadságfokú rendszer gerjesztett rezgésének differenciálegyenletével, de a kezdeti feltételek helyett itt peremfeltételeket írunk majd elő. A teher hossz menti eloszlásától függően kell az $\hat{u}(x)$ függvény partikuláris alakját meghatározni, illetve a kiegészítő egyenlet megoldásának két paraméterével kielégíteni a rúdvégi peremfeltételeket.

4.1.5. Példa (Harmonikusan gerjesztett rúd)**.** *Keressük a mindkét végén megtámasztott rúd válaszát, ha időben harmonikusan változó, a hossz mentén egyenletesen megoszló erő gerjeszti, azaz $p(x,t) = p_0 \cos(\omega t)$ (lásd 4.4. ábra).*

Megoldás

A hossz mentén egyenletesen megoszló teher miatt (4.113) jobb oldalán a teher intenzitásának amplitúdója szerepel, azaz az alakfüggvény differenciálegyenlete:

$$EA\hat{u}''(x) + \mu\omega^2 \hat{u}(x) = -p_0. \tag{4.114}$$

Ennek egy lehetséges partikuláris megoldása

$$\hat{u}_g(x) = -\frac{p_0}{\mu\omega^2}. \tag{4.115}$$

Bevezetve a

$$\psi = \omega\sqrt{\frac{\mu L^2}{EA}} \tag{4.116}$$

frekvenciaparamétert, a kiegészítő differenciálegyenlet általánosa megoldása:

$$\hat{u}_0(x) = A\cos\left(\frac{\psi}{L}x\right) + B\sin\left(\frac{\psi}{L}x\right). \tag{4.117}$$

Az A és B paraméterekkel kell kielégíteni a peremfeltételeket. Mozdulatlan támaszokat feltételezve mindkét végen ez az

$$\hat{u}(0) = \hat{u}(L) = 0 \tag{4.118}$$

feltételeket jelenti, amibe behelyettesítve az $\hat{u}_0(x) + \hat{u}_g(x)$ alakot:

$$\begin{aligned} A\cos(0) + B\sin(0) - \frac{p_0}{\mu\omega^2} &= 0 \\ A\cos(\psi) + B\sin(\psi) - \frac{p_0}{\mu\omega^2} &= 0. \end{aligned} \tag{4.119}$$

Írjuk át az egyenletrendszert mátrixos alakba:

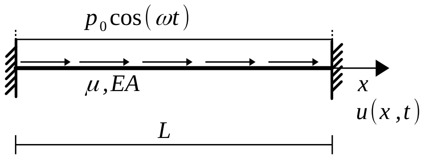
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\psi) & \sin(\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_0}{\mu\omega^2} \\ \frac{p_0}{\mu\omega^2} \end{bmatrix}. \tag{4.120}$$

Ennek megoldása:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\cos(\psi)}{\sin(\psi)} & \frac{1}{\sin(\psi)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{p_0}{\mu\omega^2} \\ \frac{p_0}{\mu\omega^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_0}{\mu\omega^2} \\ \frac{p_0}{\mu\omega^2}\frac{1-\cos(\psi)}{\sin(\psi)} \end{bmatrix}. \tag{4.121}$$

Az állandósult rezgés során tehát a rúd alakja:

$$\hat{u}(x) = \frac{p_0}{\mu\omega^2}\left(-1 + \cos\left(\frac{\psi}{L}x\right) + \frac{1-\cos(\psi)}{\sin(\psi)} sin\left(\frac{\psi}{L}x\right)\right). \tag{4.122}$$



4.4. ábra. Egyenletesen megoszló teherrel időben harmonikusan gerjesztett húzott-nyomott rúd.

4.1.4.2. Harmonikus gerjesztés, modálanalízis

Terhelje a rudat egy időben harmonikus függvény szerint változó intenzitású $p(x,t)$ erő. (Lásd a 4.3. ábrát.) A gerjesztés körfrekvenciája legyen ω, az intenzitás amplitúdója $p_0(x)$, keressük a gerjesztett rezgésnek az állandósult részét.

A mozgás differenciálegyenlete:

$$EAu''(x,t) - \mu\ddot{u}(x,t) = -p_0(x)\cos(\omega t). \tag{4.123}$$

Modálanalízissel történő megoldás esetén előzetesen már meghatároztuk a $v_r(x)$ sajátrezgésalakokat és a hozzájuk tartozó ω_{0r} sajátkörfrekvenciákat. Keressük a megoldást a sajátrezgésalakok lineáris kombinációjaként:

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x)y_r(t), \tag{4.124}$$

melynek második deriváltjai:

$$\ddot{u}(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x)\ddot{y}_r(t), \tag{4.125}$$

$$u''(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r''(x)y_r(t) = \sum_{r=1}^{\infty} -\frac{\psi_r^2 v_r(x)}{L^2} y_r(t). \tag{4.126}$$

Ezeket behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$-EA\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\psi_r^2 v_r(x)}{L^2} y_r(t) - \mu\sum_{r=1}^{\infty} v_r(x)\ddot{y}_r(t) = -p_0(x)\cos(\omega t). \tag{4.127}$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát $v_p(x)$-szel, és integráljuk a rúd hossza mentén. A baloldali összegzésekből a sajátalakok ortogonalitása miatt csak a $p = r$ esetben lesz nullától különböző érték, mégpedig pontosan 1, így az egyenlet mínusz eggyel való szorzás után az alábbira egyszerűsödik:

$$\frac{EA}{\mu}\frac{\psi_p^2}{L^2} y_p(t) + \ddot{y}_p(t) = \int v_p(x)p_0(x)dx\cos(\omega t). \tag{4.128}$$

A jobb oldali integrál a teher függvényének a rezgésalakra vett vetülete, jelöljük a továbbiakban f_p-vel:

$$f_p = \int v_p(x)p_0(x)dx, \tag{4.129}$$

így a p-edik rezgésalak modális koordinátájára az alábbi közönséges differenciálegyenletet kapjuk:

$$\ddot{y}_p(t) + \omega_{0p}^2 y_p(t) = f_p \cos(\omega t), \tag{4.130}$$

aminek a megoldása az egyszabadságfokú rendszereknél látottak alapján:

$$y_p(t) = f_p \frac{1}{\omega_{0p}^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0p}^2}} cos(\omega t). \tag{4.131}$$

A modális amplitúdó képlete a többszabadságfokú rendszereknél látott módon a teher vetületének, egy rezonanciatényezőnek és a sajátkörfrekvencia négyzete reciprokának a szorzatából áll. A jelenség tehát hasonlít a többszabadságfokú rendszereknél látottakhoz, a magasabb rezgésalakok szerepe csökken a teljes válaszban.

4.1.6. Példa (Harmonikusan gerjesztett rúd)**.** *Keressük a mindkét végén megtámasztott rúd válaszát, ha időben harmonikusan változó, a hossz mentén egyenletesen megoszló erő gerjeszti, azaz $p(x,t) = p_0 \cos(\omega t)$ (lásd 4.4. ábra).*

Megoldás

A sajátfrekvenciákat és a rezgésalakokat a 4.1.1. példából vehetjük át. A sajátkörfrekvenciák (4.36)-ből

$$\omega_{0r} = r\pi \sqrt{\frac{EA}{\mu L^2}}, \tag{4.132}$$

míg a rezgésalakok páratlan r esetén (4.37)-ból:

$$v_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \tag{4.133}$$

páros r esetén (4.38)-ból:

$$v_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right). \tag{4.134}$$

Ezekből számítható (4.129) szerint a $p_0(x) = p_0$ konstans teherfüggvény rezgésalakra vett vetülete.

Páros r esetén az

$$f_r = \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) p_0 dx \tag{4.135}$$

integrál értéke nullára adódik, hiszen az integrálandó függvény páratlan.

Páratlan r esetén az

$$f_r = \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right) p_0 dx \tag{4.136}$$

integrál értéke r félhullámból álló függvény területével lesz egyenlő. Egy félhullám hossza L/r, magassága $p_0\sqrt{\frac{2}{\mu L}}$, területe a befoglaló téglalap területének $\frac{2}{\pi}$-ed része. A félhullámok $r-1$ teljes hullámot alkotnak, azok területe nulla, így a végeredmény az egyetlen megmaradó hullám területe lesz. Ha $\frac{r-1}{2}$ páros[a], akkor ez a fennmaradó félhullám pozitív, és az előjel is az. Ha $\frac{r-1}{2}$ páratlan[b], akkor ez a fennmaradó félhullám negatív, és az előjel is az. Az integrálás eredménye tehát

$$f_r = p_0\sqrt{\frac{2}{\mu L}}\frac{L}{r}\frac{2}{\pi}(-1)^{\frac{r-1}{2}} \tag{4.137}$$

A modális gerjesztés amplitúdóját felhasználva az r-edik alak amplitúdója (4.131) alapján:

$$y_{r,0} = (-1)^{\frac{r-1}{2}}\frac{2p_0L}{r\pi}\sqrt{\frac{2}{\mu L}}\frac{1}{r^2\pi^2}\frac{\mu L^2}{EA}\frac{1}{1-\frac{\omega^2\mu L^2}{r^2\pi^2 EA}} \tag{4.138}$$

A rezgésalakkal való beszorzás után helyettesítsük be a páratlan r helyére az egész s-ekkel kifejezett $2s-1$-et, így a lehetséges egyszerűsítések elvégzése után a válaszfüggvény:

$$u(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{p_0L^2}{EA}\frac{4}{(2s-1)^3\pi^3}\frac{1}{1-\frac{\omega^2\mu L^2}{(2s-1)^2\pi^2 EA}}\cos\left((2s-1)\pi\frac{x}{L}\right)\cos(\omega t). \tag{4.139}$$

Nagy s értékek esetén a rezonanciatényező értéke 1-hez tart, miközben a nevezőben levő $(2s-1)^3$ tag miatt a magasabb rezgésalakok szerepe jól láthatóan lecsökken.

[a] Azaz r értéke $1, 5, 9, 13, \ldots$.
[b] Azaz r értéke $3, 7, 11, 15, \ldots$.

4.1.4.3. Támaszmozgással gerjesztett rúd

Legyen az L hosszúságú rúd egyik vége az origóban rögzítve, a másik végét pedig harmonikusan mozgassuk, ezzel létrehozva egy gerjesztést. A mozgás differenciálegyenlete

$$EAu''(x,t) - \mu\ddot{u}(x,t) = 0, \tag{4.140}$$

hiszen nincs a hossz mentén megoszló erő. Keressük az állandósult rezgés során kialakuló rezgésalakot.

Ha a rúd végét mozgatjuk, akkor a két peremfeltétel az alábbi:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 1\cdot cos(\omega t). \tag{4.141}$$

Keressük az elmozdulásfüggvényt is időben harmonikus alakkal:

$$u(x,t) = \hat{u}(x)\cos(\omega t). \tag{4.142}$$

Ennek deriváltjait behelyettesítve a mozgás differenciálegyenletébe azt kapjuk, hogy:

$$EA\hat{u}''(x)\cos(\omega t) + \mu\omega^2\hat{u}(x)\cos(\omega t) = 0, \tag{4.143}$$

vagy a $\cos(\omega t)$-vel való leosztás után:

$$EA\hat{u}''(x) + \mu\omega^2\hat{u}(x) = 0. \tag{4.144}$$

Az $\hat{u}(x)$ rezgésalak-függvénynek tehát a fenti homogén differenciálegyenletet kell kielégítenie. Ez azonos a szabadrezgés rezgésalakjaira levezetett differenciálegyenlettel, így az általános megoldása is azonos alakban írható:

$$\hat{u}(x) = A\cos\left(\frac{\psi}{L}x\right) + B\sin\left(\frac{\psi}{L}x\right), \tag{4.145}$$

ahol a ψ frekvenciaparaméter értéke most

$$\psi = \omega\sqrt{\frac{\mu L^2}{EI}}. \tag{4.146}$$

Az A és B paramétereket a peremfeltételekből számolhatjuk. Helyettesítsük be a feltételezett alakot a peremfeltételekbe:

$$\hat{u}(0)\cos(\omega t) = 0, \qquad \hat{u}(L)\cos(\omega t) = 1\cdot cos(\omega t). \tag{4.147}$$

A két feltétel csak akkor teljesül bármilyen $\cos(\omega t)$-re, ha:

$$\hat{u}(0) = 0, \qquad \hat{u}(L) = 1. \tag{4.148}$$

A rezgésalak (4.145) szerinti általános megoldását behelyettesítve a két peremfeltételbe az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} A\cos(0) + B\sin(0) &= 0,\\ A\cos(\psi) + B\sin(\psi) &= 1. \end{aligned} \tag{4.149}$$

Az egyenletet átírhatjuk mátrixalakra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\psi) & \sin(\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.150}$$

A bal oldali együtthatómátrix most a gerjesztés körfrekvenciája miatt ismert frekvenciamátrix. Invertálásával megoldható az egyenlet:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin(\psi)} \begin{bmatrix} \sin(\psi) & 0 \\ -\cos(\psi) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin(\psi)} \end{bmatrix}. \tag{4.151}$$

Ezt felhasználva a rezgésalak:

$$\boxed{\hat{u}(x) = \frac{1}{\sin(\psi)}\sin\left(\frac{\psi}{L}x\right),} \tag{4.152}$$

Megjegyezzük, hogy a fenti levezetés a kezdőpont harmonikus mozgatásához tartozó alakot is megadja. A peremfeltételek ekkor:

$$u(0,t) = 1\cdot cos(\omega t), \qquad u(L,t) = 0, \tag{4.153}$$

az azonos lépésekből álló levezetés végén a frekvenciamátrix inverzét az $\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T$ vektorral kell szorozni, azaz az inverz első oszlopa lesz az A és B értéke:

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix} = \frac{1}{\sin(\psi)}\begin{bmatrix}\sin(\psi) & 0\\ -\cos(\psi) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -\frac{\cos(\psi)}{\sin(\psi)}\end{bmatrix}. \tag{4.154}$$

Ezt felhasználva a rezgésalak:

$$\boxed{\hat{u}(x) = \cos\left(\frac{\psi}{L}x\right) - \frac{\cos(\psi)}{\sin(\psi)}\sin\left(\frac{\psi}{L}x\right).} \tag{4.155}$$

4.2. Hajlított gerenda rezgése

Folytonos szerkezetek rezgései közül másodszor a hajlított gerenda differenciálegyenletét és a megoldás lépéseit mutatjuk be. Legyen adott az E rugalmassági moduluszú, ϱ sűrűségü anyagból készült prizmatikus rúd. A rúd keresztmetszeti területe A, a rúd tengelye egybeesik az x-tengellyel, a mozgás az xz-síkban történik, a hajlítás tengelyére a tehetetlenségi nyomaték I_y. A rudat a hossza mentén a $q(x,t)$ intenzitású, tengelyre merőleges irányú megoszló erő terheli. A rúd *fajlagos tömeg*ét jelölje $\mu = \varrho A$. A keresztmetszet elfordulási tehetetlensége ϱI_y, amit az i_0 inerciasugár[5] segítségével $\varrho A i_0^2 = \mu i_0^2$ alakban is használhatunk. A vizsgálatok során érvényesnek tekintjük a kis elmozdulások elvét, valamint a Bernoulli-Navier-hipotézist.

Keressük a keresztmetszetek síkbeli elmozdulásának $w(x,t)$ függvényét, ami kielégíti a rúd végein előírt peremfeltételeket, és a t_0 időpontban előírt kezdeti feltételeket.

A kezdeti feltételek általános alakja

$$w(x,t_0) = w_0(x), \qquad \dot{w}(x,t_0) = v_0(x), \tag{4.156}$$

ahol $w_0(x)$ a kezdeti alak függvénye, $v_0(x)$ pedig a kezdeti sebességfüggvény.

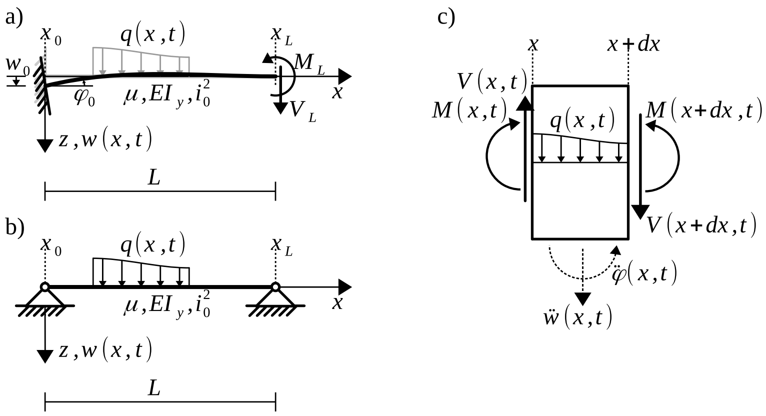
A peremfeltételek a megtámasztási viszonyoktól függenek. Jelölje x_0 és x_L a rúd kezdő- és végpontjának koordinátáját. Első példaként az egyik végén befogott, másik végén szabad rúd peremfeltételei:

$$\begin{aligned} w(x_0,t) &= w_0, & w''(x_L,t) &= -\frac{M_L}{EI_y},\\ w'(x_0,t) &= -\varphi_0, & w'(x_L,t) &= -\frac{V_L}{EI_y}, \end{aligned} \tag{4.157}$$

ahol w_0 és φ_0 a rúdkezdőpontjának előírt eltolódása és elfordulása, M_L és V_L pedig a hajlítónyomaték és a nyíróerő előírt értéke a rúd végén, (Mozdulatlan támasz, illetve terheletlen vég esetén természetesen nulla az értékük.) Második példaként a mindkét végén csuklósan megtámasztott rúd peremfeltételei mozdulatlan támasz esetén:

$$w(x_0,t) = 0, \qquad w(x_L,t) = 0, \qquad w''(x_0,t) = 0, \qquad w''(x_L,t) = 0. \tag{4.158}$$

[5] $i_0^2 = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$.



4.5. ábra. Hajlított gerenda modellje a) egyik végén befogott, másik végén szabad rúd, előírt támaszelmozdulással és teherrel, b) csuklós-csuklós megtámasztású rúd, c) elemi hosszúságú rúdszakasz elkülönítése.

Az első két egyenlet az eltolódás, a második kettő a görbület zérus voltát fejezi ki, utóbbi a hajlítónyomaték zérus értékéből származik.

A két példát a 4.5.a)-b) ábra mutatja. Megjegyezzük, hogy a peremfeltételek változtatásával számtalan további lehetséges feladat képezhető[6].

4.2.1. Rezgés differenciálegyenlete

A hajlított rúd rezgésének differenciálegyenletéhez tekintsük egy elemi darab elkülönítését a 4.5.c) ábra szerint. A rudat elvágtuk az x és a tőle elemien kicsiny dx távolságra levő $x+dx$ koordinátájú keresztmetszeteknél. A kis elmozdulások elvének következtében az elemi darab $\varphi(x)$ elfordulása kicsiny. Emiatt nem ábrázoltuk a darab elfordulását, és emiatt kezelhetjük a V nyíróerőket függőleges erőkként, hiszen a vetületet a $\cos\varphi \approx 1$ szorzótényezőből kapnánk. Az ábrán feltüntettük az elemi darabra ható erőket, azaz a kezdő- és végkeresztmetszetre ható $V(x,t)$ és $V(x+dx,t)$ nyíróerőket, $M(x,t)$ és $M(x+dx,t)$ hajlítónyomatékokat, valamint a megoszló erőt. Utóbbi a dx hosszúság elemien kicsiny volta miatt közelíthető a hossz mentén állandó $q(x,t)$ intenzitással. Ezek az erők együttesen hozzák létre a μdx tömegű elemi darab gyorsulását, azaz Newton második mozgástörvényét felírhatjuk:

$$\mu dx\ddot{w}(x,t) = -V(x,t) + V(x+dx,t) + q(x,t)dx. \tag{4.159}$$

Fejtsük Taylor-sorba a nyíróerő függvényét az x pont körül:

$$V(x+dx,t) = V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}dx + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}dx^2 + \dots \tag{4.160}$$

Használjuk az x szerinti parciális derivált jelölésére a $'$ szimbólumot. Így a dx-ben magasabb fokú tagokat elhanyagolva a nyíróerő az $x+dx$ keresztmetszetnél közelítőleg:

$$V(x+dx,t) \approx V(x,t) + V'(x,t)dx. \tag{4.161}$$

[6]Csak említés szintjén mondjuk itt az időben változó peremfeltételt, illetve a rugalmas megtámasztás miatti peremfeltételt.

Ezt behelyettesítve (4.159)-be:

$$\mu dx\ddot{w}(x,t) = -V(x,t) + V(x,t) + V'(x,t)dx + q(x,t)dx. \tag{4.162}$$

Egyszerűsítsük az egyenletet $-V(x,t) + V(x,t) = 0$-val, és osszuk le mindkét oldalt dx-szel, így azt kapjuk, hogy:

$$\mu\ddot{w}(x,t) = V'(x,t) + q(x,t). \tag{4.163}$$

(Ha nem közelítettük volna korábban $q(x,t)$-t és $V(x+dx,t)$-t, akkor most még egy $dx \to 0$ határátmenetre lenne szükség, hogy azoktól a tagoktól megszabaduljunk.

Az elemi rúdszakaszra a perdülettételt is felírhatjuk. Ehhez előzetesen a hajlítónyomaték növekményét írjuk fel a a Taylor-sorával:

$$M(x+dx,t) = M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x}dx + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2}dx^2 + \ldots, \tag{4.164}$$

És közelítsük, elhanyagolva a dx-ben magasabb fokú tagokat:

$$M(x+dx,t) \approx M(x,t) + M'(x,t)dx. \tag{4.165}$$

Ezt felhasználva a perdülettétel:

$$\begin{split}\mu i_0^2 dx\ddot{\varphi}(x,t) = -M(x,t) - V(x,t)\frac{dx}{2} + \\ + (M(x,t) + M'(x,t)dx) - (V(x,t) + V'(x,t)dx)\frac{dx}{2}.\end{split} \tag{4.166}$$

Egyszerűsítve $M(x,t) - M(x,t)$-vel, leosztva dx-szel és a $dx \to 0$ határátmenetet elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\mu i_0^2\ddot{\varphi}(x,t) = -V(x,t) + M'(x,t). \tag{4.167}$$

Ebből $V(x,t)$-t kifejezve behelyettesíthetjük (4.163) egyenletbe a deriváltját:

$$\mu\ddot{w}(x,t) = M''(x,t) - \mu i_0^2\ddot{\varphi}'(x,t) + q(x,t). \tag{4.168}$$

A hajlított rúd *geometriai* egyenlete az eltolódás és az elfordulás közötti

$$\varphi(x,t) = -w'(x,t), \tag{4.169}$$

és az elfordulás és a $\kappa(x,t)$ görbület közötti

$$\kappa(x,t) = \varphi'(x,t). \tag{4.170}$$

kapcsolatot adja meg. A kettőt egymásba behelyettesítve kapható a

$$\kappa(x,t) = -w''(x,t). \tag{4.171}$$

összefüggés. Az anyagegyenlet a keresztmetszet igénybevétele és alakváltozása közötti kapcsolatot írja le:

$$M(x,t) = EI_y\kappa(x,t), \tag{4.172}$$

ahol EI_y a keresztmetszet *hajlítómerevsége*. Helyettesítsük be (4.171) geometriai egyenletét (4.172) anyagegyenletébe:

$$M(x,t) = -EI_y w''(x,t), \tag{4.173}$$

majd ennek második deriváltját (4.168) egyenletébe, ahol az elfordulás deriváltját is (4.169) képletéből fejezzük ki. Az ismert és ismeretlen függvényeket különoldalra rendezve kapjuk a *hajlított rúd mozgásának parciális differenciálegyenletét*:

$$EI_y w''''(x,t) - \mu i_0^2 \ddot{w}''(x,t) + \mu \ddot{u}(x,t) = q(x,t). \tag{4.174}$$

A gyakorlatban a keresztmetszet elfordulási tehetetlenségét legtöbbször elhanyagoljuk, így a továbbiakban az

$$\boxed{EI_y w''''(x,t) + \mu \ddot{u}(x,t) = q(x,t)} \tag{4.175}$$

egyenlettel foglalkozunk.

A teljes megoldáshoz a feladatot ki kell egészíteni a megfelelő kezdeti- és peremfeltételekkel. A megoldás stratégiája az egy- és többszabadságfokú rendszereknél látotthoz hasonló:

- A *szabadrezgés-feladat* megoldásaként kapjuk meg a sajátkörfrekvenciákat és a sajátrezgésalakokat. A szabadrezgés ezek lineáris kombinációjaként adódik, ahol az egyes alakok együtthatóit a kezdeti feltételekből kell meghatározni.
- A *gerjesztett rendszer* esetén a megoldás egy partikuláris megoldásnak és a szabadrezgés általános megoldásának az összegeként adódik, utóbbi paramétereit a kezdeti feltételek függvényében kell meghatározni.

A hasonlóságnak megfelelően először majd a szabadrezgést mutatjuk be.

4.2.1.1. Statikus normálerő hatása

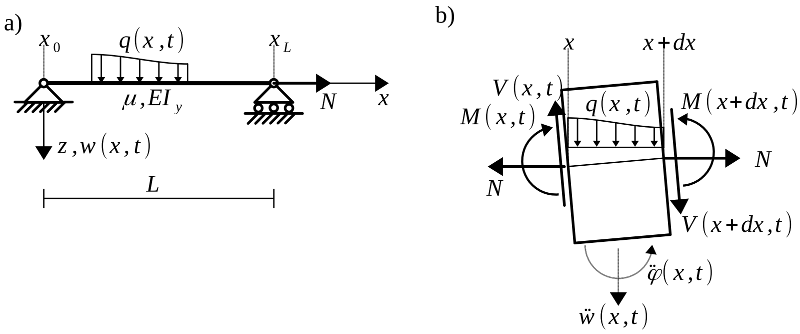
A statikus normálerő hatásának vizsgálatához feltételezzük, hogy a gerenda tengelyében egy konstans, húzóerőnek feltételezett N normálerő működik. A 4.6.a) ábra mutat egy példát ennek modelljére, ahol a keresztmetszet elfordulási tehetetlenségét már elhanyagoltuk. A 4.6.b) ábrán megismételtük a 4.5.c) ábra szerinti elkülönítést, de most a keresztmetszet $\varphi(x,t) = -w'(x,t)$ elfordulását is megjelenítettük, hiszen a perdülettétel felírásakor a gerenda tengelyével párhuzamos N normálerőt is figyelembe kell venni.

A kis elmozdulások elvének következtében a mozgás irányába felírva Newton második törvényét az (4.159) egyenlettel azonos alakot kapunk, ami egyszerűsítés után (4.163)-val lesz azonos

$$\mu \ddot{w}(x,t) = V'(x,t) + q(x,t). \tag{4.176}$$

Az elemi szakaszra felírt perdülettételben már felhasználjuk az $i_0^2 = 0$ közelítést, viszont a (4.177) egyenletben figyelembe kell vennünk a két normálerő alkotta erőpár nyomatékát:

$$\begin{aligned} 0 = -M(x,t) - V(x,t)\frac{dx}{2} + (M(x,t) + M'(x,t)dx) - \\ - (V(x,t) + V'(x,t)dx)\frac{dx}{2} - N\varphi(x,t)dx. \end{aligned} \tag{4.177}$$



4.6. ábra. Statikus normálerővel terhelt hajlított gerenda modellje a) csuklós-görgős megtámasztású rúd, c) elemi hosszúságú rúdszakasz elkülönítése.

A szokásos egyszerűsítés és dx-szel leosztás után azt kapjuk, hogy:

$$0 = -V(x,t) + M'(x,t) - N\varphi(x,t). \tag{4.178}$$

Ebbe helyettesítsük be (4.169)-t,

$$0 = -V(x,t) + M'(x,t) + Nw'(x,t), \tag{4.179}$$

majd az első deriváltba a (4.176)-ből kifejezett $V'(x,t)$-t:

$$0 = q(x,t) - \mu\ddot{w}(x,t) + M''(x,t) + Nw''(x,t). \tag{4.180}$$

Végül (4.173) felhasználásával kapjuk az N normálerővel húzott gerenda hajlítórezgésének differenciálegyenletét:

$$\boxed{EI_y w''''(x,t) - Nw''(x,t) + \mu\ddot{w}(x,t) = q(x,t).} \tag{4.181}$$

4.2.2. Szabadrezgés

A hajlított rúd szabadrezgésének a parciális differenciálegyenlete (4.175) jobb oldalának zérussá tételével:

$$EI_y w''''(x,t) + \mu\ddot{w}(x,t) = 0. \tag{4.182}$$

4.2.2.1. Megoldás feltételezett alakja

Keressük a megoldást az alábbi alakban:

$$w(x,t) = v(x)\left(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)\right), \tag{4.183}$$

azaz válasszuk szét a térbeli és időbeli változást a $v(x)$ alakfüggvény és az $(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t))$ harmonikus függvény szorzataként. (Utóbbit abból a tapasztalatból kiindulva, hogy az idő szerinti második deriváltak esetén ilyen időfüggéseket kaptunk korábban.)

A változók szétválasztásának köszönhetően a parciális deriváltak könnyen felírhatók:

$$w''''(x,t) = v''''(x)\left(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)\right), \tag{4.184}$$

$$\ddot{w}(x,t) = v(x)(-\omega_0^2)\left(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)\right). \tag{4.185}$$

A differenciálegyenletbe behelyettesítve

$$EI_y v''''(x)\left(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)\right) - \\ - \mu v(x)(\omega_0^2)\left(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)\right) = 0. \tag{4.186}$$

Nemtriviális megoldást keresünk, így a nem mindig zérus harmonikus taggal[7] leoszthatjuk az egyenletet, így a rezgésalak közönséges differenciálegyenletét kapjuk[8]:

$$EI_y v''''(x) - \mu\omega_0^2 v(x) = 0. \tag{4.187}$$

4.2.2.2. Alakfüggvény feltételezett alakja

Keressük az alakfüggvényt az alábbi alakban:

$$v(x) = A\cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + B\sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C\cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + D\sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right), \tag{4.188}$$

ahol λ az alakot meghatározó *frekvenciaparaméter*, L pedig egy rögzített hosszúság (például lehet a rúd hossza). A feltételezett alak negyedik deriváltja így:

$$v''''(x) = \frac{\lambda^4}{L^4}\left(A\cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + B\sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C\cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + D\sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right)\right) = \\ = \frac{\lambda^4}{L^4}v(x), \tag{4.189}$$

amit behelyettesíthetünk a differenciálegyenletbe:

$$EI_y\frac{\lambda^4}{L^4}v(x) - \mu\omega_0^2 v(x) = 0. \tag{4.190}$$

A nemtriviális megoldás esetén leoszthatjuk az egyenletet $v(x)$-szel, így az ω_0 sajátkörfrekvencia és a λ frekvenciaparaméter között az alábbi összefüggés írható fel:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\omega_0^2\mu L^4}{EI_y}}, \qquad \omega_0 = \lambda^2\sqrt{\frac{EI_y}{\mu L^4}}. \tag{4.191}$$

A képletben EI_y/L^3 az L hosszúságú rúdszakasz helyettesítő rugómerevségével arányos, μL pedig ugyanannek a szakasznak a tömege, azaz egy merevség-tömeg hányadostól függ itt is a sajátkörfrekvencia. A két egyenlet azt is kifejezi, hogy e két mennyiség egymással szoros kapcsolatban áll. Ha egy nagyobb frekvenciaparaméter miatt a (4.188) egyenlet szerinti rezgésalak a hossz mentén gyorsabban változik, akkor ez az alak a nagyobb sajátkörfrekvenciának megfelelően gyorsabban fog rezegni.

[7] $(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t))$

[8] A homogén parciális differenciálegyenletből egy homogén közönséges differenciálegyenletet kaptunk.

4.2.2.3. Peremfeltételek

A következő lépés az alak meghatározásához a (4.188) szerinti alak A, B, C és D paraméterének, valamint a frekvenciaparaméternek a számítása. Ehhez a peremfeltételeket kell felírni és az így kapott egyenletrendszer lehetséges megoldásait megtalálni. A negyedrendű differenciálegyenlethez a két peremen összesen négy feltételt írhatunk elő, ezekben az egyenletekben az A, B, C és D paraméterek együtthatói a λ függvényében írhatók fel, azaz formálisan egy

$$\underline{\underline{F}}(\lambda)\begin{bmatrix}A\\B\\C\\D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{4.192}$$

homogén lineáris egyenletrendszer írható fel, amiben az $\underline{\underline{F}}(\lambda)$ *frekvenciamátrix* tartalmazza a peremfeltételeket kifejező egyenletrendszerben az általános megoldás paramétereinek együtthatóit.

A homogén egyenletrendszernek akkor van nemtriviális megoldása, ha az együtthatómátrix szinguláris, azaz determinánsa zérus:

$$\left|\underline{\underline{F}}(\lambda)\right|=0. \tag{4.193}$$

Ez egy nemlineáris egyenletet eredményez λ-ra, aminek végtelen sok megoldása van, jelöljük ezeket növekvő sorba rendezve λ_1, λ_2, $\lambda_3,\ldots$-tal. Mindegyik λ_r-hez külön meg kell oldani a (4.192) egyenletrendszert az A_r, B_r, C_r és D_r értékekhez. Az egyenletrendszer egyenleti azonban nem függetlenek egymástól, hiszen a mátrix szinguláris, ezért nincs egyértelmű megoldás, csak az A_r, B_r, C_r és D_r értékek egymáshoz viszonyított arányát kapjuk meg. Ez hasonló jelenség, mint amikor a többszabadságfokú rendszereknél a sajátvektort nem lehetett egyértelműen megkapni.

Folytonos szerkezetnél is hasznos lehet a rezgésalakok egyértelművé tétele. Itt a tömegre normálást használjuk, ami azt jelenti, hogy úgy skálázzuk a függvényt, hogy teljesüljön az alábbi kapcsolat:

$$\int_0^L \mu v_r^2(x)dx=1. \tag{4.194}$$

4.2.1. Példa (Csuklós-csuklós gerenda rezgésalakjai)**.** *Határozzuk meg a 4.7.a) ábra csuklós-csuklós megtámasztású gerendájának sajátkörfrekvenciáit, rezgésalakjait!*

Megoldás

A szerkezet szimmetriáját kihasználandó a koordinátarendszer origóját a tartó közepére helyeztük. A peremfeltételek a rúdvégi eltolódások és nyomatékok zérus értékét fejezik ki:

$$\begin{aligned} w(-L/2,t)&=0 & w(L/2,t)&=0\\ -EI_yw''(-L/2,t)&=0 & -EI_yw''(L/2,t)&=0, \end{aligned} \tag{4.195}$$

amiből a rezgésalak $v(x)$ függvényére az alábbi négy feltétel adódik:

$$v(-L/2) = 0, \qquad v(L/2) = 0, \qquad v''(-L/2) = 0, \qquad v''(L/2) = 0. \tag{4.196}$$

A rezgésalakot (4.188) alakban keresve a második derivált:

$$v''(x) = \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \left(-A\cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) - B\sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C\cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + D\sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right)\right), \tag{4.197}$$

A peremfeltétel (4.196) szerinti négy egyenlete pedig:

$$\begin{aligned}
0 &= A\cos\left(-\frac{\lambda}{2}\right) + B\sin\left(-\frac{\lambda}{2}\right) + C\cosh\left(-\frac{\lambda}{2}\right) + D\sinh\left(-\frac{\lambda}{2}\right),\\
0 &= -A\cos\left(-\frac{\lambda}{2}\right) - B\sin\left(-\frac{\lambda}{2}\right) + C\cosh\left(-\frac{\lambda}{2}\right) + D\sinh\left(-\frac{\lambda}{2}\right),\\
0 &= A\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) + C\cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right) + D\sinh\left(\frac{\lambda}{2}\right),\\
0 &= -A\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right) - B\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) + C\cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right) + D\sinh\left(\frac{\lambda}{2}\right).
\end{aligned} \tag{4.198}$$

(A második és negyedik egyenletben a λ^2/L^2-tel egyszerűsítettünk.)

Az egyenletrendszert (4.192) szerinti mátrixos alakban írva az $\underline{\underline{F}}$ frekvenciamátrix a függvények páros, illetve páratlan tulajdonságát[a] felhasználva:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix}
\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) & \cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right) & -\sinh\left(\frac{\lambda}{2}\right)\\
-\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right) & \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) & \cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right) & -\sinh\left(\frac{\lambda}{2}\right)\\
\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right) & \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) & \cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right) & \sinh\left(\frac{\lambda}{2}\right)\\
-\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) & \cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right) & \sinh\left(\frac{\lambda}{2}\right)
\end{bmatrix} \tag{4.199}$$

A frekvenciamátrix determinánsát kifejtve kapjuk (4.193) alapján azt a nemlineáris egyenletet, amiből a frekvenciaparamétert számíthatjuk:

$$|\underline{\underline{F}}| = -16\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)\cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right)\sinh\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0 \tag{4.200}$$

Nemzérus λ esetén a szorzat hiperbolikus tényezői nem lehetnek nullák, így elegendő az első két függvénnyel foglalkoznunk. Figyelembe véve, hogy $\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\sin(\lambda)}{2}$, az $|\underline{\underline{F}}| = 0$ egyenlet akkor teljesül, ha λ éppen π egészszerese, azaz az r-edik frekvenciaparaméter:

$$\lambda_r = r\pi, \tag{4.201}$$

a hozzátartozó sajátkörfrekvencia pedig

$$\omega_{0,r} = r^2\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}. \tag{4.202}$$

A rezgésalakokat keresve két esetet kell megkülönböztetnünk.

- *Páratlan* r esetén legyen $r = 2k - 1$. Ilyenkor

$$\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0, \tag{4.203}$$

az $\underline{\underline{F}}$ mátrix egy lehetséges sajátvektora pedig:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.204}$$

vagyis a páratlan r-ekhez tartozó rezgésalak:

$$v_r(x) = A_r \cos\left(\frac{r\pi}{L}x\right). \tag{4.205}$$

A tömegre normáltság (4.194) szerinti feltétele:

$$1 = \int_{-L/2}^{L/2} \mu A_r^2 \cos^2\left(\frac{r\pi}{L}x\right) dx = A_r^2 \frac{\mu L}{2}, \tag{4.206}$$

amiből $A_r = \sqrt{\frac{2}{\mu L}}$, a tömegre normált rezgésalak pedig:

$$\boxed{v_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \cos\left(\frac{r\pi}{L}x\right)} \tag{4.207}$$

- *Páros* r esetén legyen $r = 2k$. Ilyenkor

$$\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \sin(k\pi) = 0, \tag{4.208}$$

az $\underline{\underline{F}}$ mátrix egy lehetséges sajátvektora pedig:

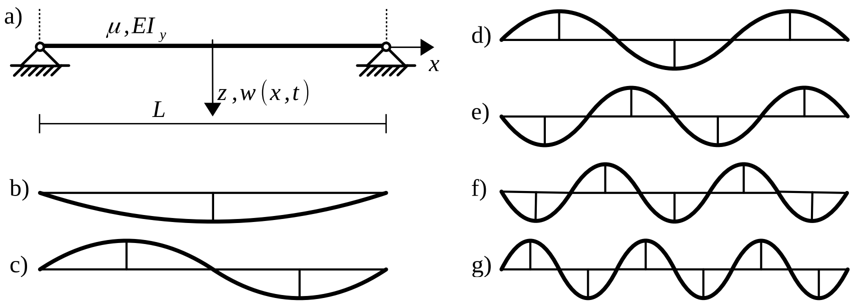
$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.209}$$

vagyis a páros r-ekhez tartozó rezgésalak:

$$v_r(x) = B_r \sin\left(\frac{r\pi}{L}x\right). \tag{4.210}$$

A tömegre normáltság (4.194) szerinti feltétele:

$$1 = \int_{-L/2}^{L/2} \mu B_r^2 \sin^2\left(\frac{r\pi}{L}x\right) dx = B_r^2 \frac{\mu L}{2}, \tag{4.211}$$



4.7. ábra. Csuklós-csuklós megtámasztású hajlított gerenda a) modell, b-g) az első hat rezgésalak.

amiből $B_r = \sqrt{\frac{2}{\mu L}}$, a tömegre normált rezgésalak pedig:

$$\boxed{v_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \sin\left(\frac{r\pi}{L}x\right)} \tag{4.212}$$

A páratlan r-hez tartozó (4.207) szerinti rezgésalakok páros függvények, tehát szimmetrikus rezgésalakokat eredményeznek, az első három ilyen alakot mutatja a 4.7.b),d),f) ábra. A páros r-hez tartozó (4.212) szerinti rezgésalakok páratlan függvények, tehát ferdén szimmetrikus rezgésalakokat eredményeznek, az első három ilyen alakot mutatja a 4.7.c),e),g) ábra.

[a] $\cos(x) = \cos(-x)$, $\sin(x) = -\sin(-x)$, $\cosh(x) = \cosh(-x)$, $\sinh(x) = -\sinh(-x)$.

Megoldás
A feladat természetesen a szimmetria kihasználása nélkül is megoldható. Amennyiben a koordinátarendszer origóját eltoljuk a gerenda kezdőpontjába, úgy a gerenda a $(0, L)$ tartományon helyezkedik el, és a rezgésalak peremfeltételei az alábbiak szerint módosulnak:

$$v(0) = 0, \qquad v(L) = 0, \qquad v''(0) = 0, \qquad v''(L) = 0. \tag{4.213}$$

Ez alapján felírva a frekvenciamátrixot az alábbi eredmény adódik:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\lambda) & \sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \\ -\cos(\lambda) & -\sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \end{bmatrix} \tag{4.214}$$

(A második és negyedik egyenletben a λ^2/L^2-tel egyszerűsítettünk.)

A frekvenciamátrix determinánsa kifejtve most

$$|\underline{\underline{F}}| = -4\sin(\lambda)\sinh(\lambda) = 0, \tag{4.215}$$

ami csak $\sin\lambda = 0$ esetén lehet nulla, amiből (4.201) képletével azonos megoldásként $\lambda_r = r\pi$ adódik, a sajátkörfrekvenciák pedig értelemszerűen azonosak a (4.202) szerintiekkel. A rezgésalakokban csak a szinuszos tag B_r együtthatója lesz nullától különböző, a tömegre normált rezgésalak

$$v_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \sin\left(\frac{r\pi}{L}x\right) \tag{4.216}$$

lesz. Az r-edik rezgésalak r félhullámból áll.

A koordinátarendszer eltolásával tehát azonos sajátkörfrekvenciákat és fizikailag ugyanolyan rezgésalakokat kaptunk, bár megjegyezzük, hogy bizonyos r értékekre a kapott függvény a (4.207), ill a (4.212) szerinti alakok helyett azok ellentettjével azonos.

4.2.2. Példa (Befogott-befogott gerenda rezgésalakjai). *Határozzuk meg egy befogott-befogott megtámasztású gerenda (lásd 4.8.a) ábra) sajátkörfrekvenciáit, rezgésalakjait!*

Megoldás

A befogott-befogott tartó esetén a peremfeltételek az eltolódásokra és az elfordulásokra vonatkoznak. Helyezkedjen el a gerenda a $(0, L)$ tartományon, így a rezgésalak peremfeltételei az alábbiak lesznek:

$$v(0) = 0, \qquad v(L) = 0, \qquad v'(0) = 0, \qquad v'(L) = 0. \tag{4.217}$$

A rezgésalakot (4.188) alakban keresve az első derivált:

$$v'(x) = \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \left(-A\sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + B\cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C\sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + D\cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right)\right), \tag{4.218}$$

Ez alapján felírva a frekvenciamátrixot az alábbi eredmény adódik:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cos(\lambda) & \sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{4.219}$$

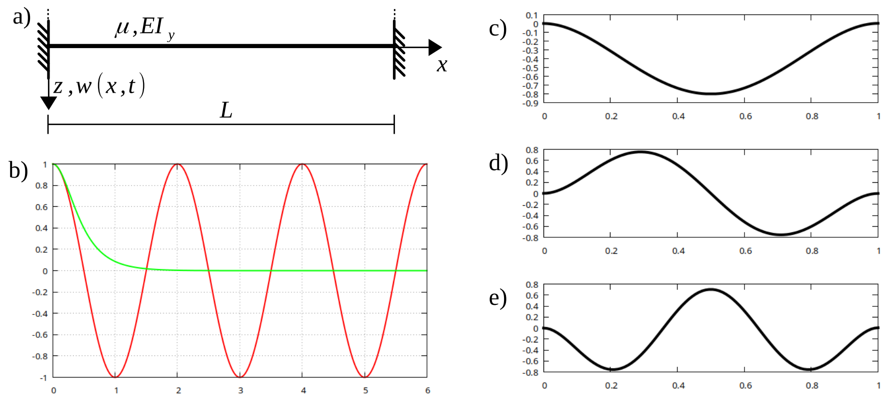
(A második és negyedik egyenletben a λ/L-lel egyszerűsítettünk.)

A frekvenciamátrix determinánsa kifejtve most

$$|\underline{\underline{F}}| = 2 - \cos(\lambda)\cosh(\lambda) = 0. \tag{4.220}$$

A determináns zérushelyeire vonatkozó egyenletet írhatjuk

$$\cos(\lambda) = \frac{1}{\cosh(\lambda)} \tag{4.221}$$



4.8. ábra. Befogott-befogott megtámasztású hajlított gerenda a) modell, b) a (4.221) egyenlet két oldala, c-e) az első három rezgésalak.

alakban is. Ennek az egyenletnek a két oldalát a 4.8.b) ábra mutatja. A λ_r megoldások itt csak numerikusan adhatók meg, bár észrevehető, hogy a frekvenciaparaméterek értékei a $\pi/2$ érték páratlan egészszereseinek a környékén fordulnak elő. Az első három frekvenciaparaméter és a hozzájuk tartozó sajátkörfrekvencia:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1.50562\pi, & \omega_{0,1} &= 2.2669\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}} \\ \lambda_2 &= 2.49975\pi, & \omega_{0,2} &= 6.2488\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}} \\ \lambda_3 &= 3.50001\pi, & \omega_{0,3} &= 12.250\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}} \end{aligned} \tag{4.222}$$

A kapott frekvenciákhoz tartozó rezgésalakokban már mindegyik elemnek külön-külön nemzérus együtthatója lesz. Az első három alakot a 4.8.c)-e) ábrákon mutatjuk be.

A fenti példák is megerősítették a λ frekvenciaparaméternek a rezgésalak függvényében betöltött szerepéből levont következtetésünket, hogy a magasabb sorszámú alak esetén nagyobb lesz a szélsőértékek száma, a csomópontok száma (vagyis az olyan pontoké, amelyeknek az eltolódása nulla) és az inflexiós pontok száma.

Az egyértelművé tett rezgésalakokkal a szabadrezgés általános megoldása:

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x)\left(a_r \cos(\omega_{0r} t) + b_r \sin(\omega_{0r} t)\right), \tag{4.223}$$

ahol a végtelen számú a_r, b_r paraméter a kezdeti feltételektől, azaz a kezdeti alaktól és sebességtől függ.

A paraméterek számításához tekintsük át az alakfüggvények néhány tulajdonságát.

4.2.2.4. Az alakfüggvények tulajdonságai

Tekintsünk két különböző frekvenciaparamétert, λ_p-t és λ_rr-t, ahol $p \neq r$, és a hozzájuk tartozó rezgésalakokat, azaz $v_p(x)$-t és $v_r(x)$-t. Vezessük be a két rezgésalak tömeggel képzett skaláris szorzatát:

$$\int v_p(x)\mu v_r(x)dx, \tag{4.224}$$

majd helyettesítsük $v_p(x)$-et a (4.189) szerint a negyedik deriváltjával.

$$\int v_p(x)\mu v_r(x)dx = \int \frac{L^4}{\lambda_p^4} v_p''''(x)\mu v_r(x)dx, \tag{4.225}$$

Integráljuk parciálisan a kifejezést[9]:

$$\int \frac{L^4}{\lambda_p^4} v_p''''(x)\mu v_r(x)dx = \frac{L^4}{\lambda_p^4}\left(\left[v_p'''(x)\mu v_r(x)dx\right] - \int v_p'''(x)\mu v_r'(x)dx\right), \tag{4.226}$$

majd a megmaradó integrállal tegyük ugyanezt, így azt kapjuk, hogy:

$$\int \frac{L^4}{\lambda_p^4} v_p''''(x)\mu v_r(x)dx =$$
$$\frac{L^4}{\lambda_p^4}\left(\left[v_p'''(x)\mu v_r(x)dx\right] - \left[v_p''(x)\mu v_r'(x)dx\right] + \int v_p''(x)\mu v_r''(x)dx\right), \tag{4.227}$$

A rúd végein megadott peremfeltételek miatt vagy az elmozdulás, vagy a vele munkakompatibilis igénybevételnek megfelelő elmozdulás-deriváltat nulla a rúd végein, ezért a $\left[v_p'''(x)\mu v_r(x)dx\right]$ és a $\left[v_p''(x)\mu v_r'(x)dx\right]$ tagok kiértékelésekor az egyik szorzótényező nulla lesz az alsó és a felső behelyettesítési értéknél is, vagyis ezek a tagok zérusok lesznek, így az eredeti szorzatintegrál értéke az alábbira adódik:

$$\boxed{\int v_p(x)\mu v_r(x)dx = \frac{L^4}{\lambda_p^4}\int v_p''(x)\mu v_r''(x)dx.} \tag{4.228}$$

Ugyanezeket a lépéseket elvégezhetjük p és r szerepét felcserélve, azaz helyettesítsük $v_r(x)$-et a (4.189) szerint a negyedik deriváltjával.

$$\int v_p(x)\mu v_r(x)dx = \int \frac{L^4}{\lambda_r^4} v_p(x)\mu v_r''''(x)dx, \tag{4.229}$$

és integráljuk kétszer parciálisan a kifejezést:

$$\int \frac{L^4}{\lambda_r^4} v_p(x)\mu v_r''''(x)dx = \frac{L^4}{\lambda_r^4}\left(\left[v_p(x)\mu v_r'''(x)dx\right] - \int v_p'(x)\mu v_r'''(x)dx\right), \tag{4.230}$$

majd

$$\int \frac{L^4}{\lambda_r^4} v_p(x)\mu v_r''''(x)dx =$$
$$\frac{L^4}{\lambda_r^4}\left(\left[v_p(x)\mu v_r'''(x)dx\right] - \left[v_p'(x)\mu v_r''(x)dx\right] + \int v_p''(x)\mu v_r''(x)dx\right), \tag{4.231}$$

[9] Azaz az $\int u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)] - \int u(x)v'(x)dx$ -ben legyen $u'(x) = v_p''''(x)$ és $v(x) = v_r(x)$.

Most is a szögletes zárójelben levő tagokról[10] állapíthatjuk meg, hogy a peremen előírt zérus elmozdulás, vagy igénybevétel miatt mind az alsó, mind a felső határ kiértékelése nullát ad, azaz az eredeti szorzatintegrál értéke az alábbira adódik:

$$\boxed{\int v_p(x)\mu v_r(x)dx = \frac{L^4}{\lambda_r^4}\int v_p''(x)\mu v_r''(x)dx,} \tag{4.232}$$

Összehasonlítva (4.228)-t és (4.232)-t a két baloldal azonos, így a jobboldalak is egyenlők:

$$\frac{L^4}{\lambda_p^4}\int v_p''(x)\mu v_r''(x)dx = \frac{L^4}{\lambda_r^4}\int v_p''(x)\mu v_r''(x)dx, \tag{4.233}$$

ami az eltérő λ_p és λ_r miatt csak akkor lehetséges, ha az integrálkifejezés nulla:

$$\int v_p''(x)\mu v_r''(x)dx = 0. \tag{4.234}$$

Ebből viszont az következik, hogy az eredeti szorzatintegrál értéke nulla:

$$\boxed{\int v_p(x)\mu v_r(x)dx = 0.} \tag{4.235}$$

A rezgésalakok ezen tulajdonságát a *rezgésalakok ortogonalitásának* nevezzük.

4.2.2.5. Kezdeti feltételek kielégítése

A feladatunk a

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x)\left(a_r\cos(\omega_{0r}t) + b_r\sin(\omega_{0r}t)\right) \tag{4.236}$$

általános megoldással és az annak deriválásával kapott

$$\dot{w}(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x)\omega_{0r}\left(-a_r\sin(\omega_{0r}t) + b_r\cos(\omega_{0r}t)\right) \tag{4.237}$$

sebességfüggvénnyel kielégíteni a $t_0 = 0$ pillanatban megadott

$$w(x,0) = w_0(x), \dot{w}(x,0) = v_0(x) \tag{4.238}$$

kezdeti feltételeket[11], azaz határozzuk meg az a_r, b_r értékeket úgy, hogy teljesüljön az alábbi két egyenlet (itt már behelyettesítettük a $t = 0$-t):

$$w_0(x) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x)a_r, \qquad v_0(x) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x)\omega_{0r}b_r. \tag{4.239}$$

[10] $[v_p(x)\mu v_r'''(x)dx]$ és $\left[v_p'(x)\mu v_r''(x)dx\right]$

[11] Korábban már bemutattuk, hogy a nem $t_0 = 0$-nál megadott kezdeti feltételek esetén a harmonikus függvények időbeni eltolásával kihasználható a $t_0 = 0$ eset azon könnyebbsége, hogy $\cos 0 = 1$ és $\sin 0 = 0$.

Mindkét egyenletben végtelen ismeretlen szerepel, ezért általános esetben a feladat közvetlenül nem oldható meg. Szorozzuk be mindkét egyenletet a $\mu v_p(x)$ függvénnyel és integráljuk az egyenletek oldalait a rúd hossza mentén:

$$\int \mu v_p(x) w_0(x) dx = \int \sum_{r=1}^{\infty} \mu v_p(x) v_r(x) a_r dx, \tag{4.240}$$

$$\int \mu v_p(x) v_0(x) dx = \int \sum_{r=1}^{\infty} \mu v_p(x) v_r(x) \omega_{0r} b_r dx. \tag{4.241}$$

Az integrálást az összegzés indexétől függetlenül végezhetjük el, ezért az integrálás bevihető az összegzéseken belülre, az a_r és b_r paraméterek pedig kiemelhetők az integrálásokból:

$$\int \mu v_p(x) w_0(x) dx = \sum_{r=1}^{\infty} \int \mu v_p(x) v_r(x) dx a_r, \tag{4.242}$$

$$\int \mu v_p(x) v_0(x) dx = \sum_{r=1}^{\infty} \int \mu v_p(x) v_r(x) dx \omega_{0r} b_r. \tag{4.243}$$

A kapott két kifejezés jobb oldalán az összegzés során a $p \neq r$ esetekben az integrál a rezgésalakok ortogonalitása miatt nulla lesz, így csak az $r = p$ esetben lesz nemzérus szorzótényezője az a_r és a b_r paraméternek. Ráadásul a két paraméter ekkor azonos lesz a_p-vel és b_p-vel.

A nemzérus integrálok értéke a rezgésalakok normálása miatt (lásd a (4.194) egyenletet) 1, amiből közvetlenül adódik, hogy:

$$\int \mu v_p(x) w_0(x) dx = a_p, \tag{4.244}$$

$$\int \mu v_p(x) v_0(x) dx = \omega_{0p} b_p. \tag{4.245}$$

A $w_0(x)$, $v_0(x)$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldás tehát:

$$w(x,t) =$$
$$\sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) \left(\int \mu v_r(x) w_0(x) dx \cos(\omega_{0r} t) + \frac{\int \mu v_r(x) v_0(x) dx}{\omega_{0r}} \sin(\omega_{0r} t) \right), \tag{4.246}$$

4.2.3. Példa (Csuklós-csuklós gerenda szabadrezgése)**.** *Egy csuklós-csuklósan megtámasztott gerenda két végén egyidejűleg működtetve egy-egy ellenkező irányba forgató M nyomatékot létrehoztunk egy elmozdult egyensúlyi alakot. (Ezt mutatja a 4.9.a) ábra.) Határozzuk meg a kialakuló rezgés függvényét, ha elengedve a tartó végeit, hirtelen megszüntetjük a két nyomatékot.*

Megoldás
A kezdeti feltételek megállapításához az elengedés előtti állapotban statikusan kell megoldani a feladatot. A peremfeltételek ekkor:

$$\begin{aligned} w_0(-L/2) &= 0, & w_0(L/2) &= 0, \\ -EI_y w_0''(-L/2) &= M, & -EI_y w_0''(L/2,t) &= M, \end{aligned} \tag{4.247}$$

melyeket az

$$EIw_0''''(x) = 0 \tag{4.248}$$

differenciálegyenlet általános megoldásával kell kielégítenünk. Utóbbi egy harmadfokú parabola négy paraméterrel, melyekre a (4.247) szerinti egyenletrendszert felírva és megoldva az alábbi kezdeti alakot kapjuk:

$$w_0(x) = -\frac{M}{2EI_y}x^2 + \frac{ML^2}{8EI_y} \tag{4.249}$$

A kezdeti alakot a 4.9.b) ábra mutatja. Az alak szimmetrikus, a függvény páros.

A gerendát álló helyzetből engedjük el, így a kezdeti sebességek nullák:

$$v_0(x) = 0, \tag{4.250}$$

amiből minden r-re $b_r = 0$.

A (4.223) szerinti általános megoldás a_r paramétereinek számításához r páratlan, vagy páros voltától függően a (4.207) vagy a (4.212) szerinti függvénnyel kell számolnunk a (4.244) szerinti integrált. A sajátkörfrekvencia (4.202) képletének megfelelően mindegyik alaknál:

$$\omega_{0,r} = r^2\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}. \tag{4.251}$$

Páros r esetén a $v_r(x)w_0(x)$ szorzat egy páratlan és egy páros függvény szorzataként páratlan, így a $-L/2 - L/2$ tartományon vett integrál nulla lesz:

$$a_r = a_{2k} = 0. \tag{4.252}$$

Páratlan r esetén a (4.244) szerinti integrál:

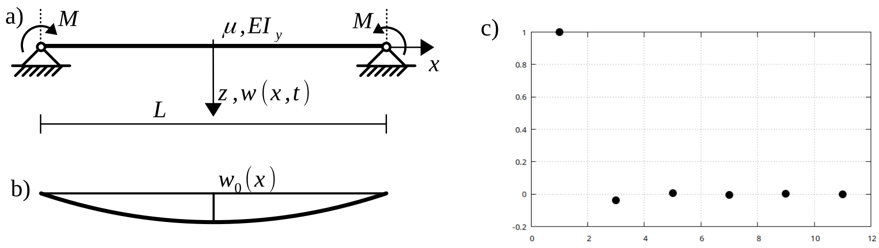
$$a_r = \int_{-L/2}^{L/2} \mu\sqrt{\frac{2}{\mu L}}\cos\left(\frac{r\pi}{L}x\right)\left(-\frac{M}{2EI_y}x^2 + \frac{ML^2}{8EI_y}\right)dx. \tag{4.253}$$

A műveletet elvégezve:

$$a_r = \mu\sqrt{\frac{2}{\mu L}}\frac{M}{EI_y}\sin\left(\frac{r\pi}{2}\right)\frac{2L^3}{r^3\pi^3}. \tag{4.254}$$

Mivel r csak páratlan lehet, ezért $\sin\frac{r\pi}{2}$ értéke $+1$, vagy -1 lesz, így azt $(-1)^{\frac{r-1}{2}}$ alakban írhatjuk. A teljes megoldásban az összegzéshez minden alak $\sqrt{\frac{2}{\mu L}}$ amplitúdójával szorzódik az a_r érték, ezt felhasználva a rezgés függvénye:

$$\boxed{w(x,t) = \frac{4ML^2}{EI_y}\sum_{r=1,3,5,\dots}(-1)^{\frac{r-1}{2}}\frac{1}{r^3\pi^3}\cos\left(\frac{r\pi}{L}x\right)\cos(\omega_{0,r}t)} \tag{4.255}$$



4.9. ábra. Csuklós-csuklós gerenda szabadrezgése a) a terhelt szerkezet, b) kezdeti alak, c) a szimmetrikus rezgésalakok együtthatói.

Ha a páratlan r-t $2k-1$ alakban írjuk, akkor az összegzés az összes számra vonatkozhat:

$$\boxed{w(x,t) = \frac{4ML^2}{EI_y} \sum_k^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3\pi^3} \cos\left(\frac{r\pi}{L}x\right) \cos(\omega_{0,r}t)} \tag{4.256}$$

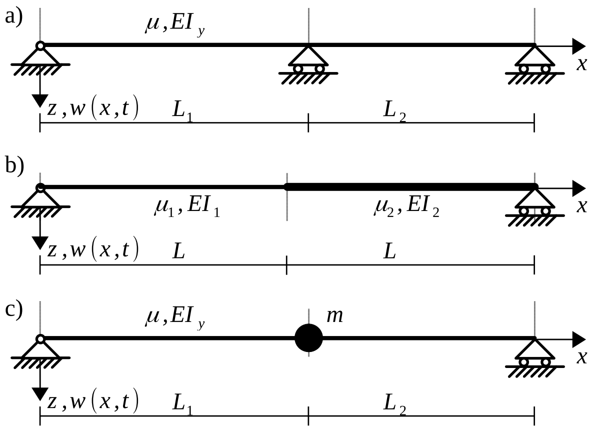
Mindkét alakban látszik, hogy a magasabb módok részesedése csökken, ennek arányát mutatja a 4.9.c) ábra.

4.2.2.6. Több szakaszból álló gerenda

A szabadrezgés általános megoldásának (4.188) szerinti alakfüggvényének paraméterei csak a legegyszerűbb esetben határozhatók meg a kezdő- és végpontra vonatkozó peremfeltételek segítségével. Többtámaszú gerenda, konzolosan túlnyúló tartórész, a hajlítómerevség szakaszonként változó volta, vagy egy koncentrált tömeg azzal jár, hogy a közbenső támaszok fölött, a hajlítómerevség változásának keresztmetszetében, illetve a tömegpontnak a keresztmetszetében folytonossági, kapcsolódási és esetenként peremfeltételeket kell felírnunk. Eközben a (4.188) szerinti alakfüggvény adott A, B, C, D paraméterei csak szakaszonként lesznek érvényesek, vagyis számuk a szakaszok számával arányosan többszöröződik. Így a (4.192) szerinti frekvenciamátrix mérete megnövekszik, determinánsának kifejtése bonyolultabbá válik. A következő három példában megmutatjuk, hogy a 4.10. ábrán látható három esetben hogyan kell az egyes modelleknek megfelelő feltételek alapján a frekvenciamátrixot előállítani.

4.2.4. Példa (Folytatólagos többtámaszú gerenda szabadrezgése). *Határozzuk meg a 4.10.a) ábrán látható háromtámaszú gerenda kapcsolódási és peremfeltételeit és írjuk fel a tartó frekvenciamátrixát!*

Megoldás
A közbenső támasznál átadódó reakcióerő miatt egy ugrás lehet a nyíróerőábrában, ami az elmozdulásfüggvény harmadik deriváltjával arányos, vagyis más (4.188) képletnek megfelelő függvény lesz érvényes a $0 < x < L_1$ és az $L_1 < x < L_1 + L_2$ szakaszon. A $v(x)$ alakfüggvényt tehát szakaszonként



4.10. ábra. Szakaszokra bontható gerenda szabadrezgése. a) Folytatólagos többtámaszú gerenda. b) Szakaszonként változó hajlítómerevségű gerenda. c) Koncentrált tömegpontot is tartalmazó gerenda.

adhatjuk meg:

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x), & \text{ha } x < L_1 \\ v_2(x), & \text{ha } L_1 < x \end{cases}, \tag{4.257}$$

ahol

$$v_j(x) = A_j \cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + B_j \sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C_j \cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + D_j \sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right). \tag{4.258}$$

Két-két peremfeltételt írhatunk elő a kezdő- és a végpontra, a csuklós megtámasztásnak megfelelően az ott érvényes függvényértéknek és a második deriváltnak kell nullának lenniük:

$$v_1(0) = 0, \qquad v_1^{''}(0) = 0, \tag{4.259}$$

$$v_2(L_1 + L_2) = 0, \qquad v_2^{''}(L_1 + L_2) = 0. \tag{4.260}$$

A középső támasznál két peremfeltételünk van: a bal oldali és a jobb oldali szakasz alapján számolt eltolódásnak is nullának kell lennie:

$$v_1(L_1) = 0, \qquad v_2(L_1) = 0, \tag{4.261}$$

Ezzel a két feltétellel az eltolódások folytonosságát is biztosítottuk a támasz fölött, hiszen:

$$v_1(L_1) = v_2(L_1). \tag{4.262}$$

A középső támasznál van két további folytonossági feltételünk: a tartó tengelyének szögelfordulása, és a hajlítónyomaték páronként azonos a támasz fölött a bal oldali és a jobb oldali szakasz alapján számolva. Előbbi az eltolódás első deriváltjával arányos:

$$v_1^{'}(L_1) = v_2^{'}(L_1) \qquad \rightarrow \qquad v_1^{'}(L_1) - v_2^{'}(L_1) = 0, \tag{4.263}$$

utóbbi pedig a görbülettel, és így az eltolódás második deriváltjával:

$$v_1''(L_1) = v_2''(L_1) \qquad \rightarrow \qquad v_1''(L_1) - v_2''(L_1) = 0. \tag{4.264}$$

Az egyes feltételeket rendre nullára rendeztük. A (4.258) függvényekben L értékére nincsen megkötés, jelen esetben egyszerűsítheti a dolgot, ha az $L = L_1$ behelyettesítéssel élünk. Így a nyolc feltételünknek megfelelő egyenlet a felírás sorrendjében (ahol lehetséges, ott λ/L megfelelő hatványával való egyszerűsítés után):

$$A_1 + C_1 = 0, \tag{4.265}$$

$$-A_1 + C_1 = 0, \tag{4.266}$$

$$\begin{aligned} A_2 \cos\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) + B_2 \sin\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) + \\ C_2 \cosh\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) + D_2 \sinh\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) = 0, \end{aligned} \tag{4.267}$$

$$\begin{aligned} -A_2 \cos\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) - B_2 \sin\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) + \\ C_2 \cosh\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) + D_2 \sinh\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) = 0, \end{aligned} \tag{4.268}$$

$$A_1 \cos(\lambda) + B_1 \sin(\lambda) + C_1 \cosh(\lambda) + D_1 \sinh(\lambda) = 0, \tag{4.269}$$

$$A_2 \cos(\lambda) + B_2 \sin(\lambda) + C_2 \cosh(\lambda) + D_2 \sinh(\lambda) = 0, \tag{4.270}$$

$$-(A_1-A_2)\sin(\lambda)+(B_1-B_2)\cos(\lambda)+(C_1-C_2)\sinh(\lambda)+(D_1-D_2)\cosh(\lambda) = 0, \tag{4.271}$$

$$-(A_1-A_2)\cos(\lambda)-(B_1-B_2)\sin(\lambda)+(C_1-C_2)\cosh(\lambda)+(D_1-D_2)\sinh(\lambda) = 0, \tag{4.272}$$

amikból a frekvenciamátrix (a $\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)$ argumentumot $\hat{\lambda}$-val jelölve) az alábbi lesz:

$$\underline{\underline{F}}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\hat{\lambda}) & \sin(\hat{\lambda}) & \cosh(\hat{\lambda}) & \sinh(\hat{\lambda}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\hat{\lambda}) & -\sin(\hat{\lambda}) & \cosh(\hat{\lambda}) & \sinh(\hat{\lambda}) \\ \cos(\lambda) & \sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\lambda) & \sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sin(\lambda) & -\cos(\lambda) & -\sinh(\lambda) & -\cosh(\lambda) \\ -\cos(\lambda) & -\sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) & \cos(\lambda) & \sin(\lambda) & -\cosh(\lambda) & -\sinh(\lambda) \end{bmatrix} \tag{4.273}$$

Megjegyezzük, hogy a középső támasznál írhattunk volna egy peremfeltételt az egyik oldali eltolódás értékére és egy folytonossági feltételt a jobbról és balról számolt eltolódás értékekre. Ez formailag azzal járna, hogy a frekvenciamátrix hatodik sora helyett az ötödik és a hatodik sor különbségét írtuk volna fel.

Szintén említést érdemel, hogy a két szakasz függvényeit nem kell ugyanazon koordinátarendszerben megadni, hanem lehet például az egyes szakaszok kezdőpontjához rögzített x_1- és x_2-koordinátákat használni. Ilyen felírás mellett a második szakasz kezdőpontjában a $\cos 0 = \cosh 0 = 1$ és $\sin 0 = \sinh 0 = 0$ behelyettesítések nagyban megkönnyíthetik a determináns felírását és kifejtését.

4.2.5. Példa (Szakaszonként változó hajlítómerevségű gerenda szabadrezgése)**.** *Határozzuk meg a 4.10.b) ábrán látható, szakaszonként állandó hajlítómerevségű gerenda kapcsolódási és peremfeltételeit és írjuk fel a tartó frekvenciamátrixát!*

Megoldás

A keresztmetszet és így a hajlítómerevség, valamint a fajlagos tömeg az $x = L$ pontban változik, így más (4.188) képletnek megfelelő függvény lesz érvényes a $0 < x < L$ és az $L < x < 2L$ szakaszon. A $v(x)$ alakfüggvényt tehát szakaszonként adhatjuk meg:

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x), & \text{ha } x < L_1 \\ v_2(x), & \text{ha } L_1 < x \end{cases}, \tag{4.274}$$

ahol mindkét szakasz azonos sajátkörfrekvenciával rezeg. Tekintettel a sajátkörfrekvencia és a frekvenciaparaméter közötti (4.191) kapcsolatra, könnyen belátható, hogy a keresztmetszeti jellemzők függvényében a frekvenciaparaméter szakaszonként eltérő lehet, így azt szakaszonként külön kell jelölni, pl. λ_j-vel:

$$v_j(x) = A_j \cos\left(\frac{\lambda_j}{L}x\right) + B_j \sin\left(\frac{\lambda_j}{L}x\right) + C_j \cosh\left(\frac{\lambda_j}{L}x\right) + D_j \sinh\left(\frac{\lambda_j}{L}x\right), \tag{4.275}$$

és mivel (4.191) nyomán:

$$\omega_0 = \lambda_1^2 \sqrt{\frac{EI_1}{\mu_1 L^4}} = \lambda_2^2 \sqrt{\frac{EI_2}{\mu_2 L^4}}, \tag{4.276}$$

ezért a két paraméter *nem* független egymástól:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \sqrt[4]{\frac{EI_1}{EI_2}\frac{\mu_2}{\mu_1}}. \tag{4.277}$$

Most négy peremfeltételt tudunk felírni, kettőt a kezdő, kettőt a végpontra. A csuklós támaszok miatt ezek:

$$v_1(0) = 0, \qquad v_1''(0) = 0, \tag{4.278}$$

$$v_2(2L) = 0, \qquad v_2''(2L) = 0. \tag{4.279}$$

A keresztmetszet változásánál négy folytonossági feltételünk lesz. Az eltolódás és az elfordulás folytonossága rendre a függvény és első deriváltjának azonosságát jelenti páronként:

$$v_1(L) = v_2(L) \qquad \rightarrow \qquad v_1(L) - v_2(L) = 0, \tag{4.280}$$

$$v_1^{'}(L) = v_2^{'}(L) \qquad \rightarrow \qquad v_1^{'}(L) - v_2^{'}(L) = 0. \tag{4.281}$$

A hajlítónyomaték és a nyíróerő folytonosságát a második és a harmadik deriváltak segítségével tudjuk kifejezni, most azonban nem egyszerűsíthetünk EI-vel, hiszen az az egyenlet két oldalán különbözik. Ennek megfelelően a két feltétel:

$$EI_1 v_1^{''}(L) = EI_2 v_2^{''}(L) \qquad \rightarrow \qquad v_1^{''}(L) - \epsilon v_2^{''}(L) = 0, \tag{4.282}$$

$$EI_1 v_1^{'''}(L) = EI_2 v_2^{'''}(L) \qquad \rightarrow \qquad v_1^{'''}(L) - \epsilon v_2^{'''}(L) = 0, \tag{4.283}$$

ahol $\epsilon = \frac{EI_2}{EI_1}$. Utóbbi kapcsolatot szemléltetjük a 4.11.a) ábrán is. A függvényalakok és deriváltjaiknak behelyettesítése után az A_j, B_j, C_j, D_j paraméterek együtthatóit összegyűjtve tudjuk felírni a frekvenciamátrixot (ahol lehetett, ott egyszerűsítettünk λ és L értékével):

$$\underline{\underline{F}}(\lambda_1) = \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\lambda_1) & \sin(\lambda_1) & \cosh(\lambda_1) & \sinh(\lambda_1) \\ -\sin(\lambda_1) & \cos(\lambda_1) & \sinh(\lambda_1) & \cosh(\lambda_1) \\ -\cos(\lambda_1) & -\sin(\lambda_1) & \cosh(\lambda_1) & \sinh(\lambda_1) \\ \sin(\lambda_1) & -\cos(\lambda_1) & \sinh(\lambda_1) & \cosh(\lambda_1) \end{matrix}\right. \cdots$$

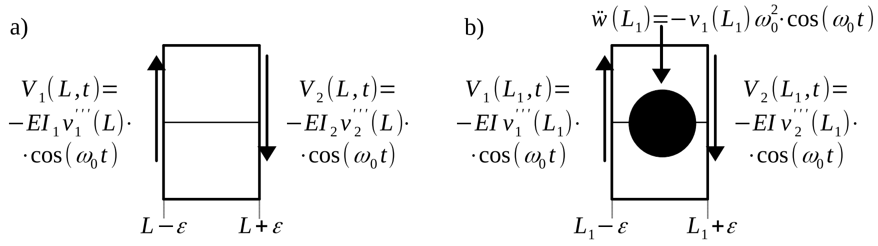
$$\cdots \left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(2\lambda_2) & \sin(2\lambda_2) & \cosh(2\lambda_2) & \sinh(2\lambda_2) \\ -\cos(2\lambda_2) & -\sin(2\lambda_2) & \cosh(2\lambda_2) & \sinh(2\lambda_2) \\ -\cos(\lambda_2) & -\sin(\lambda_2) & -\cosh(\lambda_2) & -\sinh(\lambda_2) \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sin(\lambda_2) & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cos(\lambda_2) & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sinh(\lambda_2) & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cosh(\lambda_2) \\ \epsilon\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\cos(\lambda_2) & \epsilon\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\sin(\lambda_2) & -\epsilon\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\cosh(\lambda_2) & -\epsilon\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\sinh(\lambda_2) \\ -\epsilon\frac{\lambda_2^3}{\lambda_1^3}\sin(\lambda_2) & \epsilon\frac{\lambda_2^3}{\lambda_1^3}\cos(\lambda_2) & -\epsilon\frac{\lambda_2^3}{\lambda_1^3}\sinh(\lambda_2) & -\epsilon\frac{\lambda_2^3}{\lambda_1^3}\cosh(\lambda_2) \end{matrix}\right]. \tag{4.284}$$

A fenti mátrixban ugyan megjelenik λ_2, de mint fent már mutattuk, az nem független λ_1-től, így a $|\underline{\underline{F}}| = 0$ egyenletben csak λ_1 lesz az ismeretlen.

4.2.6. Példa (Koncentrált tömegpontos gerenda szabadrezgése)**.** *Határozzuk meg a 4.10.c) ábrán látható gerenda kapcsolódási és peremfeltételeit és írjuk fel a tartó frekvenciamátrixát!*

Megoldás

A tömegpont együtt mozog a gerendával, ezért gyorsulása lesz, amit a jobb és bal oldali szakaszról átadódó nyíróerők különbsége, mint eredő hoz létre. Emiatt egy ugrás lehet a nyíróerőábrában, ami az elmozdulásfüggvény harmadik deriváltjával arányos, vagyis más (4.188) képletnek megfelelő függvény lesz érvényes a $0 < x < L_1$ és az $L_1 < x < L_1 + L_2$ szakaszon. A $v(x)$



4.11. ábra. A szakaszokra bontható gerenda közbenső keresztmetszetének környezetében ható belső erők. a) A nyíróerők a hajlítómerevség változásánál (4.10.b) ábra). b) A koncentrált tömeg gyorsulását létrehozó nyíróerők (4.10.c) ábra).

alakfüggvényt tehát most is szakaszonként adhatjuk meg:

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x), & \text{ha } x < L_1 \\ v_2(x), & \text{ha } L_1 < x \end{cases}, \tag{4.285}$$

ahol

$$v_j(x) = A_j \cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + B_j \sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C_j \cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + D_j \sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right). \tag{4.286}$$

A csuklós támaszok miatti négy peremfeltétel azonos a 4.2.4. példában látottakkal:

$$v_1(0) = 0, \qquad v_1''(0) = 0, \tag{4.287}$$

$$v_2(L_1 + L_2) = 0, \qquad v_2''(L_1 + L_2) = 0. \tag{4.288}$$

A tömegpontnál három folytonossági feltételt tudunk felírni: a tartó tengelyének eltolódása mellett annak szögelfordulása, és a hajlítónyomaték páronként azonos a tömegpont fölött a bal oldali és a jobb oldali szakasz alapján számolva. Az eltolódásból:

$$v_1(L_1) = v_2(L_1) \qquad \rightarrow \qquad v_1(L_1) - v_2(L_1) = 0, \tag{4.289}$$

az elfordulás az eltolódás első deriváltjával arányos:

$$v_1'(L_1) = v_2'(L_1) \qquad \rightarrow \qquad v_1'(L_1) - v_2'(L_1) = 0, \tag{4.290}$$

a hajlítónyomaték pedig a görbülettel, és így az eltolódás második deriváltjával:

$$v_1''(L_1) = v_2''(L_1) \qquad \rightarrow \qquad v_1''(L_1) - v_2''(L_1) = 0. \tag{4.291}$$

Az utolsó kapcsolódási feltételhez a 4.11.b) ábrából kell kiindulnunk. A bal és jobb oldali tartórészről átadódó V_1 és V_2 nyíróerők együtt hozzák létre a tömegpont gyorsulását. A gyorsulást számíthatjuk a bal és a jobb oldalról is, válasszuk előbbit[a], így Newton második törvénye:

$$+EIv_1^{'''}(L_1) - EIv_2^{'''}(L_1) = -m\omega_0^2 v_1(L_1) \tag{4.292}$$

A (4.286) függvényekben L értékére nincsen megkötés, jelen esetben egyszerűsítheti a dolgot, ha az $L = L_1$ behelyettesítéssel élünk. Így a nyolc feltételünknek megfelelő nyolc egyenlet a felírás sorrendjében (ahol lehetséges, ott λ/L megfelelő hatványával való egyszerűsítés után):

$$A_1 + C_1 = 0, \tag{4.293}$$

$$-A_1 + C_1 = 0, \tag{4.294}$$

$$\begin{aligned} &A_2 \cos\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) + B_2 \sin\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) + \\ &\qquad C_2 \cosh\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) + D_2 \sinh\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) = 0, \end{aligned} \tag{4.295}$$

$$\begin{aligned} &-A_2 \cos\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) - B_2 \sin\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) + \\ &\qquad C_2 \cosh\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) + D_2 \sinh\left(\lambda\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right)\right) = 0, \end{aligned} \tag{4.296}$$

$$(A_1-A_2)\cos(\lambda)+(B_1-B_2)\sin(\lambda)+(C_1-C_2)\cosh(\lambda)+(D_1-D_2)\sinh(\lambda) = 0, \tag{4.297}$$

$$-(A_1-A_2)\sin(\lambda)+(B_1-B_2)\cos(\lambda)+(C_1-C_2)\sinh(\lambda)+(D_1-D_2)\cosh(\lambda) = 0, \tag{4.298}$$

$$-(A_1-A_2)\cos(\lambda)-(B_1-B_2)\sin(\lambda)+(C_1-C_2)\cosh(\lambda)+(D_1-D_2)\sinh(\lambda) = 0, \tag{4.299}$$

$$\begin{aligned} &+(A_1-A_2)\sin(\lambda)-(B_1-B_2)\cos(\lambda)+(C_1-C_2)\sinh(\lambda)+(D_1-D_2)\cosh(\lambda) \\ &\qquad + \frac{\lambda m}{\mu L}\left(A_1\cos(\lambda)+B_1\sin(\lambda)+C_1\cosh(\lambda)+D_1\sinh(\lambda)\right) = 0, \end{aligned} \tag{4.300}$$

Az utolsó esetben ω_0-t kifejeztük λ segítségével, majd egyszerűsítettük az egyenletet. Az utolsó sor együtthatójában felismerhető, hogy az $\frac{m}{\mu L}$ hányados a koncentrált tömeg és a gerenda tömegének aránya.

Ezekből az egyenletekből kiválogatva az együtthatókat, a $\hat{\lambda} = \lambda\frac{L_1+L_2}{L_1}$ behelyettesítéssel a frekvenciamátrix első hét sora a következő lesz:

$$\underline{\underline{F}}_{1-7}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\hat{\lambda}) & \sin(\hat{\lambda}) & \cosh(\hat{\lambda}) & \sinh(\hat{\lambda}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\hat{\lambda}) & -\sin(\hat{\lambda}) & \cosh(\hat{\lambda}) & \sinh(\hat{\lambda}) \\ \cos(\lambda) & \sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) & -\cos(\lambda) & -\sin(\lambda) & -\cosh(\lambda) & -\sinh(\lambda) \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sin(\lambda) & -\cos(\lambda) & -\sinh(\lambda) & -\cosh(\lambda) \\ -\cos(\lambda) & -\sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) & \cos(\lambda) & \sin(\lambda) & -\cosh(\lambda) & -\sinh(\lambda) \end{bmatrix} \tag{4.301}$$

Az utolsó sora pedig:

$$\underline{\underline{F}}_8(\lambda) = \Big[\sin(\lambda) + \frac{\lambda m}{\mu L}\cos(\lambda) \quad -\cos(\lambda) + \frac{\lambda m}{\mu L}\sin(\lambda) \quad \sinh(\lambda) + \frac{\lambda m}{\mu L}\cosh(\lambda) \quad \dots$$
$$\dots \quad \cosh(\lambda) + \frac{\lambda m}{\mu L}\sinh(\lambda) \quad \sin(\lambda) \quad -\cos(\lambda) \quad -\sinh(\lambda) \quad -\cosh(\lambda)\Big] \tag{4.302}$$

[a] $\ddot{v}(L_1, t) = v_1(L_1) \cdot (-\omega_0^2)\,(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t))$

A frekvenciaparaméter(ek) ismeretében az A_j, B_j, C_j, D_j paraméterek meghatározása, és a rezgésalakok egyértelművé tétele a következő lépés. Az így kapott rezgésalakok a korábban tárgyalt tulajdonságokkal rendelkeznek.

4.2.2.7. Statikus normálerő hatása

A szabadrezgés vizsgálatához utolsóként nézzük meg a statikus normálerő hatását. Egy P nyomóerőt feltételezve (4.181)-ben a szabadrezgésnek megfelelő $q(x,t) = 0$ és a normálerőnek megfelelő $N = -P$ behelyettesítéssel a szabadrezgés differenciálegyenlete:

$$EI_y w''''(x,t) + Pw''(x,t) + \mu\ddot{w}(x,t) = 0. \tag{4.303}$$

Keressük a megoldást

$$w(x,t) = v(x)\,(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)) \tag{4.304}$$

alakban, azaz válasszuk szét az idő- és helyfüggést. A feltételezett alak deriváltjait behelyettesítve a differenciálegyenletbe, az időfüggő taggal történő egyszerűsítés után az alábbi közönséges differenciálegyenletet kapjuk a rezgésalakra:

$$EI_y v''''(x) + Pv''(x) - \mu\omega_0^2 v(x) = 0. \tag{4.305}$$

Keressük a rezgésalakot

$$v(x) = ce^{\frac{\lambda}{L}x} \tag{4.306}$$

alakban, ahol λ az alakot meghatározó frekvenciaparaméter. A feltételezett alakot behelyettesítve a (4.305) egyenletbe, λ^2-re egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$\frac{EI_y}{L^4}\lambda^4 + \frac{P}{L^2}\lambda^2 - \mu\omega_0^2 = 0, \tag{4.307}$$

aminek λ^2-re két megoldása van:

$$\left(\lambda^2\right)_1 = \frac{-P - \sqrt{P^2 + 4EI_y\mu\omega_0^2}}{\frac{EI_y}{L^2}}, \qquad \left(\lambda^2\right)_2 = \frac{-P + \sqrt{P^2 + 4EI_y\mu\omega_0^2}}{\frac{EI_y}{L^2}}. \tag{4.308}$$

A fenti két megoldásból az első mindig negatív, a második mindig pozitív lesz. Vezessük be a

$$\lambda_1 = \sqrt{-\left(\lambda^2\right)_1}, \qquad \lambda_2 = \sqrt{\left(\lambda^2\right)_2} \tag{4.309}$$

jelölést. Az első gyökből a gyökvonást követő két megoldás harmonikus függvényekké alakítható át, míg a második gyökből történő gyökvonást követő megoldás hiperbolikus függvényekké alakítható át. Így az alakfüggvény általános alakja:

$$v(x) = A\cos\left(\frac{\lambda_1}{L}x\right) + B\sin\left(\frac{\lambda_1}{L}x\right) + C\cosh\left(\frac{\lambda_2}{L}x\right) + D\sinh\left(\frac{\lambda_2}{L}x\right). \quad (4.310)$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy az alakfüggvény λ_1 és λ_2 paraméterei tipikusan különböznek egymástól, de mindkettő az ω_0 sajátkörfrekvenciától függ.

Ezeknek a paramétereknek és az A, B, C, D együtthatóknak a meghatározása a már ismert módon történik. A peremfeltételekből kifejezett egyenletrendszerben A, B, C, D együtthatóiból létrehozzuk a frekvenciamátrixot, majd keressük azon ω_0 értékeket, ahol a mátrix determinánsa 0 lesz. A visszahelyettesítést követően az A, B, C, D együtthatók egymáshoz való arányát kell meghatároznunk, majd az alak egyértelművé tételéhez a $v(x)$ függvényt normálni.

A normálerővel terhelt gerenda hajlítórezgésének demonstrálására az irodalomban leggyakrabban a csuklós-görgős megtámasztású gerendát szokás alkalmazni (lásd a 4.6.a) ábrát). Ennél a megtámasztásnál az adódik, hogy a rezgésalakot (4.216) képletével azonos alakban írhatjuk:

$$v_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu L}}\sin\left(\frac{r\pi}{L}x\right) \quad (4.311)$$

Mivel ez az alak egyetlen harmonikus függvény, így a benne előforduló $r\pi$ paraméter a (4.310) szerinti λ_1-nek felel meg. A (4.307) egyenletben tehát $-r^2\pi^2$-et kell λ^2 helyére behelyettesítenünk, hogy a sajátkörfrekvenciát meghatározzuk:

$$\frac{EI_y}{L^4}r^4\pi^4 - \frac{P}{L^2}r^2\pi^2 - \mu\omega_{0r}^2 = 0, \quad (4.312)$$

Ennek megoldása az r-edik sajátkörfrekvenciára:

$$\omega_{0r} = \sqrt{\frac{r^4\pi^4 EI_y}{\mu L^4} - \frac{r^2\pi^2 P}{\mu L^2}}. \quad (4.313)$$

A négyzetgyök alatti kifejezés második törtjét bővítsük ki az alábbi módon. Az r félhullámot tartalmazó kihajlási alakhoz tartozó kiritikus erő:

$$P_{kr,r} = \frac{r^2\pi^2 EI_y}{L^2}, \quad (4.314)$$

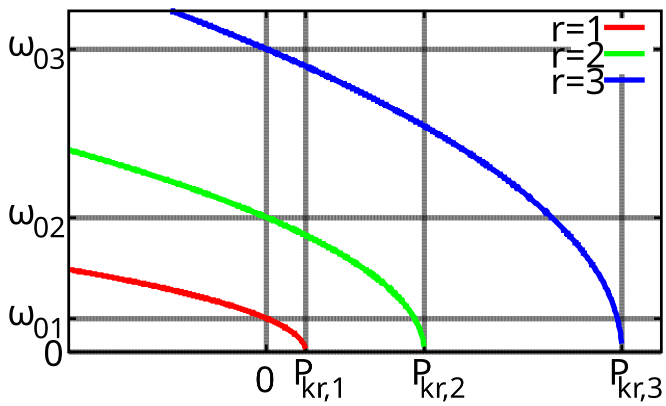
vagyis igaz az alábbi összefüggés:

$$\frac{r^2\pi^2 P}{\mu L^2} = \frac{r^2\pi^2 P}{\mu L^2}\cdot\frac{\frac{r^2\pi^2 EI_y}{L^2}}{P_{kr,r}} = \frac{r^4\pi^4 EI_y}{\mu L^4}\frac{P}{P_{kr,r}}. \quad (4.315)$$

Ezt visszahelyettesítve (4.313) képletébe azt kapjuk, hogy:

$$\omega_{0r} = r^2\pi^2\sqrt{\frac{EI_y}{\mu L^4}}\sqrt{1 - \frac{P}{P_{kr,r}}}, \quad (4.316)$$

azaz a normálerő nélküli (lásd (4.202)) sajátkörfrekvencia egy olyan tényezővel szorzódik, mely a normálerőnek a kritikus erőhöz való hányadosától függ. Ezt a kapcsolatot szemléltetjük a 4.12. ábrán az első három rezgésalakra. Emlékeztetünk, hogy P nyomóerőt jelentett a levezetésünkben. Húzóerő, vagyis negatív



4.12. ábra. Statikus normálerővel terhelt csuklós-görgős megtámasztású gerenda sajátkörfrekvenciájának függése a nyomóerőtől.

P esetében a sajátkörfrekvencia növekszik[12], nyomóerő esetén pedig csökken a sajátkörfrekvencia.

Egy alakhoz tartozó kritikus erőnél nagyobb nyomás esetén ráadásul nincs is ahhoz az alakhoz tartozó sajátkörfrekvencia. Ilyenkor a nyomott rúd már instabil állapotban van, kitérítve az egyenes egyensúlyi helyzetéből úgy fog mozogni, hogy az egyensúlyi helyzettől távolodik, oda nem tér vissza. A sajátkörfekvencia viszont az sajátrezgés során a visszatérés gyakoriságával van kapcsolatban: ha nem tér vissza, akkor nem értelmezhető a fogalma.

Bár a növekvő nyomóerő és a csökkenő sajátkörfrekvencia közötti kapcsolat más megtámasztási viszonyok esetén is fennáll, az nem mindig írható fel ilyen elegáns képlettel. A kapcsolat viszont felhasználható a stabilitásvizsgálat dinamikai alapú elvégzésére. Ennek során a teherszintet növelve minden teherlépcsőben meg kell határozni az első sajátkörfrekvenciát, és amelyik teherszintnél a sajátkörfrekvencia nullára csökken, az lesz a kritikus teher.

Ismételten felhívjuk a figyelmet, hogy a csuklós-görgős megtámasztású rúd esete speciális. Ennek oka az, hogy a kihajlási

$$EI_y v''''(x) + Pv''(x) = 0. \tag{4.317}$$

differenciálegyenletének (mely a (4.305) egyenletből kiolvasható a tehetetlenség elhanyagolásával) az általános alakja eltér a (4.188) szerinti megoldástól:

$$v(x) = A\cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + B\sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + Cx + D. \tag{4.318}$$

A bemutatotthoz hasonló egyszerű kapcsolat tehát csak olyan szerkezeteknél fordulhat elő, ahol a (4.188) és a (4.318) szerinti függvények azonosak lehetnek, azaz $C = D = 0$ eredményt adnak a peremfeltételek. Ez általában nem így van.

4.2.3. Gerjesztett rezgések

Hajlított gerenda gerjesztett rezgésének a számítása a többi gerjesztett rezgés számításához hasonlóan két részből tevődik össze. Az általános megoldás-

[12]Bár nem tökéletes példa, de ondoljunk csak az egyre jobban megfeszített húr hangjára.

hoz a (4.175) inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásához kell hozzáadni a kiegészítő differenciálegyenlet általános megoldását, majd a kezdeti feltételeket a tejes megoldással kell kielégíteni.

A kiegészítő differenciálegyenlet itt is a szabadrezgés megoldásánál használt és megoldott homogén differenciálegyenlet, amit már ismerünk, ezért a továbbiakban csak a partikuláris megoldásokkal foglalkozunk. (Arra is láttunk korábbról példát, hogy az állandósult rezgésrészhez elegendő a partikuláris megoldás ismerete.)

4.2.3.1. Harmonikus gerjesztés, közvetlen megoldás

Terhelje a gerendát egy időben harmonikus függvény szerint változó intenzitású $q(x,t)$ erő. (Lásd a 4.13. ábrát.) A gerjesztés körfrekvenciája legyen ω, az intenzitás amplitúdója $q_0(x)$, keressük a gerjesztett rezgésnek az állandósult részét.

A mozgás differenciálegyenlete:

$$EI_y w''''(x,t) + \mu \ddot{w}(x,t) = q_0(x)\cos(\omega t). \tag{4.319}$$

Az állandósult rezgésrész harmonikus gerjesztés esetén szintén harmonikus függvény lesz, közvetlen megoldás során keressük az alábbi alakban:

$$w(x,t) = \hat{w}(x)\cos(\omega t), \tag{4.320}$$

azaz válasszuk szét az idő és a tér szerinti változást. A feltételezett alak negyedik és második deriváltjai:

$$w''''(x,t) = \hat{w}''''(x)\cos(\omega t), \qquad \ddot{w}(x,t) = \hat{w}(x)(-\omega^2)\cos(\omega t). \tag{4.321}$$

Ezeket behelyettesítve a mozgás differenciálegyenletébe azt kapjuk, hogy:

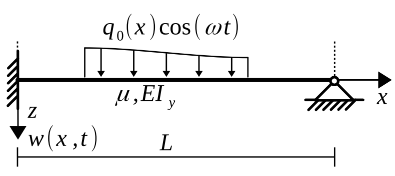
$$EI_y \hat{w}''''(x)\cos(\omega t) - \mu \hat{w}(x)\omega^2\cos(\omega t) = q_0(x)\cos(\omega t). \tag{4.322}$$

Egyszerűsítve $\cos(\omega t)$-vel a rezgés alakjára az alábbi közönséges differenciálegyenletet kapjuk:

$$EI_y \hat{w}''''(x) - \mu\omega^2\hat{w}(x) = q_0(x). \tag{4.323}$$

A teher hossz menti eloszlásától függően kell az $\hat{w}(x)$ függvény partikuláris alakját meghatározni, illetve a kiegészítő egyenlet megoldásának négy paraméterével kielégíteni a rúdvégi peremfeltételeket.

4.2.7. Példa (Csuklós-csuklós gerenda harmonikus gerjesztése). *A 4.7.a) ábra szerinti csuklós-csuklós megtámasztású gerendát $q(x,t) = q_0\cos(\omega t)$ erővel gerjesztjük. Határozzuk meg az állandósult rezgést a differenciálegyenlet közvetlen megoldásával!*



4.13. ábra. Időben harmonikusan gerjesztett hajlított gerenda modellje.

Megoldás
A megoldást a (4.320) egyenletnek megfelelően keressük. A (4.319) differenciálegyenletbe történő behelyettesítés és $\cos(\omega t)$-vel való egyszerűsítés után (4.323) alakja az alábbi lesz:

$$EI_y \hat{w}''''(x) - \mu\omega^2 \hat{w}(x) = q_0. \tag{4.324}$$

Ennek egy partikuláris megoldása a

$$\hat{w}_p(x) = -\frac{q_0}{\mu\omega^2} \tag{4.325}$$

lesz, míg az

$$EI_y \hat{w}''''(x) - \mu\omega^2 \hat{w}(x) = 0 \tag{4.326}$$

kiegészítő differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\hat{w}_0(x) = A\cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + B\sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C\cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + D\sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right), \tag{4.327}$$

ahol

$$\frac{EI\lambda^4}{L^4} = \mu\omega^2 \qquad \rightarrow \qquad \lambda = \sqrt[4]{\frac{\mu l^4\omega^2}{EI}}. \tag{4.328}$$

A peremfeltételeket a gerenda kezdő- és végpontjára kell felírnunk. a csuklós megtámasztások miatt mindkét helyen zérus az eltolódás és a hajlítónyomaték. Legyen az x-tengely kezdőpontja a gerenda kezdőpontjában, így

$$\begin{aligned} w(0,t) &= 0, & w(L,t) &= 0, \\ -EI_y w''(0,t) &= 0, & -EI_y w''(L,t) &= 0, \end{aligned} \tag{4.329}$$

amiből a rezgésalak $\hat{w}(x)$ függvényére az alábbi négy feltétel adódik:

$$\hat{w}(0) = 0, \qquad \hat{w}(L) = 0, \qquad \hat{w}''(0) = 0, \qquad \hat{w}''(L) = 0. \tag{4.330}$$

Ezekbe behelyettesítve a $\hat{w}_p(x) + \hat{w}_0$ általános megoldást azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} -\frac{q_0}{\mu\omega^2} + A\cos(0) + B\sin(0) + C\cosh(0) + D\sinh(0) &= 0, \\ -A\cos(0) - B\sin(0) + C\cosh(0) + D\sinh(0) &= 0, \\ -\frac{q_0}{\mu\omega^2} + A\cos(\lambda) + B\sin(\lambda) + C\cosh(\lambda) + D\sinh(\lambda) &= 0, \\ -A\cos(\lambda) - B\sin(\lambda) + C\cosh(\lambda) + D\sinh(\lambda) &= 0. \end{aligned} \tag{4.331}$$

(A második és a negyedik egyenletben a λ^2/L^2-tel egyszerűsítettünk.)

A fenti négy egyenletet mátrixos alakban is felírhatjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\lambda) & \sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \\ -\cos(\lambda) & -\sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_0}{\mu\omega^2} \\ 0 \\ \frac{q_0}{\mu\omega^2} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.332}$$

Az első két egyenletből:

$$A = C = \frac{q_0}{2\mu\omega^2}, \tag{4.333}$$

a maradék két egyenlet pedig:

$$\begin{bmatrix} \sin(\lambda) & \sinh(\lambda) \\ -\sin(\lambda) & \sinh(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \frac{q_0}{\mu\omega^2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\cos(\lambda)}{2} - \frac{\cosh(\lambda)}{2} \\ 1 + \frac{\cos(\lambda)}{2} - \frac{\cosh(\lambda)}{2} \end{bmatrix}, \tag{4.334}$$

aminek a megoldásaként:

$$\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \frac{q_0}{\mu\omega^2 2\sin(\lambda)\sinh(\lambda)} \begin{bmatrix} \sinh(\lambda) \\ \sin(\lambda) - \sin(\lambda)\cos(\lambda) - \sin(\lambda)\cosh(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{4.335}$$

Fentiekből összerakva a rezgést:

$$w(x,t) = \frac{q_0}{2\mu\omega^2}\left[\cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + \frac{\sinh(\lambda)}{\sin(\lambda)\sinh(\lambda)}\sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + \cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{(\sin(\lambda) - \sin(\lambda)\cos(\lambda) - \sin(\lambda)\cosh(\lambda))}{\sin(\lambda)\sinh(\lambda)}\sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right)\right]\cos(\omega t). \tag{4.336}$$

4.2.3.2. Harmonikus gerjesztés, modálanalízis

Terhelje a gerendát egy időben harmonikus függvény szerint változó intenzitású $q(x,t)$ erő. (Lásd ismét a 4.13. ábrát.) A gerjesztés körfrekvenciája legyen ω, az intenzitás amplitúdója $q_0(x)$:

$$q(x,t) = q_0(x)\cos(\omega t), \tag{4.337}$$

és keressük a gerjesztett rezgésnek az állandósult részét.

A mozgás differenciálegyenlete:

$$EI_y w''''(x,t) + \mu\ddot{w}(x,t) = q_0(x)\cos(\omega t). \tag{4.338}$$

Modálanalízises megoldás esetén előzetesen már meghatároztuk a $v_r(x)$ sajátrezgésalakokat és a hozzájuk tartozó ω_{0r} sajátkörfrekvenciákat. Keressük a megoldást a sajátrezgésalakok lineáris kombinációjaként:

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) y_r(t), \tag{4.339}$$

melynek második és negyedik deriváltjai:

$$\ddot{w}(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x)\ddot{y}_r(t), \tag{4.340}$$

$$w''''(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r''''(x)y_r(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda_r^4 v_r(x)}{L^4} y_r(t). \tag{4.341}$$

Ezeket behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$EI_y \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda_r^4 v_r(x)}{L^4} y_r(t) - \mu \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x)\ddot{y}_r(t) = q_0(x)\cos(\omega t). \tag{4.342}$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát $v_p(x)$-szel, és integráljuk a rúd hossza mentén. A baloldali összegzésekből a sajátalakok ortogonalitása miatt csak a $p = r$ esetben lesz nullától különböző érték, mégpedig pontosan egy, így az egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\frac{EI_y}{\mu} \frac{\lambda_p^4}{L^4} y_p(t) + \ddot{y}_p(t) = \int v_p(x) q_0(x) dx \cos(\omega t). \tag{4.343}$$

A jobb oldali integrál a teher függvényének a rezgésalakra vett vetülete, ezt jelöljük a továbbiakban f_p-vel:

$$f_p = \int v_p(x) q_0(x) dx, \tag{4.344}$$

így a p-edik rezgésalak modális koordinátájára az alábbi közönséges differenciálegyenletet kapjuk:

$$\ddot{y}_p(t) + \omega_{0p}^2 y_p(t) = f_p \cos(\omega t), \tag{4.345}$$

aminek a megoldása az egyszabadságfokú rendszereknél látottak alapján:

$$y_p(t) = f_p \frac{1}{\omega_{0p}^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0p}^2}} cos(\omega t). \tag{4.346}$$

A modális amplitúdó képlete a többszabadságfokú rendszereknél látott módon a teher vetületének, egy rezonanciatényezőnek és a sajátkörfrekvencia négyzete reciprokának a szorzatából áll. A jelenség tehát hasonlít a többszabadságfokú rendszereknél látottakhoz: a magasabb rezgésalakok szerepe csökken a teljes válaszban.

4.2.8. Példa (Csuklós-csuklós gerenda harmonikus gerjesztése)**.** *A 4.7.a) ábra szerinti csuklós-csuklós megtámasztású gerendát $q(x,t) = q_0\cos(\omega t)$ erővel gerjesztjük. Határozzuk meg az állandósult rezgést modálanalízissel!*

Megoldás

Az egyes modális válaszokhoz a (4.207) és (4.212) szerinti modális rezgésalakokkal kell kiszámítani a (4.344) szerinti vetületeket. *Páros* r értékekre (4.212) szerint:

$$f_r = \int_{-L/2}^{L/2} q_0 \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \sin\left(\frac{r\pi}{L}x\right) dx = 0, \tag{4.347}$$

míg *páratlan* r értékekre (4.207) szerint:

$$f_r = \int_{-L/2}^{L/2} q_0 \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \cos\left(\frac{r\pi}{L}x\right) dx = \left[\frac{q_0 L}{r\pi}\sqrt{\frac{2}{\mu L}} \sin\left(\frac{r\pi}{L}x\right)\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{q_0 L}{r\pi}\sqrt{\frac{2}{\mu L}} \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) \cdot 2 \quad (4.348)$$

A továbbiakban kihasználjuk, hogy páratlan r esetén $\sin(r\pi/2) = (-1)^{\frac{r-1}{2}}$, azaz

$$f_r = \frac{2q_0 L}{r\pi}\sqrt{\frac{2}{\mu L}}(-1)^{\frac{r-1}{2}}. \quad (4.349)$$

A (4.346) képletbe helyettesítsük be a (4.202) egyenletnek megfelelő:

$$\frac{1}{\omega_{0r}^2} = \frac{\mu L^4}{r^4 \pi^4 EI} \quad (4.350)$$

összefüggést, az $\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}}$ tagot pedig, ami az r-edik mód rezonanciatényezője, jelöljük μ_r-rel. Így egyszerűsítések után a megoldás:

$$w(x,t) = \sum_{rp.tlan} \frac{4q_0 L^4}{r^5 \pi^5 EI}(-1)^{\frac{r-1}{2}} \mu_r \cos\left(\frac{r\pi}{L}x\right)\cos(\omega t). \quad (4.351)$$

A képletből kiolvasható, hogy amikor r kellően nagy ($\omega < \omega_{0r}$), és μ_r 1-hez tart, akkor a magasabb módok hatása a nevezőben levő r^5 tagnak köszönhetően rohamosan csökken.

4.2.3.3. Gerjesztett rezgés, modálanalízis

Az előző alpontban bemutatott modálanalízis nem csak harmonikus gerjesztés esetén alkalmazható. A fő lépéseket követve bármilyen $q(x,t)$ teherrel gerjesztett gerenda rezgését az egyes rezgésalakok lineáris kombinációjaként írhatjuk fel:

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) y_r(t), \quad (4.352)$$

ahol $v_r(x)$ az r-edik rezgésalak függvénye és $y_r(t)$ az r-edik rezgésalak modális koordinátája.

A feltételezett alak deriváltjai most is (4.340) és (4.341) egyenletek szerint számíthatók. Ezeket helyettesítsük be a (4.175) differenciálegyenletbe:

$$EI_y \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda_r^4}{L^4} v_r(x) y_r(t) + \mu \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) y_r(t) = q(x,t) \quad (4.353)$$

Szoorozzuk be mindkét oldal $v_p(x)$-vel és integráljuk a gerenda hossza mentén. A sajátalakok ortogonalitása és normálása miatt a bal oldal a (4.343) egyenlethez hasonlóan egyszerűsödik (hiszen az összegzésből csak $p = r$ esetben lesz nemzérus együtthatója $y_r(t)$-nek és $\ddot{y}_r(t)$-nek):

$$\frac{EI_y}{\mu}\frac{\lambda_p^4}{L^4}y_p(t) + \ddot{y}_p(t) = \int v_p(x)q(x,t)dx. \tag{4.354}$$

Vezessük be a p-edik alak modális terhét a (4.344) képletben látotthoz hasonló módon:

$$f_p(t) = \int v_p(x)q(x,t)dx, \tag{4.355}$$

így végül, (4.191) felhasználásával a p-edik rezgésalak modális koordinátájára az alábbi közönséges differenciálegyenletet kapjuk:

$$\ddot{y}_p(t) + \omega_{0p}^2 y_p(t) = f_p(t). \tag{4.356}$$

Az egyes sajátalakok rezgése tehát itt is szétválasztható egyszabadságfokú rendszerek rezgésére.

4.2.3.4. Koncentrált erő

A terhelés, és így a gerjesztés egy speciális esete, ha koncentrált erő hat a gerendára. Ennek kezelésére két módszert mutatunk be, mindkettőt ugyanazon a harmonikus gerjesztést tartalmazó példán keresztül.

4.2.9. Példa (Csuklós-csuklós gerenda harmonikus gerjesztése). *A 4.14.a) ábra szerinti csuklós-csuklós megtámasztású gerendát a harmadolópontjában az $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ erővel gerjesztjük. Határozzuk meg az állandósult rezgést a differenciálegyenlet közvetlen megoldásával!*

Megoldás
A harmadolópontjában terhelt tartót mutatja a 4.14.a) ábra. Ahogy a differenciálegyenlet közvetlen megoldásánál láttuk, ilyenkor az állandósult rezgés során egy $\hat{w}(x)$ alakfüggvény rezeg a gerjesztésnek megfelelő $\cos(\omega t)$ függvény szerint. A $\hat{w}(x)$ alakfüggvény (4.323) szerinti differenciálegyenletében viszont szakaszonként zérus megoszlóteher-intenzitás van, vagyis a két szakaszon külön-külön a kiegészítő differenciálegyenlet megoldásának megfelelő

$$\hat{w}_j(x) = A_j\cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + B_j\sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C_j\cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + D_j\sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) \tag{4.357}$$

függvényeket kapjuk, ahol most is

$$\frac{EI\lambda^4}{L^4} = \mu\omega^2 \qquad \to \qquad \lambda = \sqrt[4]{\frac{\mu l^4\omega^2}{EI}}, \tag{4.358}$$

és

$$\hat{w}(x) = \begin{cases} \hat{w}_1(x), & \text{ha } x < L/3 \\ \hat{w}_2(x), & \text{ha } L/3 < x \end{cases}. \tag{4.359}$$

A gerenda két szakaszának megfelelően összesen nyolc feltételt tudunk felírni. A kezdő- és a végpontban a csuklós megtámasztásnak megfelelően az eltolódásokra és azok második deriváltjaira van feltételünk:

$$\hat{w}_1(0) = 0, \qquad \hat{w}_1^{''}(0) = 0, \tag{4.360}$$

$$\hat{w}_2(L) = 0, \qquad \hat{w}_2^{''}(L) = 0. \tag{4.361}$$

A koncentrált erő támadáspontjában folytonos az eltolódás, az elfordulás és a hajlítónyomaték, vagyis a függvényérték, valamint az első és második derivált:

$$\hat{w}_1(L/3) = \hat{w}_2(L/3), \qquad \rightarrow \qquad \hat{w}_1(L/3) - \hat{w}_2(L/3) = 0, \tag{4.362}$$

$$\hat{w}_1^{'}(L/3) = \hat{w}_2^{'}(L/3), \qquad \rightarrow \qquad \hat{w}_1^{'}(L/3) - \hat{w}_2^{'}(L/3) = 0, \tag{4.363}$$

$$\hat{w}_1^{''}(L/3) = \hat{w}_2^{''}(L/3), \qquad \rightarrow \qquad \hat{w}_1^{''}(L/3) - \hat{w}_2^{''}(L/3) = 0. \tag{4.364}$$

A nyíróerőben pedig F_0 nagyságú ugrás van: a 4.14.b) ábra alapján az elemi szakaszra ható erőknek egyensúlyban kell lenniük, azaz:

$$F_0 - \left(-EI\hat{w}_1^{'''}(L/3)\right) + \left(-EI\hat{w}_2^{'''}(L/3)\right) = 0, \tag{4.365}$$

amiből:

$$\hat{w}_1^{'''}(L/3) - \hat{w}_2^{'''}(L/3) = -F_0/EI. \tag{4.366}$$

A fenti nyolc feltételt az alábbi mátrixos alakban írhatjuk fel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\lambda) & \sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\lambda) & -\sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \\ \cos\frac{\lambda}{3} & \sin\frac{\lambda}{3} & \cosh\frac{\lambda}{3} & \sinh\frac{\lambda}{3} & -\cos\frac{\lambda}{3} & -\sin\frac{\lambda}{3} & -\cosh\frac{\lambda}{3} & -\sinh\frac{\lambda}{3} \\ -\sin\frac{\lambda}{3} & \cos\frac{\lambda}{3} & \sinh\frac{\lambda}{3} & \cosh\frac{\lambda}{3} & \sin\frac{\lambda}{3} & -\cos\frac{\lambda}{3} & -\sinh\frac{\lambda}{3} & -\cosh\frac{\lambda}{3} \\ -\cos\frac{\lambda}{3} & -\sin\frac{\lambda}{3} & \cosh\frac{\lambda}{3} & \sinh\frac{\lambda}{3} & \cos\frac{\lambda}{3} & \sin\frac{\lambda}{3} & -\cosh\frac{\lambda}{3} & -\sinh\frac{\lambda}{3} \\ \sin\frac{\lambda}{3} & -\cos\frac{\lambda}{3} & \sinh\frac{\lambda}{3} & \cosh\frac{\lambda}{3} & -\sin\frac{\lambda}{3} & \cos\frac{\lambda}{3} & -\sinh\frac{\lambda}{3} & -\cosh\frac{\lambda}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-F_0}{EI} \end{bmatrix} \tag{4.367}$$

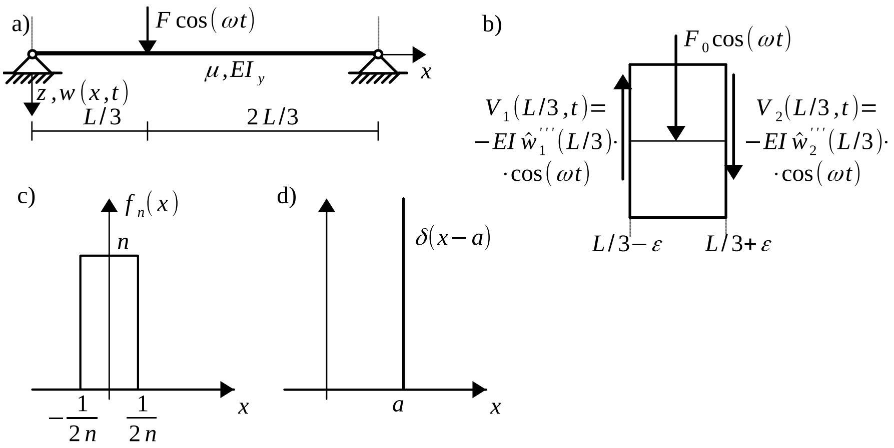
A fenti egyenletrendszer megoldása adja a rezgésalak paramétereit.

Megjegyzés: ha $\lambda = r\pi$, akkor a gerjesztés az r-edik sajátkörfrekvenciával történik és az együtthatómátrix szingulárissá válik. Hárommal nem osztható r esetén ($r \neq 3k$) ez rezonanciát eredményez és az egyenletrendszernek nem lesz megoldása (végtelen nagy elmozdulások alakulnak ki). Hárommal osztható r esetén ($r = 3k$) az egyenletrendszernek lesz megoldása, igaz nem egyértelmű. A gerjesztés körfrekvenciájával megegyező sajátkörfrekvenciájához egy olyan rezgésalak tartozik, melynek az erő támadáspontjában csomópontja van, ennek az alaknak bármilyen skalárszorosát hozzáadva a megoldáshoz egy újabb rezgésalakot kapunk.

A koncentrált erő kezelésének másik módszeréhez tekintsük szakaszonként állandó függvényeknek egy olyan sorozatát, amit a 4.14.c) ábra mutat. Az n-edik eleme a sorozatnak legyen az alábbi:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha} & x < \frac{-1}{2n} \\ n, \text{ ha} & \frac{-1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0, \text{ ha} & \frac{1}{2n} < x \end{cases} \tag{4.368}$$

A fenti definícióból kiolvasható, hogy bármely olyan ℓ tartományon, ami tartal-



4.14. ábra. Koncentrált erővel harmonikusan gerjesztett hajlított gerenda: a) modellje, b) a koncentrált erő környezetének elkülönítése, a nyíróerő szingularitása, c) függvények $f_n(x)$ sorozata a koncentrált erő közelítésére, d) a Dirac-delta függvény eltolása.

mazza a $\left(\frac{-1}{2n}; \frac{1}{2n}\right)$ tartományt, a függvény alatti terület éppen egy, azaz

$$\int_\ell f_n(x)dx = 1. \tag{4.369}$$

Az $n \to \infty$ határátmenet esetén az $f_n(x)$ sorozat határértékeként kapott disztribúciót[13] nevezzük *Dirac-delta függvénynek*, és a $\delta(x)$ szimbólummal jelöljük. Ha az f_n függvényeket egy F erővel szorozzuk, akkor az egyes tagok eredője rendre a szorzó erővel lesz egyenlő, a fenti sorozat határértéke pedig egy, az origóban ható F koncentrált erő lesz. A koncentrált erőt tehát az alábbi módon írhatjuk át függvénnyé:

$$q(x) = F \lim_{n\to\infty} f_n(x) = F\delta(x). \tag{4.370}$$

A Dirac-delta függvény argumentumának eltolásával az erő támadáspontjának a helyét tudjuk változtatni, így az $x = a$ pontban ható F nagyságú erőt a

$$q(x) = F\delta(x - a) \tag{4.371}$$

alakban írhatjuk fel.

A Dirac-delta függvény jellemzője, hogy bármilyen $g(x)$ függvénnyel való szorzatintegrálja egy $(x_1; x_2)$ tartományon az alábbi módon számítható:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\delta(x-a)dx = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad a < x_1 \\ g(a), & \text{ha} \quad x_1 < a < x_2 \\ 0, & \text{ha} \quad x_2 < a \end{cases} \tag{4.372}$$

Fenti összefüggésben a 0 értékeket az magyarázza, hogy az integrálási tartományban $\delta(x) = 0$. Ha az integrálási tartomány tartalmazza a szingularitást,

[13] A *disztribúció* a függvény fogalmának általánosítása a funkcionálanalízisben olyan leképezésekre, amelyek a hagyományos függvény-definíciónak nem felelnek meg: esetünkben az $x = 0$-nál szingularitása van, hiszen nincs az $x = 0$ értékhez hozzárendelt értéke, miközben az is az értelmezési tartományának része.

akkor az $f_n(x)$ függvények határátmenetéből kiindulva az integrálási tartomány nemzérus szakasza egyre rövidül, így azon belül $g(x)$ változása egyre csökken, majd elhanyagolhatóvá válik. Az $n \to \infty$ helyzetben csak az $x = a$-beli függvényértéket szorozzuk n-nel, majd az integrálás tartomány hosszának megfelelően osztjuk n-nel.

A Dirac-delta ismeretében nézzük meg a koncentrált erővel történő gerjesztés kezelésének másik módját.

4.2.10. Példa (Csuklós-csuklós gerenda harmonikus gerjesztése)**.** *A 4.14.a) ábra szerinti csuklós-csuklós megtámasztású gerendát a harmadolópontjában az $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ erővel gerjesztjük. Határozzuk meg az állandósult rezgést modálanalízissel!*

Megoldás
A harmadolópontjában terhelt tartót mutatja a 4.14.a) ábra. Ahogy a differenciálegyenlet modálanalízissel történő megoldásánál láttuk, ilyenkor az első lépés a sajátrezgésalakok meghatározása. A 4.2.1. példa második megoldását használjuk, azaz a (4.216) alakfüggvényeket. A teherfüggvénynek a p-edik rezgésalakra vett vetülete (4.344) szerint:

$$f_p(t) = \int_0^L \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) F_0 \delta(x - L/3) \cos(\omega t) dx, \tag{4.373}$$

ahol az időfüggő gerjesztőerőt (4.371)-nak megfelelően vettük fel. A Dirac-delta szorzatintegráljára vonatkozó (4.371) összefüggést felhasználva ez a vetület:

$$f_p(t) = F_0 \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \sin\left(\frac{p\pi}{3}\right) \cos(\omega t), \tag{4.374}$$

vagyis egy olyan harmonikus gerjesztés, melynek amplitúdója

$$f_{p0} = F_0 \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \sin\left(\frac{p\pi}{3}\right).$$

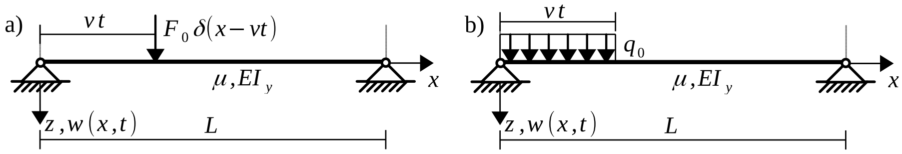
Az erre adott modális válasz amplitúdója (4.346) alapján:

$$u_{p0} = f_p \frac{1}{\omega_{0p}^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0p}^2}}. \tag{4.375}$$

A p-edik sajátrezgésalak sajátkörfrekvenciájának négyzete (4.202) nyomán:

$$\omega_{0,p}^2 = \frac{p^4 \pi^4 EI}{\mu L^4}. \tag{4.376}$$

Ugyanezen sajátrezgésalak rezonanciatényezőjét jelöljük μ_p-vel. Ezeket felhasználva az elmozdulásfüggvény az állandósult rezgés során:



4.15. ábra. Mozgó teherrel gerjesztett hajlított gerenda: a) koncentrált erőteher, b) a tartóra felfutó megoszló járműteher.

$$w(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} F_0 \frac{2}{\mu L} \sin\left(\frac{p\pi}{3}\right) \frac{\mu L^4}{p^4\pi^4 EI} \mu_p \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \cos(\omega t) =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2F_0 L^3}{p^4\pi^4 EI} \sin\left(\frac{p\pi}{3}\right) \mu_p \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \cos(\omega t). \quad (4.377)$$

Az eredményhez kapcsolódóan három dolgot említünk meg. Az egyik, hogy a nevezőben található p^4 tag „szokás szerint” a magasabb rezgésmódok hatásának csökkenését eredményezik. A másik, hogy a $\sin\left(\frac{p\pi}{3}\right)$ tag értéke p értékétől függően rendre a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0 ismétlődő sorozat elemeit veszi fel. A harmadik, hogy ha a gerjesztés körfrekvenciája megegyezik valamelyik sajátkörfrekvenciával, akkor μ_p értéke végtelenné válna. Ha az ehhez tartozó rezonáns alak sorszáma hárommal osztható (azaz $p = 3k$), akkor a fenti sorozat miatt ennek az alaknak az együtthatója nullával szorzódik (a gerjesztőerő az alak csomópontjában hat), így lesz véges megoldás. Ha a rezonáns alak nem ilyen ($p \neq 3k$), akkor tényleges rezonancia alakul ki végtelenbe tartó elmozdulásokkal.

4.2.3.5. Mozgó teher

A szerkezeten mozgó teher hatását különböző szintű modellezéssel lehet figyelembe venni. A tartók statikájában alkalmazott mozgó teher a kvázistatikus teher helyét változtatta a szerkezet hossza mentén, így a mozgás sebessége nem játszott szerepet. Ennél a megközelítésnél eggyel *dinamikusabb* eljárás, ha az erő helyzetét úgy változtatjuk időfüggően, hogy a gerenda gerjesztett rezgését követjük közben.

Ilyen időfüggő terhekre mutat két példát a 4.15. ábra. Az a) ábrán a Dirac-delta segítségével adhatunk meg egy koncentrált erőt, ahol a helyét meghatározó paraméter függ a v sebességtől és a t időtől. A b) ábra egy megoszló erővel jellemzett járműterhet mutat, ami v sebességgel halad, így a terhelt szakasz hossza függ a sebességtől és a t időtől.

4.2.11. Példa (Csuklós-csuklós gerenda mozgó teherrel)**.** *Határozzuk meg a 4.15.a) ábra szerinti, $v =$áll. sebességgel mozgó F_0 nagyságú teher hatására a gerenda elmozdulásfüggvényét.*

Megoldás
A Dirac-delta függvény bevezetésekor (4.371) egyenletben láttuk, hogy az $x = a$ helyen koncentrált erőt a függvény eltolásával kaphatjuk meg. A mozgó tehernél ugyanezt megtehetjük az a helyett a vt-vel való eltolást használva, így a gerenda mozgásának differenciálegyenlete (4.175)-be történő behelyettesítés után az alábbi lesz:

$$EI_y w''''(x,t) + \mu \ddot{u}(x,t) = F_0 \delta(x - vt) \tag{4.378}$$

A megoldást keressük a 4.2.1 példa második megoldásában meghatározott (4.216) rezgésalakok lineáris kombinációjaként (lásd (4.339)):

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) y_r(t), \tag{4.379}$$

ahol

$$v_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \sin\left(\frac{r\pi}{L} x\right), \tag{4.380}$$

és $y_r(t)$ az r-edik rezgésalak modális koordinátája. Emlékeztetünk (4.201) és (4.202) alapján arra, hogy

$$\lambda_r = r\pi, \qquad \omega_{0r} = r^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\mu L^2}}. \tag{4.381}$$

A feltételezett alak (4.340) és (4.341) szerinti deriváltjait helyettesítsük be a (4.378) differenciálegyenletbe:

$$EI_y \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda_r^4}{L^4} v_r(x) y_r(t) + \mu \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) y_r(t) = F_0 \delta(x - vt) \tag{4.382}$$

Az egyenletet $v_p(x)$-vel beszorozva és integrálva a gerenda hossza mentén a sajátalakok ortogonalitása és normálása miatt a bal oldal egyszerűsödik:

$$\ddot{y}_p(t) + \omega_{0p}^2 y_p(t) = \int_L v_p(x) F_0 \delta(x - vt) dx. \tag{4.383}$$

A jobb oldalon a teher modális vetülete (4.372) alapján:

$$\int_L v_p(x) F_0 \delta(x - vt) dx = F_0 v_p(vt). \tag{4.384}$$

A p-edik rezgésalak differenciálegyenlete tehát:

$$\ddot{y}_p(t) + \omega_{0p}^2 y_p(t) = F_0 \sqrt{\frac{2}{\mu L}} \sin\left(\frac{p\pi v t}{L}\right). \tag{4.385}$$

Mint látjuk, jelen esetben a modális terhelés egy $\omega = \frac{p\pi v}{L}$ körfrekvenciájú harmonikus gerjesztésnek felel meg, de ennek az egyszerűségnek a rezgésalakok egyszerűsége, azaz a támaszok elrendezése is oka.

A modális válasz partikuláris megoldását a Duhamel-integrállal (2.299) kereshetjük:

$$y_p(t) = \int_0^t \frac{F_0}{\omega_0 p}\sqrt{\frac{2}{\mu L}} \sin\left(\frac{p\pi v t}{L}\right) \sin\left(\omega_{0p}(t-\tau)\right) d\tau \tag{4.386}$$

Az integrálást elvégezve a modális koordinátára azt kapjuk, hogy:

$$y_p(t) = \frac{\frac{F_0}{\omega_0 p}\sqrt{\frac{2}{\mu L}}}{\omega_{0p}^2 - \left(\frac{p\pi v}{L}\right)^2} \left[\omega_{0p} \sin\left(\frac{p\pi v}{L} t\right) - \frac{p\pi v}{L} \sin(\omega_{0p} t)\right]. \tag{4.387}$$

A gerenda elmozdulása ezt követően:

$$w(x,t) = \frac{2F_0}{\mu L} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{p\pi}{L} x\right)}{\omega_{0p}^2 - \left(\frac{p\pi v}{L}\right)^2} \left[\sin\left(\frac{p\pi v}{L} t\right) - \frac{p\pi v}{L\omega_{0p}} \sin(\omega_{0p} t)\right]. \tag{4.388}$$

A maximális kitérésnek, vagy a fenti függvényből származtatott igénybevételek maximumának számítását csak numerikusan lehet elvégezni. Ilyenkor is csak véges számú időlépésben és csak véges számú pontban lehetséges a maximum keresése, ráadásul rezgésalakokból is csak véges számút lehet kiszámítani.

A (4.388) képletből az azért kiolvasható, hogy akkor alakulhatnak ki nagyon nagy elmozdulások, ha a nevezőben közel nulla szerepel, azaz amikor

$$\omega_{0p}^2 - \left(\frac{\lambda_p v}{L}\right)^2 \approx 0. \tag{4.389}$$

*Kritikus sebesség*nek nevezzük azokat a sebességeket, amikor az egyenlőség éppen teljesül, értelemszerűen egyszerre mindig egy alakra. Ekkor persze nem végtelen elmozdulások jönnének létre, hanem a (4.385) egyenlet megoldása lenne más alakú a rezonancia miatt, de mindenképpen egyfajta veszélyforrás már a környezete is, ezért érdemes ismernünk. Az egyenlőségből kiindulva a p-edik kritikus sebesség általános alakja:

$$v_{kr,p} = \frac{L\omega_{0p}}{\lambda_p}. \tag{4.390}$$

Az ebben a példában vizsgált tartó sajátkörfrekvenciáinak és frekvenciaparamétereinek behelyettesítésével:

$$v_{kr,p} = \frac{p\pi}{L}\sqrt{\frac{EI_y}{\mu}}. \tag{4.391}$$

A mozgó teher modellezésének következő szintje azt is figyelembe veszi, hogy a teher egy tömegből származik, így a szerkezeten levő koncentrált tömegként hatással van a sajátkörfrekvenciákra és a rezgésalakokra. Ez modálanalízis esetén idővel változó rezgésalakokat jelent, vagy a tartót valamilyen módon diszkretizálni kell.

Ezeken túlmenően két további hatás figyelembevételéről kell dönteni. A teher hatására elmozduló tartón a tömeg nem egyenes pályán mozog. A mozgás irányának változása gyorsulással jár, ami a teher helyén túl a nagyságának a változását is eredményezi. Végül a szerkezet és a tömeg kapcsolata csak a legegyszerűbb modellben közvetlen, a valóságban közelebb áll egy rugalmas kapcsolathoz, ami akár részlegessé is válhat, ha a kerék elválik a pályától. Utóbbi eset mindenképpen nemlinearitást eredményez, ezért nem tárgyaljuk.

4.2.3.6. Támaszmozgással gerjesztett gerenda

Egy- és többszabadságfokú rendszereknél korábban már láttuk, hogy a támaszmozgás gerjesztésként kezelhető, ahol a terhet a támasz(ok) mozgásából származtatjuk (lásd (2.348), (2.357), (3.332) és (3.359) egyenleteket).

Támaszmozgással gerjesztett gerenda esetén először azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor az összes támasz azonos fázisban mozog, aminek időfüggését a $z(t)$ függvény ad meg, más $q(x,t)$ teher pedig nem hat. Ilyenkor felbonthatjuk a gerenda elmozdulását az alábbiak szerint:

$$w(x,t) = i(x)z(t) + v(x,t), \tag{4.392}$$

ahol $i(x)$ az egységnyi z-értékhez tartozó támaszelmozdulásokból kialakuló statikus eltolódást leíró függvény. Az $i(x)$ függvény, bár elnevezésében hasonló a többszabadságfokú rendszereknél bevezetett $\underline{i}$ mutatóvektorhoz, különbözik tőle abban, hogy nem feltétlenül merevtest-szerű elmozdulásokat tartalmaz, azaz az igénybevételek számításához ezekre a tagokra is szükség lehet.

Statikailag határozott szerkezetek esetén a támaszok statikus elmozdulása nem okoz alakváltozásokat, erre mutat példát a 4.16.a) és b) ábra, ahol a kéttámaszú tartó mindkettő, illetve egyik támaszának elmozdulása után is egyenes marad a gerenda tengelye. Ilyankor tehát az igénybevételeket a $v(x,t)$ függvényből számolhatjuk. Statikailag határozatlan szerkezetek esetén a támaszok statikus elmozdulása lehet merevtest-szerű mozgásnak megfelelő, mint a 4.16.c) ábrán mutatott eset, amikor egyenes marad a gerenda és az igénybevételeket a $v(x,t)$ függvényből számolhatjuk. Olyan támaszelmozdulás is előfordulhat azonban, ami miatt alakváltozások alakulnak ki, mint például a 4.16.d) ábrán mutatott eset. Ilyenkor, bár a rezgésfeladat megoldása a $v(x,t)$ függvény meghatározását jelenti, az igénybevételeket a $w(x,t)$ függvényből számolhatjuk. Statikailag határozatlan szerkezetek esetén tehát nem tudjuk szemléletből felvenni az $i(x)$ függvényt, azt az időfüggéstől megfosztott, azaz az

$$EI_y i''''(x) = 0. \tag{4.393}$$

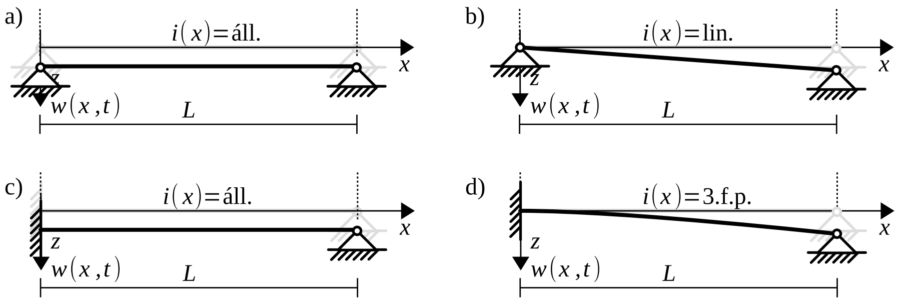
alakú differenciálegyenlet megoldásaként kaphatjuk meg.

A (4.392) szerint felbontott elmozdulásfüggvényt helyettesítsük be a (4.182) egyenletbe:

$$EI_y \left(i''''(x)z(t) + v''''(x,t)\right) + \mu \left(i(x)\ddot{z}(t) + \ddot{v}(x,t)\right) = 0. \tag{4.394}$$

A behelyettesített egyenletet átrendezve a $v(x,t)$ függvényre az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$EI_y v''''(x,t) + \mu\ddot{v}(x,t) = -EI_y i''''(x)z(t) - \mu i(x)\ddot{z}(t). \tag{4.395}$$



4.16. ábra. Hajlított gerenda támaszmozgása és $i(x)$ függvénye a) csuklós-csuklós megtámasztású gerenda a támaszok azonos mozgásával (merevtest-szerű), b) csuklós-csuklós megtámasztású gerenda egyik támaszok mozgásával (merevtest-szerű), a) befogott-csuklós megtámasztású gerenda a támaszok azonos mozgásával (merevtest-szerű), b) befogott-csuklós megtámasztású gerenda egyik támaszok mozgásával (nem merevtest-szerű).

Amennyiben statikailag határozott a szerkezet, vagy a támaszok elmozdulása merevtest-szerű, akkor az $i''''(x)$ függvény zérus, ilyenkor a teher tovább egyszerűsödik:

$$EI_y v''''(x,t) + \mu\ddot{v}(x,t) = -\mu i(x)\ddot{z}(t). \tag{4.396}$$

A (4.396) differenciálegyenlet megoldásánál a $v(x,t)$ függvényre ugyanolyan jellegű peremfeltételeket írunk elő, mint a $w(x,t)$-re, de mivel a támaszok mozgását az $i(x)z(t)$ szorzat tartalmazza, ezért $v(x,t)$-re az összes peremfeltétel homogén peremfeltételként írható.

4.2.12. Példa (Csuklós-csuklós gerenda támaszrezgése). *Határozzuk meg egy csuklós-csuklós megtámasztású gerenda (lásd 4.16.a) ábra) állandósult rezgését, ha a két támasz azonos fázisban rezeg a $z(t) = z_0\cos(\omega t)$ függvény szerint.*

Megoldás

A támaszok egységnyi statikus elmozdulását az $i(x) = 1$ függvénnyel tudjuk leírni. Ennek az x szerinti negyedik deriváltja zérus, ezt felhasználva a (4.396) egyenlet az alábbi alakra hozható:

$$EI_y v''''(x,t) + \mu\ddot{v}(x,t) = \mu\omega^2 z_0\cos(\omega t). \tag{4.397}$$

Ez az egyenlet matematikailag azonos a 4.2.7. és a 4.2.8. példákban bemutatott feladatokkal, tehát a megoldást is átvehetjük onnan a $q_0 = \mu\omega^2 z_0$ behelyettesítéssel. A differenciálegyenlet közvetlen megoldása esetén (4.336)-ból a megoldás:

$$v(x,t) = \frac{z_0}{2}\left[\cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + \frac{\sinh(\lambda)}{\sin(\lambda)\sinh(\lambda)}\sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + \cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{(\sin(\lambda) - \sin(\lambda)\cos(\lambda) - \sin(\lambda)\cosh(\lambda))}{\sin(\lambda)\sinh(\lambda)}\sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right)\right]\cos(\omega t). \tag{4.398}$$

Modálanalízis használata esetén pedig (4.351)-ből:

$$v(x,t) = \sum_{rp.tlan} \frac{4\mu\omega^2 z_0 L^4}{r^5\pi^5 EI}(-1)^{\frac{r-1}{2}}\mu_r \cos\left(\frac{r\pi}{L}x\right)\cos(\omega t). \tag{4.399}$$

A fenti $v(x,t)$ függvények az $i(x)$-hez, így a támaszokhoz képesti elmozdulásokat tartalmazzák, az igénybevételeket a megfelelő deriváltakkal lehet számolni:

$$M(x,t) = -EI_y v''(x,t), \qquad V(x,t) = -EI_y v'''(x,t). \tag{4.400}$$

4.2.13. Példa (Csuklós-csuklós gerenda egy támasz rezeg)**.** *Határozzuk meg a 4.16.b) ábra szerinti csuklós-csuklós megtámasztású gerenda állandósult rezgését, ha a bal oldali támasz a $z(t) = z_0\cos(\omega t)$ függvény szerint rezeg.*

Megoldás

A támaszok egységnyi statikus elmozdulását az $i(x) = x/L$ függvénnyel tudjuk leírni. Ennek az x szerinti negyedik deriváltja zérus, ezt felhasználva a (4.396) egyenlet az alábbi alakra hozható:

$$EI_y v''''(x,t) + \mu\ddot{v}(x,t) = \mu\omega^2 z_0 \frac{x}{L}\cos(\omega t). \tag{4.401}$$

A megoldást a differenciálegyenlet közvetlen megoldásával mutatjuk be (lásd 4.2.3.1. alpontot). Először, a megoldást $v(x,t) = \hat{v}(x)\cos(\omega t)$ alakban keresve, a (4.401) differenciálegyenletbe történő behelyettesítés és $\cos(\omega t)$-vel való egyszerűsítés után (4.323) aktualizált alakja az alábbi lesz:

$$EI_y\hat{v}''''(x) - \mu\omega^2\hat{v}(x) = \mu\omega^2 z_0\frac{x}{L}. \tag{4.402}$$

Ennek egy partikuláris megoldása a

$$\hat{v}_p(x) = -z_0\frac{x}{L} \tag{4.403}$$

lesz, míg az

$$EI_y\hat{v}''''(x) - \mu\omega^2\hat{v}(x) = 0 \tag{4.404}$$

kiegészítő differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\hat{v}_0(x) = A\cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + B\sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C\cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + D\sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right), \tag{4.405}$$

ahol

$$\frac{EI\lambda^4}{L^4} = \mu\omega^2 \qquad \rightarrow \qquad \lambda = \sqrt[4]{\frac{\mu L^4\omega^2}{EI}}. \tag{4.406}$$

A peremfeltételeket a gerenda kezdő- és végpontjára kell felírnunk. A csuklós megtámasztások miatt mindkét helyen zérus az eltolódás és a hajlítónyomaték. Az x-tengely kezdőpontja a gerenda kezdőpontjában van, így

$$\begin{aligned} v(0,t) &= 0, \qquad v(L,t) = 0, \\ -EI_y v''(0,t) &= 0, \qquad -EI_y v''(L,t) = 0, \end{aligned} \tag{4.407}$$

amiből a rezgésalak $\hat{v}(x)$ függvényére az alábbi négy feltétel adódik:

$$\hat{v}(0) = 0, \qquad \hat{v}(L) = 0, \qquad \hat{v}''(0) = 0, \qquad \hat{v}''(L) = 0. \tag{4.408}$$

Ezekbe behelyettesítve a $\hat{v}_p(x) + \hat{v}_0(x)$ általános megoldást azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} +A\cos(0) + B\sin(0) + C\cosh(0) + D\sinh(0) &= 0, \\ -A\cos(0) - B\sin(0) + C\cosh(0) + D\sinh(0) &= 0, \\ -z_0 + A\cos(\lambda) + B\sin(\lambda) + C\cosh(\lambda) + D\sinh(\lambda) &= 0, \\ -A\cos(\lambda) - B\sin(\lambda) + C\cosh(\lambda) + D\sinh(\lambda) &= 0. \end{aligned} \tag{4.409}$$

(A második és negyedik egyenletet a λ^2/L^2-tel egyszerűsítettük.) A fenti négy egyenletet mátrixos alakban is felírhatjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\lambda) & \sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \\ -\cos(\lambda) & -\sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.410}$$

Az első két egyenletből:

$$A = C = 0, \tag{4.411}$$

a maradék két egyenlet pedig:

$$\begin{bmatrix} \sin(\lambda) & \sinh(\lambda) \\ -\sin(\lambda) & \sinh(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.412}$$

aminek a megoldásaként:

$$\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_0}{2\sin(\lambda)} \\ \frac{z_0}{2\sinh(\lambda)} \end{bmatrix}. \tag{4.413}$$

Fentiekből összerakva a rezgést:

$$v(x,t) = z_0 \left[-\frac{x}{L} + \frac{1}{2\sin(\lambda)} \sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + \frac{1}{2\sinh(\lambda)} \sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) \right] \cos(\omega t). \tag{4.414}$$

4.2.3.7. Egy támasz harmonikus mozgásával gerjesztett rúd

A támaszrezgés kezelésének második kezelési módjában egyetlen támasz elmozdulását is kezelhetjük. Legyen az L hosszúságú befogott-befogott rúd egyik vége az origóban, a másik végét pedig harmonikusan mozgassuk egy eltolódással, ezzel létrehozva egy gerjesztést. A mozgás differenciálegyenlete

$$EI_y w''''(x,t) + \mu \ddot{w}(x,t) = 0, \tag{4.415}$$

hiszen nincs a hossz mentén megoszló erő. Keressük az állandósult rezgés során kialakuló rezgésalakot.

Ha a rúd végét mozgatjuk, akkor a négy peremfeltétel az alábbi:

$$\begin{aligned} w(0,t) &= 0, \qquad & w(L,t) &= 1 \cdot \cos(\omega t), \\ -w'(0,t) &= 0, \qquad & -w'(L,t) &= 0. \end{aligned} \tag{4.416}$$

Keressük az elmozdulásfüggvényt is időben harmonikus alakkal:

$$w(x,t) = \hat{w}(x)\cos(\omega t). \tag{4.417}$$

Ennek deriváltjait behelyettesítve a mozgás differenciálegyenletébe azt kapjuk, hogy:

$$EI_y \hat{w}''''(x)\cos(\omega t) - \mu\omega^2 \hat{w}(x)\cos(\omega t) = 0, \tag{4.418}$$

vagy a $\cos(\omega t)$-vel való leosztás után:

$$EI_y \hat{w}''''(x) - \mu\omega^2 \hat{w}(x) = 0. \tag{4.419}$$

Az $\hat{w}(x)$ rezgésalak-függvénynek tehát a fenti homogén differenciálegyenletet kell kielégítenie. Ez azonos a szabadrezgés rezgésalakjaira levezetett differenciálegyenlettel, így az általános megoldása is azonos alakban írható:

$$\hat{w}(x) = A\cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + B\sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + C\cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + D\sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right), \tag{4.420}$$

ahol a λ frekvenciaparaméter értéke most

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \mu L^4}{EI_y}}. \tag{4.421}$$

Az A, B, C és D paramétereket a peremfeltételekből számolhatjuk. Helyettesítsük be a feltételezett alakot a peremfeltételekbe:

$$\begin{aligned} \hat{w}(0)\cos(\omega t) &= 0, \qquad & \hat{w}(L)\cos(\omega t) &= 1 \cdot \cos(\omega t), \\ -\hat{w}'(0)\cos(\omega t) &= 0, \qquad & -\hat{w}'(L)\cos(\omega t) &= 0. \end{aligned} \tag{4.422}$$

A négy feltétel csak akkor teljesül bármilyen $\cos(\omega t)$-re, ha:

$$\hat{w}(0) = 0, \qquad \hat{w}(L) = 1, \qquad -\hat{w}'(0) = 0, \qquad -\hat{w}'(L) = 0. \tag{4.423}$$

A rezgésalak általános megoldását behelyettesítve a négy peremfeltételbe az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} A\cos(0) + B\sin(0) + C\cosh(0) + D\sinh(0) &= 0, \\ -A\sin(0) - B\cos(0) - C\sinh(0) - D\cosh(0) &= 0, \\ A\cos(\lambda) + B\sin(\lambda) + C\cosh(\lambda) + D\sinh(\lambda) &= 1, \\ A\sin(\lambda) - B\cos(\lambda) - C\sinh(\lambda) - D\cosh(\lambda) &= 0, \end{aligned} \tag{4.424}$$

(A második és a negyedik egyenletnél egyszerűsítettünk λ/L-lel, de itt kiemeljük, hogy ha ezekben a sorokban nem 0 lenne a job oldalon, akkor azt az értéket is le kell osztani ugyanannyival.)

Az egyenletet átírhatjuk mátrixalakra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ \cos(\lambda) & \sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \\ \sin(\lambda) & -\cos(\lambda) & -\sinh(\lambda) & -\cosh(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.425}$$

A bal oldali együtthatómátrix most a gerjesztés körfrekvenciája miatt ismert frekvenciamátrix. Invertálásával megoldható az egyenlet, majd azt felhasználva felírható a rezgésalak.

$$\begin{aligned} \hat{w}(x) = {} & \frac{\cos(\lambda) - \cosh(\lambda)}{2 - 2\cos(\lambda)\cosh(\lambda)} \cos\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + \frac{\sin(\lambda) + \sinh(\lambda)}{2 - 2\cos(\lambda)\cosh(\lambda)} \sin\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + \\ & + \frac{\cosh(\lambda) - \cos(\lambda)}{2 - 2\cos(\lambda)\cosh(\lambda)} \cosh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) + \frac{-\sin(\lambda) - \sinh(\lambda)}{2 - 2\cos(\lambda)\cosh(\lambda)} \sinh\left(\frac{\lambda}{L}x\right) \end{aligned} \tag{4.426}$$

A későbbiekben szükségünk lesz majd azokra a dinamikus alakfüggvényekre, amiket akkor kapunk, ha a befogott-befogott gerenda valamelyik kényszerét egységnyi amplitúdóval egy adott körfrekvenciával mozgatjuk, míg a többit mozdulatlanul tartjuk. Ezeket az alakokat is a fenti lépéseket követve tudjuk meghatározni, egyedül a (4.425) egyenlet jobb oldalán kell egy másik vektort felvenni. Az $\underline{\underline{F}}$ mátrix inverze

$$\underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{1}{2 - 2\cos(\lambda)\cosh(\lambda)} \begin{bmatrix} \sin(\lambda)\sinh(\lambda) - \cos(\lambda)\cosh(\lambda) + 1 & \cos(\lambda)\sinh(\lambda) - \cosh(\lambda)\sin(\lambda) & \cos(\lambda) - \cosh(\lambda) & \sin(\lambda) - \sinh(\lambda) \\ -\cos(\lambda)\sinh(\lambda) - \cosh(\lambda)\sin(\lambda) & \cos(\lambda)\cosh(\lambda) + \sin(\lambda)\sinh(\lambda) - 1 & \sin(\lambda) + \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) - \cos(\lambda) \\ 1 - \cos(\lambda)\cosh(\lambda) - \sin(\lambda)\sinh(\lambda) & \cosh(\lambda)\sin(\lambda) - \cos(\lambda)\sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) - \cos(\lambda) & \sinh(\lambda) - \sin(\lambda) \\ \cos(\lambda)\sinh(\lambda) + \cosh(\lambda)\sin(\lambda) & \cos(\lambda)\cosh(\lambda) - \sin(\lambda)\sinh(\lambda) - 1 & -\sin(\lambda) - \sinh(\lambda) & \cos(\lambda) - \cosh(\lambda) \end{bmatrix} \tag{4.427}$$

legfeljebb egy skalárszorzó eltéréssel oszloponként tartalmazza ezeknek az alakfüggvényeknek az A, B, C, D együtthatóit. Fenti mátrix első oszlopa a kezdőpont egységnyi amplitúdójú eltolódásához tartozó alak (4.420) szerinti együtthatóit adja meg, a harmadik oszlop a (4.426) képlettel megadott függvény együtthatóit tartalmazza. Az inverz mátrix második oszlopa a kezdőpont egységnyi amplitúdójú elfordulásához tartozó alak (4.420) szerinti együtthatóinak λ/L-szeres értékeit adja meg, hiszen az egyenlet jobb oldalán ekkor az 1 helyett L/λ szerepelne a (4.424) egyenletek utáni megjegyzésnek megfelelően. Végül a negyedik oszlop a végpont egységnyi amplitúdójú elfordulásához tartozó alak (4.420) szerinti együtthatóinak λ/L-szeres értékeit adja meg.

5. fejezet

Rúdszerkezetek mechanikai rezgései

5.1. Rúdelem merevségi és tömegmátrixa

A folytonos gerenda rezgésének ismeretében nézzük meg ismételten, hogyan lehet egy gerendaelem tömegmátrixát meghatározni, de ezúttal keressünk olyan, pontos megoldást, ami a kontinuumrezgéssel igazolható. A tárgyalásmódot olyan jelölésekkel fogjuk végigvezetni, hogy egyéb diszkretizált rendszerekben, így a végeselemmódszerrel való számítás során is alkalmazhatók legyenek az eredmények.

A módszerünk lényege az, hogy a harmonikus gerjesztésre adott pontos megoldásból az állandósult rezgés során meghatározzuk a gerendaelem dinamikus merevségi mátrixát a mátrix fizikai jelentéséből, ami alapján kiolvashatjuk a pontos tömegmátrixot és annak lehetséges közelítését arra az esetre, ha a gerjesztés nem harmonikus volta miatt nem használható az állandósult rezgés megoldása. A dinamikus merevségi mátrix számításához is egy-egy erőt kell meghatározni, ezért előzetesen a statikus merevségi mátrixon megmutatjuk, hogyan használható erre a célra a virtuális elmozdulások tétele. Végül a tárgyalásmód és az eredmények végeselemmódszerre történő kiterjesztésével megmutatjuk, hogy az ottani mechanikai rezgések is visszavezethetők többszabadságfokú rendszerek rezgéseire.

A vizsgált szerkezetünket síkbeli rúdszerkezetként definiáljuk, ahogy korábban a 3.4.1. szakaszban is tettük. Az egyes rúdelemek a szerkezet csomópontjaihoz kapcsolódnak mereven, a csomópontok szabadsági fokai a (3.474) szerint egy vízszintes és egy függőleges eltolódás, valamint egy elfordulás. Mint korábban, a 3.25. ábrán mutattuk, a szabadságfokok ilyen felvétele esetén csak a szabadságfokokhoz kapcsolódó elemek deformálódnak a szabadságfok elmozdulásakor, így a merevségi mátrixot az egyes elemek elemi merevségi mátrixának kompilálásával állíthatjuk elő.

Ebben a fejezetben elsősorban a mátrixok lokális koordinátarendszerbeli előállítását mutatjuk be. A globális koordinátarendszerbe forgatás, illetve a kompilálás a 3.4.4. szakaszban már látott módon történik, de ezeket most a műveleteket (ugyanilyen formában) nem csak a statikus merevségi mátrixszal és a tömegmátrixszal végezhetjük el, hanem a dinamikus merevségi mátrixszal is.

5.2. Statikus merevségi mátrix

A jk-rúdelem merevségi mátrixának számítását először most is lokális koordinátarendszerben végezzük el, így a rúdelem elmozdulásvektora a (3.477) képletnek megfelelően

$$\underline{u}_{jk} = \begin{bmatrix} u_{jx} \\ u_{jy} \\ \varphi_{jz} \\ u_{ky} \\ u_{ky} \\ \varphi_{kz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}_j \\ \underline{u}_k \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Ezeket az elmozdulási szabadságfokokat mutatjuk az 5.1.a) ábrán.

A 3.4.2.2. alpontban már láttuk a merevségi mátrix fizikai jelentését. Egy-egy oszlop mindig egy-egy szabadsági foknak felel meg. Az adott szabadsági fokot egységnyivel el kell mozdítani, miközben a többi szabadságfok elmozdulását megakadályozzuk. Ebben az egyensúlyi helyzetben az egyes szabadságfokokra ható erőket kell a merevségi mátrix adott oszlopában felsorolnunk.

5.2.1. Statikus alakfüggvények

Az egyes mátrix-oszlopokhoz tartozó elmozdulásfüggvények jelölésére vezessük be a következő jelölésmódot. Az u és v függvények jelöljék rendre, hogy a tengelyirányú, vagy a merőleges eltolódások függvényéről van szó. A függvény első indexe jelöli, hogy melyik csomóponthoz tartozik az a szabadságfok, aminek egységnyi az elmozdulása: a jk-rúdelem kezdőpontjához tartozó első három szabadságfok esetén j, a végponthoz tartozó három szabadságfok esetén k. A függvény második indexe a kimozdított szabadságfok elmozdulásának jellegét mutatja: x és y jelöli rendre a hosszirányú és a merőleges irányú eltolódást, míg φ jelöli az elfordulást.

Az 5.1.b-g) ábrákon mutatjuk az egyes szabadságfokokhoz tartozó nemzérus elmozdulásfüggvényeket. A kis elmozdulások elve miatt a tengelyirányú és a merőleges elmozdulások elkülönülnek, ezért szabadságfok tengelyirányú elmozdulásából nem keletkezik merőleges elmozdulás (azaz $v_{jx}(x) = v_{kx}(x) = 0$), és szabadságfok merőleges elmozdulásából nem keletkezik tengelyirányú elmozdulás (azaz $u_{jy}(x) = u_{j\varphi}(x) = u_{ky}(x) = u_{k\varphi}(x) = 0$).

A statikus alakfüggvények a statikus

$$EAu''(x) = 0, \quad \text{és} \quad EIv''''(x) = 0 \tag{5.2}$$

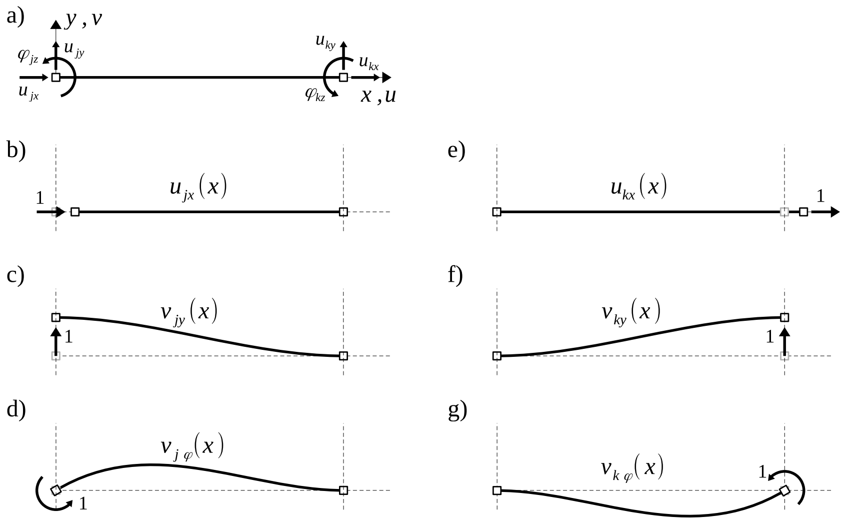
differenciálegyenleteknek az egy-egy inhomogén peremfeltételt kielégítő megoldásai. Ezek a szabadságfokok sorrendjében:

$$u(0) = 1, v(0) = 1, v'(0) = 1, u(l_{jk}) = 1, v(l_{jk}) = 1, v'(l_{jk}) = 1. \tag{5.3}$$

A fenti hat feltételből természetesen egy-egy szabadságfokhoz csak egy feltétel 1, a többi jobb oldala 0. Az (5.2) differenciálegyenletek általános megoldásai rendre első-, illetve harmadfokú polinomok:

$$u(x) = b_0 + b_1 x, \qquad v(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3, \tag{5.4}$$

ahol a b_0, b_1, illetve c_0, c_1, c_2, c_3 paramétereket a peremfeltételekből számolhatjuk.



5.1. ábra. Rúdelem az xy-síkban: a) szabadságfokok, b-g) az egyes szabadságfokok egységnyi elmozdításakor kialakuló statikus alakok.

5.2.1. Példa (Statikus alakfüggvény számítása). *Határozzuk meg az 5.1.b) ábrán látható, a jk-rúdelem első szabadságfokához tartozó statikus alakfüggvényt!*

Megoldás

Az első szabadságfok a kezdőpont (j) hosszirányú (x) elmozdulása, amiből hosszirányú (u) elmozdulások keletkeznek, azaz az $u_{jx}(x)$ függvényt keressük. Ennek általános alakja (5.4) első függvénye szerint egy lineáris függvény, aminek (5.3) első feltételét kell kielégíteni, míg a negyedik feltételt 0 jobb oldallal kell kielégíteni:

$$u_{jx}(0) = 1, \qquad u_{jx}(l_{jk}) = 0. \tag{5.5}$$

Az $u(x)$ függvény (5.4) szerinti feltételezett alakját behelyettesítve:

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 0 &= 1, \\ b_0 + b_1 l_{jk} &= 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

A kapott egyenletrendszer első egyenletéből $b_0 = 1$, majd ezt felhasználva $b_1 = -\frac{1}{l_{jk}}$, azaz a keresett statikus alakfüggvény:

$$\boxed{u_{jx}(x) = 1 - \frac{x}{l_{jk}}} \tag{5.7}$$

Megjegyzés: a változók megfeleltetése esetén ez (3.482) első ($N_1(x)$) függvénye.

5.2.2. Példa (Statikus alakfüggvény számítása). *Határozzuk meg az 5.1.f) ábrán látható, a jk-rúdelem ötödik szabadságfokához tartozó statikus alakfüggvényt!*

Megoldás
Az ötödik szabadságfok a végpont (k) merőleges irányú (y) elmozdulása, amiből merőleges irányú (v) elmozdulások keletkeznek, azaz a $v_{ky}(x)$ függvényt keressük. Ennek általános alakja (5.4) második függvénye szerint egy harmadfokú függvény, aminek (5.3) ötödik feltételét kell kielégíteni, míg a második, harmadik és hatodik feltételt 0 jobb oldallal kell kielégíteni:

$$v(0) = 0, v'(0) = 0, v(l_{jk}) = 1, v'(l_{jk}) = 0. \tag{5.8}$$

A $v(x)$ függvény (5.4) szerinti feltételezett alakját és annak

$$v'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 \tag{5.9}$$

deriváltját behelyettesítve:

$$\begin{gathered} c_0 + c_1 0 + c_2 0^2 + c_3 0^3 = 0, \\ c_1 + 2c_2 0 + 3c_3 0^2 = 0, \\ c_0 + c_1 l_{jk} + c_2 l_{jk}^2 + c_3 l_{jk}^3 = 1, \\ .c_1 + 2c_2 l_{jk} + 3c_3 l_{jk}^2 = 0. \end{gathered} \tag{5.10}$$

A kapott egyenletrendszer első két egyenletéből $c_0 = c_1 = 0$, majd ezt felhasználva:

$$\begin{gathered} c_2 l_{jk}^2 + c_3 l_{jk}^3 = 1, \\ .2c_2 l_{jk} + 3c_3 l_{jk}^2 = 0. \end{gathered} \tag{5.11}$$

Mátrixos jelöléssel megoldva:

$$\begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{jk}^2 & l_{jk}^3 \\ 2l_{jk} & 3l_{jk}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_{jk}^4(3-2)} \begin{bmatrix} 3l_{jk}^2 & -l_{jk}^3 \\ -2l_{jk} & l_{jk}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{l_{jk}^2} \\ -\frac{2}{l_{jk}^3} \end{bmatrix}, \tag{5.12}$$

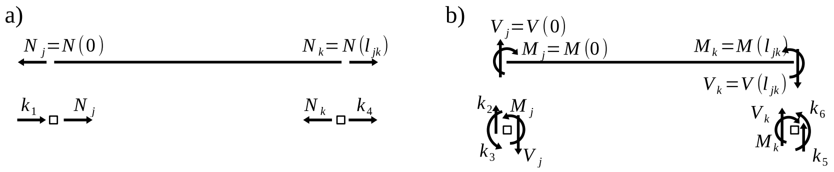
azaz a keresett statikus alakfüggvény:

$$\boxed{v_{ky}(x) = 3\frac{x^2}{l_{jk}^2} - 2\frac{x^3}{l_{jk}^3}} \tag{5.13}$$

Megjegyzés: a változók megfeleltetése esetén ez (3.484) $N_5(x)$ függvénye.

5.2.2. Rúdvégi erők

A statikus alakfüggvények ismeretében tudjuk meghatározni az egyensúlyi alakot fenntartó csomóponti erőket. A rúdvégi erőket az igénybevételekből tudjuk meghatározni. Ezek ellentettje hat a csomópontokra, melyekkel a merevségi mátrix vizsgált oszlopában szereplő erők tartanak egyensúlyt. Ezeket az erőket mutatja az 5.2. ábra: az a) ábrán a rúdtengelyirányú normálerőkből a rúdvégekre és a hatás-ellenhatás alapján a csomópontokra ható erőket, továbbá a csomópontra ható ellensúlyozó erőket, amik az első és a negyedik szabadságfokra hatnak; a b) ábrán a rúdtengelyre merőleges irányú nyíróerőkből, valamint a hajlítónyomatékokból a rúdvégekre és a hatás-ellenhatás alapján a csomópontokra ható erőket és nyomatékokat, továbbá a csomópontokra ható ellensúlyozó



5.2. ábra. Rúdelem rúdvégi erőinek és a merevségi mátrix egy oszlopának egyes soraiban szereplő k_i elemek kapcsolata. a) Normálerőhöz tartozó, rúdtengelyirányú erők. b) Hajlításhoz kapcsolódó erők és nyomatékok.

erőket és nyomatékokat, amik a második, harmadik, ötödik és hatodik szabadságfokra hatnak. A csomópontok egyensúlyából kiolvasható, hogy a $\underline{\underline{K}}$ mátrix vizsgált oszlopának elemei:

$$\begin{gathered} k_1 = -N_j, \quad k_4 = N_k, \\ k_2 = V_j, \quad k_3 = -M_j, \quad k_5 = -V_k, \quad k_6 = M_k. \end{gathered} \tag{5.14}$$

A hatás-ellenhatás, majd az egyensúlyozás miatti kétszeri ellentett számítás miatt a pozitív igénybevételből származó elemek előjelét a pozitív igénybevételnek a koordinátarendszerhez való viszonyításából is megkaphatjuk.

Az igénybevételeket a statikus alakfüggvényekből a következőképpen számolhatjuk. A normálerő az EA normálmerevség és az ε fajlagos nyúlás szorzata. Utóbbi a tengelyirányú elmozdulás első deriváltja, azaz:

$$N(x) = EAu'(x). \tag{5.15}$$

A hajlítónyomaték az EI hajlítómerevség és a κ görbület szorzata. Utóbbi a tengelyre merőleges elmozdulás második deriváltja, a nyíróerő pedig a hajlítónyomaték első deriváltja, azaz:

$$M(x) = EIv''(x), \qquad V(x) = EIv'''(x). \tag{5.16}$$

A merevségi mátrix egy adott oszlopát tehát úgy kaphatjuk meg, hogy az oszlophoz tartozó szabadságfoknak megfelelő statikus alakfüggvény deriváltjaiból (5.15) és (5.16) alapján kiszámítjuk a rúdvégi igénybevételeket, majd azokat (5.14) előjelszabálya szerint felsoroljuk a mátrix adott oszlopában.

5.2.3. Példa (Merevségi mátrix egy oszlopa)**.** *Határozzuk meg az 5.1.a) ábrán látható jk-rúdelem statikus merevségi mátrixának hatodik oszlopát!*

Megoldás
A hatodik szabadságfokához tartozó statikus alakfüggvény az 5.1.g) ábrán látható, amit az 5.2.2. példában látott módon lehet meghatározni, csak (5.10) egyenleteiben az utolsó jobb oldala 1, a többié 0. Az eredmény:

$$\boxed{v_{k\varphi}(x) = -\frac{x^2}{l_{jk}} + \frac{x^3}{l_{jk}^2}} \tag{5.17}$$

A hosszirányú eltolódások függvénye $u_{k\varphi} = 0$. Az alakfüggvények számunkra releváns deriváltjai:

$$u'_{k\varphi}(x) = 0, \qquad v''_{k\varphi}(x) = -\frac{2}{l_{jk}} + 6\frac{x}{l_{jk}^2}, \qquad v'''_{k\varphi}(x) = \frac{6}{l_{jk}^2}. \tag{5.18}$$

Ezekből a rúdvégi igénybevételek az $x = 0$, ill. $x = l_{jk}$ behelyettesítéssel:

$$\begin{aligned} N_{jk\varphi} &= 0, \quad V_{jk\varphi} = \tfrac{6EI}{l_{jk}^2}, \quad M_{jk\varphi} = -\tfrac{2EI}{l_{jk}}, \\ N_{kk\varphi} &= 0, \quad V_{kk\varphi} = \tfrac{6EI}{l_{jk}^2}, \quad M_{kk\varphi} = \tfrac{4EI}{l_{jk}}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Megjegyzés: a rúdvégi erők indexelésénél az első index szokás szerint a helyet adja meg (kezdő- vagy végpont), a további indexek pedig az okot (melyik csomópont, milyen elmozdulása). Az igénybevételekből (5.14) egyenleteinek megfelelően:

$$\begin{matrix} K_{16} = 0, & K_{46} = 0, \\ K_{26} = \frac{6EI}{l_{jk}^2}, K_{36} = -\frac{2EI}{l_{jk}}, & K_{56} = -\frac{6EI}{l_{jk}^2}, K_{66} = \frac{4EI}{l_{jk}}. \end{matrix} \tag{5.20}$$

Az elemeknél most már ismerjük az oszlopindexet, ezért lett a második indexek értéke 6. Fentiekből végül a hatodik oszlop:

$$\underline{k}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6EI}{l_{jk}^2} \\ \frac{2EI}{l_{jk}} \\ 0 \\ -\frac{6EI}{l_{jk}^2} \\ \frac{4EI}{l_{jk}} \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

Az érték természetesen azonos a korábban, például a (3.478) képletben látottal.

Fenti eljárással tehát előállítható a statikus merevségi mátrix, de a módszer általánosítása dinamikus merevségi mátrixra, és azon belül a tömegmátrixból származó tag elkülönítésére lényegesen nehezebb lenne ezért nézzünk meg egy másik lehetőséget a mátrix elemeinek előállítására.

5.2.3. Virtuális elmozdulások tétele

A virtuális elmozdulások tétele kimondja, hogy egy egyensúlyi erőrendszer *bármely* virtuális elmozdulásrendszeren végett munkája zérus. A tételt elsősorban külső, vagy belső reakciók (igénybevételek) meghatározására használhatjuk. A használat szempontjából a hangsúly az elmozdulásrendszer bármilyen voltán van: olyan elmozdulásrendszert célszerű felvennünk, amelyen a keresett erő munkát végez, míg a többi ismeretlen erő nem, ezáltal a felírt munkában csak a keresett erő az ismeretlen, azaz egyismeretlenes egyenletet kell megoldanunk.

Esetünkben az történik, hogy az 5.1.b)-g) ábra szerinti elmozdult alakon kell az 5.2. ábrának megfelelő rúdvégi erőket meghatározni. Ha egyszerre csak egy rúdvégi igénybevételt keresünk, akkor az ahhoz felveendő virtuális elmozdulásrendszernek olyannak kell lennie, hogy az összes többi rúdvégi igénybevétel

α, β	1	2	3	4	5	6
csomópont	j	j	j	k	k	k
zérus elmozdulásfv. jele	v	u	u	v	u	u
nemzérus elmozdulásfv. jele	u	v	v	u	v	v
elmozdulásfv. indexe	jx	jy	$j\varphi$	kx	ky	$k\varphi$

5.1. táblázat. A jk-rúdelem merevségi mátrixának $K_{\alpha\beta}$ eleméhez tartozó mennyiségek.

munkája zérus legyen, azaz azoknak a szabadságfokoknak az elmozdulása nulla legyen, míg a keresett igénybevétellel munkakompatibilis szabadságfok elmozdulása nemzérus, célszerűen 1 legyen. Könnyen belátható, hogy az 5.1.b)-g) ábrán látható elmozdulásfüggvények pontosan megfelelnek a fenti feltételeknek.

Nézzük meg, milyen lépésekkel tudjuk a statikus merevségi mátrix $K_{\alpha\beta}$ elemét kiszámítani. Az α és β értékek rendre a sor- és oszlopindexet jelölik, ami mindig egy-egy szabadságfoknak felel meg, ami egyben meghatározza az egyensúlyi alakot megadó függvény jellegét és korábban már bevezetett indexelését. Az 5.1. táblázatban felsoroljuk, hogy a különböző indexek melyik csomóponthoz tartoznak, melyik elmozdulásfüggvény zérus, illetve nemzérus, és mi az elmozdulásfüggvény indexe.

A mátrix indexelésének sor-oszlop sorrendje egyben a *hely–ok* sorrendnek is megfelel, azaz a keresett elem a β által meghatározott statikus alakon kialakuló rúdvégi igénybevételek közül az α által meghatározott értéknek kell lennie, így az α-nak megfelelő statikus alakot kell virtuális elmozdulásrendszernek felvenni.

Az erőrendszer és a virtuális elmozdulásrendszer ismeretében kell felírnunk a statikus erőrendszer statikus elmozdulásokon végzett virtuális munkáját. (Az ss index az erőrendszerre és az elmozdulásrendszerre fog utalni.) A teljes munka a külső és a belső munka összege:

$$\delta W_{ss} = \delta W_{ss}^k + \delta W_{ss}^b = 0. \tag{5.22}$$

A külső munkát egyedül a keresett Q_β igénybevétel végzi a vele munkakompatibilis elmozduláson:

$$\delta W_{ss}^k = \pm Q_{\alpha\beta} \cdot 1, \tag{5.23}$$

ahol az előjel N_j, M_j, V_k esetén negatív, V_j, N_k, M_k esetén pozitív (5.14) összefüggéseinek megfelelően.

A belső munkát a normálerő, illetve a hajlítónyomaték végzi a fajlagos nyúláson, illetve a görbületen, ezek szorzatát a rúdhossz mentén integrálni kell. A belső munka jellegzetessége, hogy egy negatív előjelet kell használni, így:

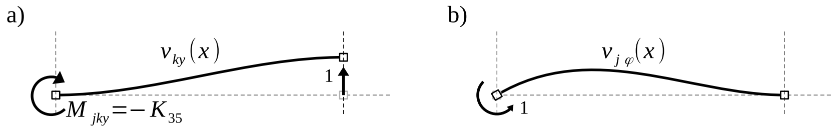
$$\delta W_{ss}^b = -\int_0^{l_{jk}} (N_\beta(x)u'_\alpha(x) + M_\beta(x)v''_\alpha(x))\, dx, \tag{5.24}$$

ami (5.15) és (5.16) felhasználásával:

$$\delta W_{ss}^b = -\int_0^{l_{jk}} \left(EAu'_\beta(x)u'_\alpha(x) + EIv''_\beta(x)v''_\alpha(x)\right) dx. \tag{5.25}$$

A külső és belső munkák összegéből:

$$\delta W_{ss} = 0 = \pm Q_{\alpha\beta} \cdot 1 - \int_0^{l_{jk}} \left(EAu'_\beta(x)u'_\alpha(x) + EIv''_\beta(x)v''_\alpha(x)\right) dx \tag{5.26}$$



5.3. ábra. Rúdelem K_{35} elemének számításához használt a) statikus alakfüggvény, b) virtuális elmozdulás.

Az egyenletet megoldhatjuk az (5.14) szerinti előjeles belső erőre, ami pontosan a keresett $K_{\alpha\beta}$:

$$\boxed{K_{\alpha\beta} = \pm Q_{\alpha\beta} = \int_0^{l_{jk}} EAu'_\beta(x)u'_\alpha(x)dx + \int_0^{l_{jk}} EIv''_\beta(x)v''_\alpha(x)dx} \qquad (5.27)$$

5.2.4. Példa (Merevségi mátrix egy eleme)**.** *Határozzuk meg az 5.1.a) ábrán látható jk-rúdelem statikus merevségi mátrixának K_{35} elemét!*

Megoldás
Az 5-ös index a merevségi mátrix ötödik oszlopára utal, és az 5.1. táblázat alapján azt jelenti, hogy a $v_{ky}(x)$ statikus alakfüggvény rúdvégi igénybevételeiből kell a 3-as index miatt a harmadikat felhasználni. Azaz, a végpont egységnyi eltolódása esetén a kezdőpontra működtetendő nyomatékot akarjuk meghatározni. Az ehhez szükséges virtuális elmozdulásrendszer ugyancsak az 5.1. táblázat alapján a $v_{j\varphi}(x)$ függvény lesz.

A fenti két függvényt, valamint a kiszámítandó igénybevételt (a kezdőpont hajlítónyomatékát) ábrázoltuk az 5.3. ábrán: az a) ábra az egyensúlyi, a b) ábra a virtuális rendszer. Az ábrák alapján a virtuális munka:

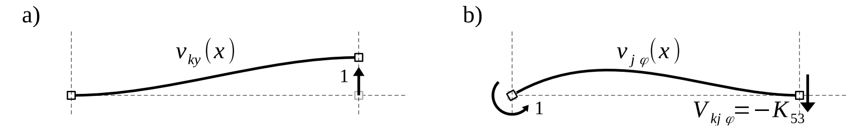
$$\delta W_{ss} = -M_{jky} \cdot 1 - \int_0^{l_{jk}} M_{ky}(x)\kappa_{j\varphi}(x)dx =$$
$$- M_{jky} - \int_0^{l_{jk}} EIv''_{ky}(x)v''_{j\varphi}(x)dx = 0. \qquad (5.28)$$

Ezt megoldva $-M_{jky}$-ra:

$$K_{35} = -M_{jky} = \int_0^{l_{jk}} EIv''_{ky}(x)v''_{j\varphi}(x)dx. \qquad (5.29)$$

A merevségi mátrix elemeinek (5.27) szerinti képletében az α és β paraméterek felcserélése esetén az $u'_\beta(x)$ és $u'_\alpha(x)$, valamint a $v''_\beta(x)$ és $v''_\alpha(x)$ függvények páronkénti felcserélésével azonos képletet kapunk, amiből $K_{\beta\alpha} = K_{\alpha\beta}$. Ez egyben a merevségi mátrixnak a szimmetriáját jelenti azaz $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^T$, amit ezzel bizonyítottunk.

5.2.5. Példa (Merevségi mátrix egy eleme)**.** *Határozzuk meg az 5.1.a) ábrán látható jk-rúdelem statikus merevségi mátrixának K_{53} elemét!*



5.4. ábra. Rúdelem K_{53} elemének számításához használt a) virtuális elmozdulás, b) statikus alakfüggvény.

Megoldás
A két index felcserélése azt jelenti, hogy a statikus alakfüggvényt a 3-as index határozza meg, azaz a $v_{j\varphi}(x)$ függvény lesz. Az 5-ös index miatt a végpontra ható nyíróerőt keressük, amihez a virtuális elmozdulásnak a $v_{ky}(x)$ függvényt kell felvennünk. A két függvény szerepe az 5.2.5. példában látott fordítottja,

A fenti két függvényt, valamint a kiszámítandó igénybevételt (a végpont nyíróerejét) ábrázoltuk az 5.4. ábrán: az a) ábrán a virtuális, a b) ábrán az egyensúlyi rendszert. Az ábrák alapján a virtuális munka:

$$\delta W_{ss} = -V_{kj\varphi}\cdot 1 - \int_0^{l_{jk}} M_{j\varphi}(x)\kappa_{ky}(x)dx = \\ -V_{kj\varphi} - \int_0^{l_{jk}} EIv''_{j\varphi}(x)v''_{ky}(x)dx = 0 \qquad (5.30)$$

Ezt megoldva $-V_{kj\varphi}$-re:

$$K_{53} = -V_{kj\varphi} = \int_0^{l_{jk}} EIv''_{j\varphi}(x)v''_{ky}(x)dx, \qquad (5.31)$$

ami jól láthatóan azonos (5.29) eredményével.

A statikus merrevségi mátrix *kompakt jelölésmód*dal történő számításához a (3.486) képletben használt mátrixot használhatjuk. Az alakfüggvények mostani jelölésmódjával[1]:

$$\underline{\underline{N}}(x) = \begin{bmatrix} u_{jx}(x) & 0 & 0 & u_{kx}(x) & 0 & 0 \\ 0 & v_{jy}(x) & v_{j\varphi}(x) & 0 & v_{ky}(x) & v_{k\varphi}(x) \end{bmatrix}, \qquad (5.32)$$

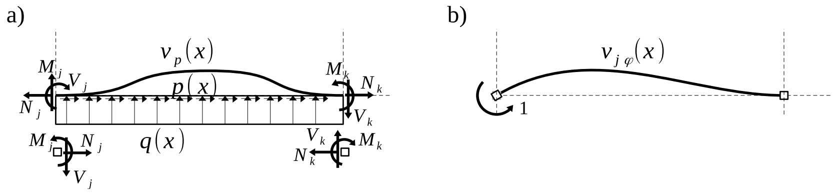
Használjuk fel a 3.4.2.3 alpontban a (3.488), (3.490), (3.493) egyenletekkel bevezetett mátrixokat:

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \frac{d(\cdot)}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2(\cdot}{dx^2} \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{B}}(x) = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{N}}(x), \qquad \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}. \qquad (5.33)$$

Az integrálkifejezés egyes elemeinek számításával belátható, hogy a merevségi mátrixot a

$$\boxed{\underline{\underline{K}}_{jk} = \int_0^{l_{jk}} \underline{\underline{B}}^T(x)\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{B}}(x)dx} \qquad (5.34)$$

[1] Ha a zérus függvényeket is feltüntetjük, akkor a mátrix $\underline{\underline{N}}(x) = \begin{bmatrix} u_{jx}(x) & u_{jy}(x) & u_{j\varphi}(x) & u_{kx}(x) & u_{ky}(x) & u_{k\varphi}(x) \\ v_{jx}(x) & v_{jy}(x) & v_{j\varphi}(x) & v_{kx}(x) & v_{ky}(x) & v_{k\varphi}(x) \end{bmatrix}$ lenne.



5.5. ábra. Rúdelem csomópontra redukált tehervektorának számításához használt a) elmozdulásfüggvény, b) virtuális elmozdulás a harmadik elem számításához.

képlettel számolhatjuk, mely azonos a (3.495) képletével és a végeselemmódszerben megszokottal.

5.2.4. Terhek csomópontra redukálása

A virtuális elmozdulások tételét a hossz mentén megoszló erők csomópontra redukálására is használhatjuk. Jelölje $p(x)$ a tengelyirányú, $q(x)$ pedig a tengelyre merőleges megoszló erő intenzitását, és határozzuk meg az ennek hatására kialakuló rúdvégi igénybevételeket, melyek ellentettjei alkotják a *csomópontra redukált tehervektor*t.

A rúdelem modellje befogott-befogott tartó, a reakciók számításához tételezzük fel, hogy ismerjük az ezen a tartón kialakuló elmozdulások $u_p(x)$ és $v_q(x)$ függvényeit (rendre tengelyirányban és arra merőlegesen).

A csomóponti terhek α elemének számításához egy α-nak megfelelő virtuális elmozdulást kell felvennünk. Az 5.5.a) ábrán mutatjuk ezeket a terheket és merőleges elmozdulásfüggvényt, valamint az 5.5.b) ábrán a harmadik szabadságfokhoz szükséges virtuális elmozdulást.

Az egyensúlyi erőrendszer munkája ezen az elmozduláson (most nem egyensúlyozzuk a csomópontot, hanem a rá ható erőt számoljuk, ezért Q_α előjele ellentétes a merevségi mátrixnál használtnak):

$$\delta W_{qs} = 0 = \mp Q_\alpha \cdot 1 + \int_0^{l_{jk}} \left(p(x)u_\alpha(x) + q(x)v_\alpha(x)\right) dx \\ - \int_0^{l_{jk}} \left(N_p(x)\varepsilon_\alpha(x) + M_q(x)\kappa_\alpha(x)\right) dx \quad (5.35)$$

Az utolsó sorban levő integrál a belső munka, amit az elmozdulások függvényeivel kifejezhetünk:

$$-\int_0^{l_{jk}} \left(N_p(x)\varepsilon_\alpha(x) + M_q(x)\kappa_\alpha(x)\right) dx \\ = -\int_0^{l_{jk}} \left(EAu_p'(x)u_\alpha'(x) + EIv_q''(x)v_\alpha''(x)\right) dx \quad (5.36)$$

A virtuális elmozdulásnak használt függvényeink egyensúlyi helyzethez tartoznak, így ennek erőire is használhatjuk a virtuális elmozdulások tételét. Mivel az elmozdulásrendszer bármilyen lehet, választhatók akár a folytonossági feltételeket kielégítő $u_p(x)$, illetve $v_q(x)$ függvények is (rendre a hosszirányú és a merőleges eltolódások függvényeként). Ha ezt a munkát felírjuk, akkor a rúdvégi erők nem végeznek munkát, hiszen ott nincsen elmozdulás, ezért a szerepek felcserélésével felírt munka csak a belső munkából áll:

$$\delta W_{sq} = -\int_0^{l_{jk}} \left(N_\alpha(x)\varepsilon_p(x) + M_\alpha(x)\kappa_q(x)\right) dx$$
$$= -\int_0^{l_{jk}} \left(EAu'_\alpha(x)u'_p(x) + EIv''_\alpha(x)v''_q(x)\right) dx = 0 \quad (5.37)$$

Az (5.36) és (5.37) egyenletek utolsó integráljai azonosak és értékük 0, így (5.35) egyszerűsíthető:

$$\delta W_{qs} = \mp Q_\alpha \cdot 1 + \int_0^{l_{jk}} \left(p(x)u_\alpha(x) + q(x)v_\alpha(x)\right) dx = 0, \quad (5.38)$$

amiből a csomópontra redukált erő (az elemi tehervektor α eleme):

$$q_{jk,\alpha} = \pm Q_\alpha \cdot 1 = \int_0^{l_{jk}} \left(p(x)u_\alpha(x) + q(x)v_\alpha(x)\right) dx. \quad (5.39)$$

Ezt a képletet az összes szabadságfokra elvégezve a zérusfüggvényekkel történő egyszerűsítés után a redukált terhek vektora:

$$\underline{q}_{jk} = \begin{bmatrix} \int_0^{l_{jk}} p(x)u_{jx}(x)dx \\ \int_0^{l_{jk}} q(x)v_{jy}(x)dx \\ \int_0^{l_{jk}} q(x)v_{j\varphi}(x)dx \\ \int_0^{l_{jk}} p(x)u_{kx}(x)dx \\ \int_0^{l_{jk}} q(x)v_{ky}(x)dx \\ \int_0^{l_{jk}} q(x)v_{k\varphi}(x)dx \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

A megoszló erőket a

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

vektorba gyűjtve (5.40) írható a statikus alakfüggvények (5.32) szerinti $\underline{\underline{N}}(x)$ mátrixával is:

$$\boxed{\underline{q}_{jk} = \int_0^{l_{jk}} \underline{\underline{N}}^T(x)\underline{p}(x)dx} \quad (5.42)$$

ami ugyancsak a végeselemmódszerből ismert alakra hasonlít.

Koncentrált erő esetén (5.42) képletében a terhet a 4.2.3.4. alpontban bevezetett Dirac-delta függvénnyel kezelhetjük. Ennek eredményeként az x_F koordinátánál működő tengelyirányú F_x és merőleges F_y erőkből a

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

vektort bevezetve az integrálást (4.372) felhasználásával elvégezve a tehervektor képlete az alábbi lesz:

$$\underline{q}_{jk} = \underline{\underline{N}}^T(x_F)\underline{P}. \quad (5.44)$$

Egy $m(x)$ *megoszló nyomatéki teher* esetén a terhek (5.41) vektorát ki kell egészíteni az alábbi módon:

$$\underline{p}^m = \begin{bmatrix} p(x) \\ q(x) \\ m(x) \end{bmatrix}, \tag{5.45}$$

és az (5.32) szerinti mátrixhoz is hozzá kell adni egy sort. A megoszló nyomaték a keresztmetszetek elfordulásán végez munkát, ezért a statikus alakfüggvények első deriváltjaira lesz szükségünk:

$$\underline{\underline{N}}^m(x) = \begin{bmatrix} u_{jx}(x) & 0 & 0 u_{kx}(x) & 0 & 0 & \\ 0 & v_{jy}(x) & v_{j\varphi}(x) & 0 & v_{ky}(x) & v_{k\varphi}(x) \\ 0 & v'_{jy}(x) & v'_{j\varphi}(x) & 0 & v'_{ky}(x) & v'_{k\varphi}(x) \end{bmatrix}, \tag{5.46}$$

Ezekkel a jelölésekkel a csomópontra redukált terhek vektorát az alábbi képlet adja:

$$\underline{q}_{jk} = \int_0^{l_{jk}} \underline{\underline{N}}^{mT}(x)\underline{p}^m(x)dx, \tag{5.47}$$

Egy M koncentrált nyomaték esetén a (5.43) szerinti tehervektort kell kiegészíteni:

$$\underline{P}^m = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix}, \tag{5.48}$$

a csomópontra redukált terhek vektora pedig:

$$\underline{q}_{jk} = \underline{\underline{N}}^{mT}(x_F)\underline{P}^m. \tag{5.49}$$

5.3. Dinamikus merevségi mátrix

A statikus merevségi mátrix fizikai jelentése és arra alapuló meghatározása után nézzük meg, hogy hogyan állíthatjuk elő harmonikus gerjesztés esetén a rúdelem dinamikus merevségi mátrixát.

5.3.1. Fizikai jelentés

Emlékeztetőül, a 3.3.1.1. alpontban láttuk, hogy a $\underline{q}_0$ amplitúdójú harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer mozgásának differenciálegyenelete

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{u}}(t) + \underline{\underline{K}}\underline{u}(t) = \underline{q}_0 \cos(\omega t). \tag{5.50}$$

Az állandósult rezgés során minden, így a szabadságfokok kitérése is a $\cos(\omega t)$ függvény szerint változik az időben, ezért a differenciálegyenlet közvetlen megoldásakor a megoldást

$$\underline{u}(t) = \underline{u}_0 \cos(\omega t) \tag{5.51}$$

alakban keresve, a válasz $\underline{u}_0$ amplitúdójára az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right) \underline{u}_0 = \underline{q}_0. \tag{5.52}$$

A zárójelben megjelenő, a gerjesztés ω frekvenciájától függő mátrixot *dinamikus merevségi mátrix*nak neveztük el, a továbbiakban $\underline{\underline{\hat{K}}}$-pal fogjuk jelölni:

$$\underline{\underline{\hat{K}}} = \underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}. \tag{5.53}$$

Ugyancsak a $\hat{}$ szimbólummal fogjuk jelölni a dinamikus merevségi mátrix előállításához szükséges, a statikus vizsgálatnál használthoz képest eltérő alakú mennyiségeket.

Emlékeztetünk arra, hogy a dinamikus merevségi mátrixot egyelőre nem ismerjük, hiszen a tömegmátrix pontos előállítási módja sem ismert, de a kettő közötti kapcsolat alapján ha az egyiket tudjuk, akkor a másikat is elő tudjuk állítani. Az (5.53) egyenletben látjuk a dinamikus merevségi mátrix számítási módját. Fordított irányban az

$$\underline{\underline{M}} = \frac{1}{\omega^2}\left(\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{\hat{K}}}\right) \tag{5.54}$$

képletet használhatjuk.

Az (5.52) egyenletből kiolvashatjuk a dinamikus merevségi mátrix fizikai jelentését. A

$$\underline{\underline{\hat{K}}}\underline{u}_0 = \underline{q}_0 \tag{5.55}$$

egyenlet a statikus vizsgálatoknál megszokott $\underline{\underline{K}}\underline{u} = \underline{q}$ egyenlethez hasonló alakú, de a csomóponti elmozdulások és a csomóponti terhek vektora helyett a *csomóponti elmozdulások amplitúdójának* és a *csomóponti terhek amplitúdójának* vektora szerepel benne, a dinamikus merevségi mátrix tehát ezen mennyiségek közötti kapcsolatot fejezi ki.

A mátrix egy tetszőleges oszlopát úgy kaphatjuk meg, ha az $\underline{u}_0$ vektort egy, az oszlop sorszámának megfelelő egységvektorként vesszük fel. Ez a speciális $\underline{u}_0$ vektor azt jelenti, hogy a megfelelő szabadságfokot egységnyi amplitúdóval ω körfrekvenciájú rezgésre kényszerítünk, miközben biztosítjuk, hogy a többi szabadságfok ne tudjon elmozdulni. Ennek a harmonikus mozgást fenntartó, csomópontokra működtetendő erőrendszernek az amplitúdói kerülnek (5.52) jobb oldalán a $\underline{q}_0$ vektorba, a bal oldalon pedig a dinamikus merevségi mátrix megfelelő oszlopába.

A rúdmodell használata esetén, ahogy a statikus merevségi mátrixnál igaz volt, úgy a dinamikus merevségi mátrix fizikai jelentése szerinti előállításánál is igaz lesz, hogy egy szabadságfokhoz nem kapcsolódó rúdelemek nem deformálódnak a szabadságfok mozgásakor, így az egyes csomópontokra ható erőket csak a hozzájuk kapcsolódó rúdelemek határozzák meg. Ennek következtében a szerkezet dinamikus merevségi mátrixa a rúdelemek dinamikus merevségi mátrixából ugyanúgy kompilálható, ahogy a statikus mátrixok esetére a 3.4.4.2. alpontban bemutattuk. A kompilálást megelőzően a közös koordinátarendszerbe forgatást is ugyanúgy kell végrehajtani, ahogyan azt a statikus vizsgálatnál láttuk a 3.4.4.1. alpontban.

A szerkezet dinamikus merevségi mátrixának számítása szempontjából tehát a lényeges pont egyetlen jk-rúdelem dinamikus merevségi mátrixának a számítása. Ezt az elemi dinamikus merevségi mátrixot ugyancsak a fenti fizikai jelentés alapján fogjuk előállítani, de csak a rúdelem szempontjából lényeges csomóponti szabadságfokokkal, azaz a j kezdőponttal és a k végponttal foglalkozunk közben.

5.3.2. Dinamikus alakfüggvények

A rúdelem szabadsági fokai az (5.1) egyenlettel analóg módon

$$\underline{u}_{jk}(t) = \begin{bmatrix} u_{jx}(t) \\ v_{jy}(t) \\ \varphi_{jz}(t) \\ u_{ky}(t) \\ v_{ky}(t) \\ \varphi_{kz}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}_j(t) \\ \underline{u}_k(t) \end{bmatrix}, \tag{5.56}$$

melyeket az 5.6.a) ábrán mutatunk be.

A $\hat{\underline{\underline{K}}}^{jk}$ elemi dinamikus merevségi mátrix egyes oszlopaihoz egy-egy szabadságfokot kell egységnyi amplitúdóval mozgatni. Az ennek hatására kialakuló állandósult rezgés alakfüggvényét hívjuk *dinamikus alakfüggvény*nek. A 4.1.4.3. és a 4.2.3.7. alpontokban láttuk, hogyan lehet ezeket a harmonikus támaszmozgás hatására kialakuló dinamikus alakfüggvényeket meghatározni. Itt a meghatározásukkal külön nem foglalkozunk, a szükséges függvények a statikus alakfüggvényeknél látott jelölésrendszerrel (lásd 5.2.1. szakasz) a *dinamikus alakfüggvények mátrixá*ba rendezve (5.32) egyenlethez hasonló formában az alábbiak lesznek:

$$\hat{\underline{\underline{N}}}(x) = \begin{bmatrix} \hat{u}_{jx}(x) & 0 & 0 & \hat{u}_{kx}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \hat{v}_{jy}(x) & \hat{v}_{j\varphi}(x) & 0 & \hat{v}_{ky}(x) & \hat{v}_{k\varphi}(x) \end{bmatrix}. \tag{5.57}$$

A dinamikus alakfüggvények jellegét az 5.6.b-g) ábrákon mutatjuk. A szürke statikus alakfüggvényekhez képest a frekvenciától függően eltér az alak, és a rezgés miatt az ábrázolt függvények csak amplitúdó-függvények: a rúdelem ténylegesen ezek és a szaggatottal jelölt ellentettek között rezeg.

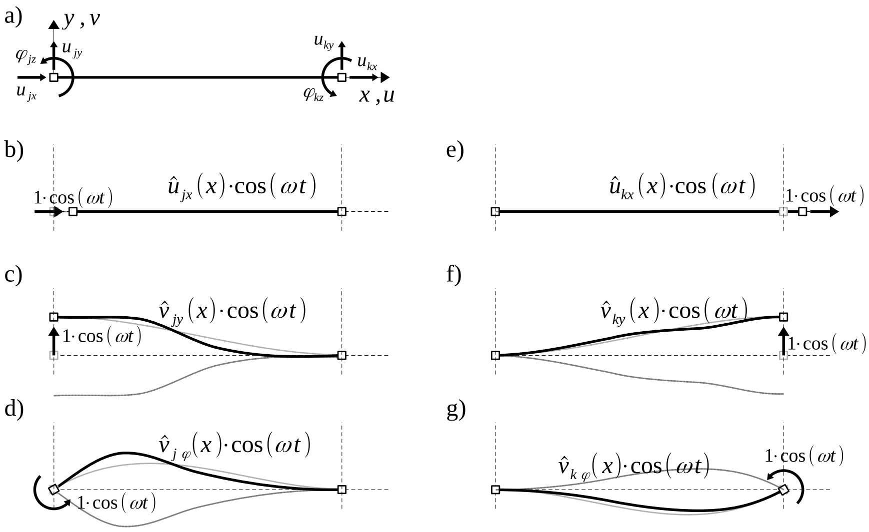
5.3.2.1. Rúdvégi erők amplitúdója

A dinamikus alakfüggvény által meghatározott rezgést fenntartó, csomópontra ható erőamplitúdókat az 5.2.2. szakaszban látott statikus vizsgálathoz hasonlóan a rúdvégi igénybevételekből származtatjuk. Most is lehetne az alakfüggvények deriváltjaiból kiindulva meghatározni az igénybevételeket, de a 4.1.4.3. és a 4.2.3.7. alpontokban láttuk, hogy ezekben a függvényekben nem jelenik meg szorzótényezőként a gerjesztés körfrekvenciájának négyzete, így az eljárás nem lenne alkalmas a tömegmátrix képletszerű számítására. A virtuális elmozdulások tétele viszont a rúdelemre ható erőrendszer kis módosításával már alkalmazható.

Newton második mozgástörvényét az anyagi pontra ható erők eredőjével $\sum \underline{F} = m\underline{a}$ alakban írhatjuk. D'Alembert oly módon módosította ezt az egyenletet, hogy mindkét oldalhoz hozzáadott egy fiktív, $-m\underline{a}$ nagyságú erőt. Az így kapott

$$\sum \underline{F} + (-m\underline{a}) = \underline{0} \tag{5.58}$$

egyenlet egyenértékű Newton második törvényével, formailag viszont két eltérést ki kell emelni. Egyrészt a jobb oldalon most zéruserő szerepel, azaz a bal oldalon egy egyensúlyi erőrendszer van. Másrészt a pontra ható $\underline{F}$ erőkből álló erőrendszert ki kell egészíteni a $-m\underline{a}$ nagyságú erővel, amit tehetetlenség



5.6. ábra. Rúdelem az xy-síkban: a) szabadságfokok, b-g) az egyes szabadságfokok egységnyi amplitúdójú elmozdításakor kialakuló dinamikus alakok jellege (az alakok a gerjesztés körfrekvenciájától is függenek, ezért csak a szürkével jelzett statikus alakhoz képesti váltakozásukat jelezzük és szaggatott vonallal azt, hogy ezek a rezgés befagyasztott pillanataiban érvényes alakok).

erőnek, vagy D'Alembert-erőnek hívunk[2]. A tehetetlenségi erővel kiegészített erőrendszer tehát egy egyensúlyi erőrendszer, amire alkalmazható a virtuális elmozdulások tétele. Esetünkben az egyes elemi rúdszakaszokon a rúdelem fajlagos tömegével, a 4.1. és 4.2. alfejezetekben bevezetett μ fajlagos tömeggel kell szorozni a gyorsulást.

A statikus vizsgálathoz hasonlóan nézzük meg, milyen lépésekkel tudjuk a dinamikus merevségi mátrix $K_{\alpha\beta}$ elemét kiszámítani. Az α és β értékek most is rendre a sor- és oszlopindexet jelölik, ami mindig egy-egy szabadságfoknak felel meg, ami egyben meghatározza az alakot megadó függvény jellegét és a korábban már bevezetett indexelését. Érvényes tehát az 5.1. táblázatból dinamikus alakfüggvényekre aktualizált 5.2. táblázat, ahol felsoroltuk, hogy a különböző indexek melyik csomóponthoz tartoznak, melyik elmozdulásfüggvény zérus, illetve nemzérus, és mi az elmozdulásfüggvény indexe.

A mátrix indexelésének sor-oszlop sorrendje egyben a hely–ok sorrendnek is megfelel, azaz a keresett elem a β által meghatározott dinamikus alakon kialakuló rúdvégi igénybevételek közül az α által meghatározott érték amplitúdójának kell lennie, így az annak megfelelő statikus alakot kell virtuális elmozdulásrendszerként felvenni. A β indexnek megfelelő elmozdulásfüggvény egy, az 5.57 egyenletből kiemelt dinamikus alakfüggvény és a harmonikus függvény szorzata, általános jelöléssel:

$$\begin{aligned} u_\beta(x,t) &= \hat{u}_\beta(x)\cos(\omega t), \\ v_\beta(x,t) &= \hat{v}_\beta(x)\cos(\omega t). \end{aligned} \tag{5.59}$$

[2]Külön említést és hangsúlyt érdemel a tehetelenségi erő $-m\underline{a}$ képletében szereplő negatív előjel, aminek kezelését az elkülönítéskor, az egyenletek felírásakor, megoldásakor és az eredmények közlésekor is el lehet rontani, azaz fokozott óvatosságot igényel a használata. (Ráadásul páros számú hiba esetén még jó eredményt is kaphatunk egy hibás számításból.)

α, β	1	2	3	4	5	6
csomópont	j	j	j	k	k	k
zérus elmozdulásfv. jele	$\hat{v}$	$\hat{u}$	$\hat{u}$	$\hat{v}$	$\hat{u}$	$\hat{u}$
nemzérus elmozdulásfv. jele	$\hat{u}$	$\hat{v}$	$\hat{v}$	$\hat{u}$	$\hat{v}$	$\hat{v}$
elmozdulásfv. indexe	jx	jy	$j\varphi$	kx	ky	$k\varphi$

5.2. táblázat. A jk-rúdelem dinamikus merevségi mátrixának $K_{\alpha\beta}$ eleméhez tartozó mennyiségek.

Ennek idő szerinti második deriváltjai:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_\beta(x,t) &= -\omega^2 \hat{u}_\beta(x)\cos(\omega t), \\ \ddot{v}_\beta(x,t) &= -\omega^2 \hat{v}_\beta(x)\cos(\omega t). \end{aligned} \tag{5.60}$$

Az egyensúlyivá kiegészített erőrendszer és a virtuális elmozdulásrendszer ismeretében kell felírnunk a dinamikus erőrendszer statikus elmozdulásokon végzett virtuális munkáját. A teljes munka a külső és a belső munka összege:

$$\delta W_{ds} = \delta W_{ds}^k + \delta W_{ds}^b = 0. \tag{5.61}$$

(A ds index a dinamikus erőrendszerre és a statikus virtuális elmozdulásrendszerre utal.)

Az erőrendszer elemeiből munkát végez az α által meghatározott rúdvégi igénybevétel, a tehetetlenségi erő, és a belső erő. Ezek mindegyike egy ˆ jelöléssel megkülönböztetett amplitúdónak és ugyanazon $\cos(\omega t)$ harmonikus függvénynek a szorzata.

A külső munkát a keresett $\hat{Q}_\beta \cos(\omega t)$ igénybevétel végzi a vele munkakompatibilis (egységnyi) elmozduláson, valamint a $-\mu\ddot{u}_\beta(x,t)$, illetve $-\mu\ddot{v}_\beta(x,t)$ tehetetlenségi erők a $u_\alpha(x)$, illetve $v_\alpha(x)$ elmozduláson:

$$\delta W_{ds}^k = \pm\hat{Q}_{\alpha\beta}\cdot 1\cos(\omega t) + \int_0^{l_{jk}} \left((-\mu\ddot{u}_\beta(x,t))u_\alpha(x) + (-\mu\ddot{v}_\beta(x,t))v_\alpha(x)\right)dx, \tag{5.62}$$

ahol az előjel $\hat{N}_j, \hat{M}_j, \hat{V}_k$ esetén negatív, $\hat{V}_j, \hat{N}_k, \hat{M}_k$ esetén pozitív (5.14) összefüggéseinek megfelelően. Az idő szerinti deriváltakat behelyettesítve és a harmonikus függvényt kiemelve a külső munka:

$$\delta W_{ds}^k = \left[\pm\hat{Q}_{\alpha\beta}\cdot 1 + \omega^2\mu\int_0^{l_{jk}} \left(\hat{u}_\beta(x)u_\alpha(x) + \hat{v}_\beta(x)v_\alpha(x)\right)dx\right]\cos(\omega t). \tag{5.63}$$

A belső munkát a normálerő, illetve a hajlítónyomaték végzi a fajlagos nyúláson, illetve a görbületen, ezek szorzatát a rúdhossz mentén integrálni kell. A belső munka jellegzetességének megfelelően most is egy negatív előjelet kell használni, így:

$$\delta W_{ds}^b = -\int_0^{l_{jk}} \left(N_\beta(x,t)u'_\alpha(x) + M_\beta(x,t)v''_\alpha(x)\right)dx, \tag{5.64}$$

ami (5.15) és (5.16) felhasználásával:

$$\delta W_{ds}^b = -\int_0^{l_{jk}} \left(EAu'_\beta(x,t)u'_\alpha(x) + EIv''_\beta(x,t)v''_\alpha(x)\right)dx. \tag{5.65}$$

Az időfüggő mennyiségek itt is egy amplitúdó és a harmonikus függvény szorzata (lásd (5.59)), amit behelyettesítve:

$$\delta W_{ds}^{b} = -\int_0^{l_{jk}} \left(EA\hat{u}'_{\beta}(x)u'_{\alpha}(x) + EI\hat{v}''_{\beta}(x)v''_{\alpha}(x)\right)\cdot\cos(\omega t)dx. \tag{5.66}$$

A külső és belső munkák összegéből:

$$\begin{aligned}\delta W_{ds} = 0 = \Bigg[&\pm\hat{Q}_{\alpha\beta}\cdot 1 + \omega^2\mu\int_0^{l_{jk}} \left((\hat{u}_{\beta}(x))u_{\alpha}(x) + (\hat{v}_{\beta}(x))v_{\alpha}(x)\right)dx \\ &- \int_0^{l_{jk}} \left(EA\hat{u}'_{\beta}(x)u'_{\alpha}(x) + EI\hat{v}''_{\beta}(x)v''_{\alpha}(x)\right)dx\Bigg]\cos(\omega t)\end{aligned} \tag{5.67}$$

Az egyensúlyivá tett erőrendszerünk minden időpillanatban egyensúlyi, akkor is, amikor $\cos(\omega t) \neq 0$, ezért a szögletes zárójelen belüli kifejezésnek kell nullának lennie. Az így kapott egyenletet megoldhatjuk az (5.14) szerinti előjeles belső erőre, és így a dinamikus merevségi mátrix keresett $\hat{K}_{\alpha\beta}$ elemére:

$$\begin{aligned}\hat{K}_{\alpha\beta} = \pm Q_{\alpha\beta} = &-\omega^2\mu\int_0^{l_{jk}} \hat{u}_{\beta}(x)u_{\alpha}(x)dx - \omega^2\mu\int_0^{l_{jk}} \hat{v}_{\beta}(x)v_{\alpha}(x)dx \\ &+ \int_0^{l_{jk}} EA\hat{u}'_{\beta}(x)u'_{\alpha}(x)dx + \int_0^{l_{jk}} EI\hat{v}''_{\beta}(x)v''_{\alpha}(x)dx.\end{aligned} \tag{5.68}$$

Hangsúlyozzuk, hogy mindegyik integrálban egy függvény a dinamikus alakból, egy pedig a statikus alakból származik. Előbbi kalapos függvény és a β index jelöli, utóbbi indexe pedig α.

Nézzük meg a statikus merevségi mátrix $K_{\beta\alpha}$ elemét. Ez a statikus α elmozdulásrendszernek a fenntartásához szükséges erőrendszernek a β szabadsági fokra jutó ereje. Meghatározása történhet a virtuális elmozdulások tételével, és a virtuális elmozdulástól csak annyit követelünk meg, hogy a β rúdvégi erő tudjon munkát végezni, azaz az az elmozdulás ne legyen zérus. Így akár az $u_{\beta}(x,t)$, $v_{\beta}(x,t)$ elmozdulásokat is választhatnánk virtuális elmozdulásnak, ekkor a virtuális elmozdulások tétele (a statikus erőrendszer munkája a dinamikus elmozdulásokon):

$$\delta W_{sd} = 0 = \left[\pm Q_{\beta\alpha}\cdot 1 - \int_0^{l_{jk}} \left(EAu'_{\alpha}(x)\hat{u}'_{\beta}(x) + EIv''_{\alpha}(x)\hat{v}''_{\beta}(x)\right)dx\right]\cos(\omega t). \tag{5.69}$$

Ebből

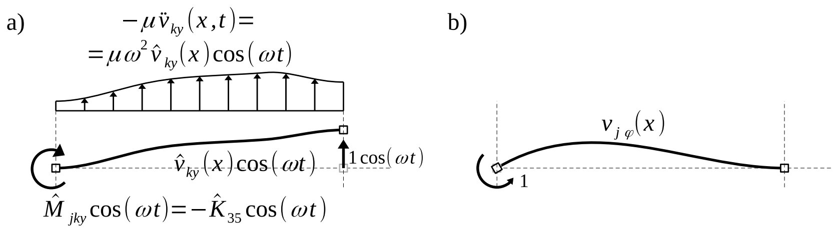
$$K_{\beta\alpha} = \pm Q_{\beta\alpha} = \int_0^{l_{jk}} \left(EAu'_{\alpha}(x)\hat{u}'_{\beta}(x) + EIv''_{\alpha}(x)\hat{v}''_{\beta}(x)\right)dx \tag{5.70}$$

A statikus merevségi mátrixról tudjuk, hogy szimmetrikus, így

$$K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha} = \int_0^{l_{jk}} \left(EAu'_{\alpha}(x)\hat{u}'_{\beta}(x) + EIv''_{\alpha}(x)\hat{v}''_{\beta}(x)\right)dx \tag{5.71}$$

Ez az integrál megegyezik (5.68) második sorában levő integrállal, azaz a dinamikus merevségi mátrix $\hat{K}_{\alpha\beta}$ eleme:

$$\hat{K}_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} - \omega^2\mu\left[\int_0^{l_{jk}} \hat{u}_{\beta}(x)u_{\alpha}(x)dx + \int_0^{l_{jk}} \hat{v}_{\beta}(x)v_{\alpha}(x)dx\right]. \tag{5.72}$$



5.7. ábra. Rúdelem dinamikus merevségi mátrixában a $\hat{K}_{35}$ elem számításához használt a) dinamikus alakfüggvény és a munkát végző erők, b) virtuális elmozdulás.

Emlékeztetünk, hogy (5.53) alapján a dinamikus merevségi mátrixot úgy kapjuk, ha kivonjuk a statikus merevségi mátrixból a tömegmátrix ω^2-szeresét. Az (5.72) képletben a statikus merevségi mátrixból a szögletes zárójeles kifejezés μ-szeresének ω^2-szeresét vonjuk ki, azaz a tömegmátrix $\hat{M}_{\alpha\beta}$ eleme éppen a szögletes zárójelben szereplő integrál μ-szerese:

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = \mu \int_0^{l_{jk}} \hat{u}_\beta(x) u_\alpha(x) dx + \mu \int_0^{l_{jk}} \hat{v}_\beta(x) v_\alpha(x) dx. \tag{5.73}$$

A pontos tömegmátrixot ezért az alábbi módon számolhatjuk a már bevezetett kompakt jelölésmóddal:

$$\boxed{\underline{\underline{\hat{M}}} = \int_0^{l_{jk}} \underline{\underline{N}}^T(x) \underline{\underline{\mu}}\, \underline{\underline{\hat{N}}}(x) dx,} \tag{5.74}$$

ahol

$$\underline{\underline{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \tag{5.75}$$

és így

$$\boxed{\underline{\underline{\hat{K}}} = \underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{\hat{M}}}} \tag{5.76}$$

Az (5.54) egyenlet eredménye pedig

$$\underline{\underline{\hat{M}}} = \frac{1}{\omega^2}\left(\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{\hat{K}}}\right). \tag{5.77}$$

5.3.1. Példa (Dinamikus merevségi mátrix egy eleme)**.** *Levezetés alapján írjuk fel az 5.6.a) ábrán látható jk-rúdelem dinamikus merevségi mátrixa* $\hat{K}_{35}$ *elemének számítására szolgáló képletet!*

Megoldás

Az 5-ös index a merevségi mátrix ötödik oszlopára utal, és az 5.2. táblázat alapján azt jelenti, hogy a $\hat{v}_{ky}(x)$ dinamikus alakfüggvény rúdvégi igénybevételeiből kell a 3-as index miatt harmadikat felhasználni. Azaz, a végpont eltolódása esetén a kezdőpontra működtetendő nyomatékot akarjuk meghatározni. Az ehhez szükséges virtuális elmozdulásrendszer az 5.1. táblázat alapján a $v_{j\varphi}(x)$ függvény lesz.

Az 5.7.a) ábrán feltüntettük a dinamikus alakot, a keresett rúdvégi erőt és a tehetetlenségi erőt, míg az 5.7.b) ábrán a felhasznált statikus alakot.

A virtuális munka (a hosszirányú elmozdulásfüggvények zérus volta miatt zérus értékű integrálokat elhagyva):

$$\delta W_{ds} = -\hat{M}_{jky}\cos(\omega t)\cdot 1 + \\ + \int_0^{l_{jk}} (-\mu \ddot{v}_{ky}(x,t)) v_{j\varphi}(x) dx - \int_0^{l_{jk}} EI\hat{M}_{ky}(x)\kappa_{j\varphi}(x)dx, \quad (5.78)$$

ami a virtuális elmozdulások tétele értelmében zérus, azaz

$$0 = \\ \left[-\hat{M}_{jky} + \int_0^{l_{jk}} \mu\omega^2 \hat{v}_{ky}(x) v_{j\varphi}(x)dx - \int_0^{l_{jk}} EI\hat{v}''_{ky}(x)v''_{j\varphi}(x)dx\right]\cos(\omega t). \quad (5.79)$$

Ezt megoldva $-\hat{M}_{jky}$-ra, ami egyben a dinamikus merevségi mátrix 35-eleme:

$$\hat{K}_{35} = -\hat{M}_{jky} = \int_0^{l_{jk}} EI\hat{v}''_{ky}(x)v''_{j\varphi}(x)dx - \mu\omega^2 \int_0^{l_{jk}} \hat{v}_{ky}(x)v_{j\varphi}(x)dx. \quad (5.80)$$

Az első integrál az elem statikus merevségi mátrixa:

$$K_{35} = \int_0^{l_{jk}} EI\hat{v}''_{ky}(x)v''_{j\varphi}(x)dx \quad (5.81)$$

a másodikból pedig kiolvasható a pontos tömegmátrix:

$$\hat{M}_{35} = \mu \int_0^{l_{jk}} \hat{v}_{ky}(x)v_{j\varphi}(x)dx \quad (5.82)$$

amikből:

$$\hat{K}_{35} = K_{35} - \omega^2 \hat{M}_{35}. \quad (5.83)$$

Pár megjegyzés a dinamikus merevségi mátrixhoz és a pontos tömegmátrixhoz:

- A pontos tömegmátrix (5.74) és emiatt a dinamikus merevségi mátrix (5.76) képletéből nem látszik közvetlenül, hogy ezek a mátrixok is szimmetrikusak. Ennek bizonyítása úgy történhet, ha a dinamikus merevségi mátrix elemének számításához a virtuális elmozdulást is a dinamikus alakfüggvénnyel vesszük fel. Az úgy megkapható mátrix képletszerűen szimmetrikus lesz, amiből a tömegmátrix szimmetriája is következik.

- A pontos tömegmátrix frekvenciafüggő (ezért is jelöltük kalappal), hiszen az integrálban szereplő dinamikus alakfüggvény is függ a támasz gerjesztésének frekvenciájától.

- Ha a gerjesztés körfrekvenciája megegyezik a befogott-befogott rúdelem valamelyik sajátkörfrekvenciájával, akkor a dinamikus merevségi mátrix egyes elemei végtelenné válnak. Ez nem feltétlenül eredményez a teljes szerkezet merevségi mátrixában is végtelen értékeket, a kapcsolódó rúdelemek kiegészíthetik véges értékké a kompilálás során a teljes szerkezet mátrixát.

A rúd hosszát az egyszerűség kedvéért ℓ-lel jelölve a dinamikus merevségi mátrix elemei:

$$\boxed{\underline{\underline{\hat{K}}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell}\frac{\psi}{\tan\psi} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell}\frac{\psi}{\sin\psi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{\ell^3}F_6(\lambda) & -\frac{EI}{\ell^2}F_4(\lambda) & 0 & \frac{EI}{\ell^3}F_5(\lambda) & \frac{EI}{\ell^2}F_3(\lambda) \\ 0 & -\frac{EI}{\ell^2}F_4(\lambda) & \frac{EI}{\ell}F_2(\lambda) & 0 & -\frac{EI}{\ell^2}F_3(\lambda) & \frac{EI}{\ell}F_1(\lambda) \\ -\frac{EA}{\ell}\frac{\psi}{\sin\psi} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell}\frac{\psi}{\tan\psi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{\ell^3}F_5(\lambda) & -\frac{EI}{\ell^2}F_3(\lambda) & 0 & \frac{EI}{\ell^3}F_6(\lambda) & \frac{EI}{\ell^2}F_4(\lambda) \\ 0 & \frac{EI}{\ell^2}F_3(\lambda) & \frac{EI}{\ell}F_1(\lambda) & 0 & \frac{EI}{\ell^2}F_4(\lambda) & \frac{EI}{\ell}F_2(\lambda) \end{bmatrix}} \tag{5.84}$$

ahol a két frekvenciaparaméter:

$$\psi = \sqrt{\frac{\omega^2\mu l^2}{EA}}, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{\omega^2\mu l^4}{EI}}, \tag{5.85}$$

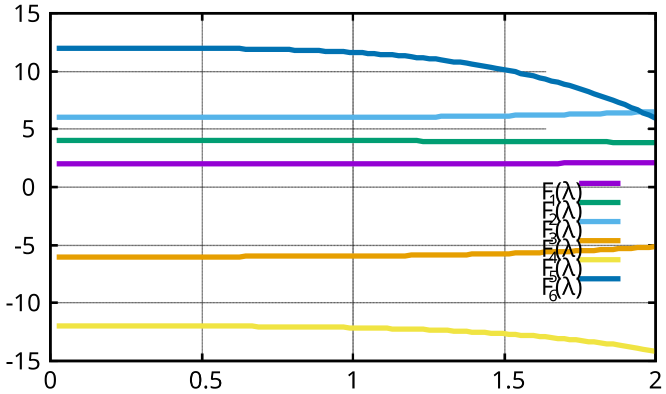
az $F(\lambda)$ segédfüggvények pedig:

$$\begin{gathered} F_1(\lambda) = \lambda\frac{\sin\lambda - \sinh\lambda}{\cos\lambda\cosh\lambda - 1}, \qquad F_2(\lambda) = -\lambda\frac{\cosh\lambda\sin\lambda - \sinh\lambda\cos\lambda}{\cos\lambda\cosh\lambda - 1}, \\ F_3(\lambda) = -\lambda^2\frac{\cosh\lambda - \cos\lambda}{\cos\lambda\cosh\lambda - 1}, \qquad F_4(\lambda) = \lambda^2\frac{\sinh\lambda\sin\lambda}{\cos\lambda\cosh\lambda - 1}, \\ F_5(\lambda) = \lambda^3\frac{\sinh\lambda + \sin\lambda}{\cos\lambda\cosh\lambda - 1}, \qquad F_6(\lambda) = -\lambda^3\frac{\cosh\lambda\sin\lambda + \sinh\lambda\cos\lambda}{\cos\lambda\cosh\lambda - 1}. \end{gathered} \tag{5.86}$$

Ezek kis λ-hoz tartozó kezdeti értékeit az 5.8. ábrán mutatjuk. Látszik, hogy $\lambda = 0$ közelében a statikus merevségi mátrixból ismert 12, 6, 4, 2 konstans abszolútértékekhez tartana a függvények.

5.3.3. Transzformálás, kompilálás

A szerkezet dinamikus merevségi mátrixának, illetve pontos tömegmátrixának az elemi dinamikus merevségi mátrixokból, illetve az elemi pontos tömegmátrixokból történő előállításához az elemi mátrixokat először a közös, globális koordinátarendszerbe kell forgatni. Ennek módja azonos a 3.4.4. szakaszban leírtakkal, így a levezetés megismétlése nélkül csak annak eredményeit mutatjuk itt be.



5.8. ábra. Rúdelem dinamikus merevségi mátrixának (5.84)-beli együtthatói.

A jk-rúdelem lokális koordinátarendszeréből a globális koordinátarendszerbe forgató mátrixot jelölje $\underline{\underline{T}}_{jk}$. A rúdelem transzformálómátrixa ekkor (3.515) képletének megfelelően:

$$\hat{\underline{\underline{T}}}_{jk} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_{jk} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{T}}_{jk} \end{bmatrix}, \tag{5.87}$$

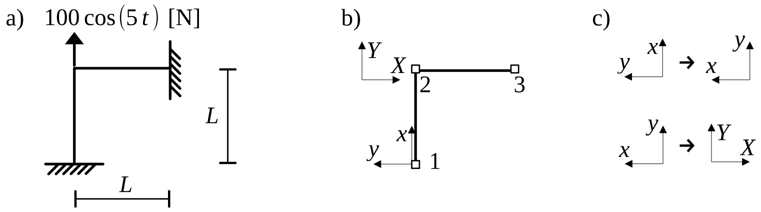
amit felhasználva a globális koordinátarendszerbe forgatott mátrixok (lok és gl felső indexszel megkülönböztetve a lokális és a globális koordinátarendszerbeli mátrixokat):

$$\hat{\underline{\underline{K}}}^{gl}_{jk} = \hat{\underline{\underline{T}}}_{jk}\hat{\underline{\underline{K}}}^{lok}_{jk}\hat{\underline{\underline{T}}}^{T}_{jk}, \qquad \hat{\underline{\underline{M}}}^{gl}_{jk} = \hat{\underline{\underline{T}}}_{jk}\hat{\underline{\underline{M}}}^{lok}_{jk}\hat{\underline{\underline{T}}}^{T}_{jk}, \qquad \underline{\underline{K}}^{gl}_{jk} = \hat{\underline{\underline{T}}}_{jk}\underline{\underline{K}}^{lok}_{jk}\hat{\underline{\underline{T}}}^{T}_{jk}. \tag{5.88}$$

A tényleges számítást természetesen most is 3×3-as blokkokon lehet elvégezni a $\underline{\underline{T}}_{jk}$ mátrix segítségével.

A szerkezet teljes dinamikus merevségi mátrixának, illetve pontos tömegmátrixának kompilálásához a 3.4.4.2. alpontban leírtakat kell követnünk. Tudva, hogy egy elemi dinamikus merevségi mátrix lm blokkja az m csomópont egységnyi elmozdulásai miatt az l csomópontra működtetendő erők amplitúdóját tartalmazza, az ezeket az erőket tartalmazó 3×3-as blokkot az egész szerkezet mátrixának 3×3-as lm-blokkjához kell hozzáadni. A dinamikus merevségi mátrix kompilálásának menete tehát a következő:

- Létrehozzuk a teljes szerkezet dinamikus merevségi mátrixát, $\hat{\underline{\underline{K}}}_{all}$-t, N csomópont esetén ez egy $3N \times 3N$-méretű mátrix, amit zérusokkal töltünk fel.
- Minden egyes jk-rúdelem esetén:
  - kiszámítjuk az elemi dinamikus merevségi mátrixot a lokális koordinátarendszerben (5.84),
  - transzformáljuk az elemi dinamikus merevségi mátrixot a globális koordinátarendszerbe (5.88),
  - a jj-blokkot hozzáadjuk a $\hat{\underline{\underline{K}}}_{all}$ mátrix jj-blokkjához,



5.9. ábra. Rúdszerkezet harmonikus gerjesztése. a) A szerkezeti modell. b) A használt elemek és koordinátarendszerek. c) A koordinátarendszer transzformációjának két lépése.

- a jk-blokkot hozzáadjuk a $\underline{\underline{\hat{K}}}_{all}$ mátrix jk-blokkjához,
- a kj-blokkot hozzáadjuk a $\underline{\underline{\hat{K}}}_{all}$ mátrix kj-blokkjához,
- a kk-blokkot hozzáadjuk a $\underline{\underline{\hat{K}}}_{all}$ mátrix kk-blokkjához.

A pontos tömegmátrix kompilálásának menete hasonló:

- Létrehozzuk a teljes szerkezet pontos tömegmátrixát, $\underline{\underline{\hat{M}}}_{all}$-t, N csomópont esetén ez egy $3N \times 3N$-méretű mátrix, amit zérusokkal töltünk fel.
- Minden egyes jk-rúdelemnek:
  - kiszámítjuk a pontos tömegmátrixát a lokális koordinátarendszerben (5.74),
  - transzformáljuk az elemi dinamikus merevségi mátrixot a globális koordinátarendszerbe (5.88),
  - a jj-blokkot hozzáadjuk az $\underline{\underline{\hat{M}}}_{all}$ mátrix jj-blokkjához,
  - a jk-blokkot hozzáadjuk az $\underline{\underline{\hat{M}}}_{all}$ mátrix jk-blokkjához,
  - a kj-blokkot hozzáadjuk az $\underline{\underline{\hat{M}}}_{all}$ mátrix kj-blokkjához,
  - a kk-blokkot hozzáadjuk az $\underline{\underline{\hat{M}}}_{all}$ mátrix kk-blokkjához.

5.3.2. Példa (Dinamikus merevségi mátrix kompilálása)**.** *Állítsuk elő az 5.9.a) ábrán látható tartó dinamikus merevségi mátrixát, ha a megadott harmonikus gerjesztőerő gerjeszti, és $EA = 150kN$, $EI = 250kNm^2$, $\mu = 250kg/m$, $L = 4m$.*

Megoldás

Az 5.9.b) ábrán mutatjuk a csomópontok felvételét, a globális koordinátarendszert (XY), valamint az $1-2$-rúdelem lokális xy- koordinátarendszerét. (A $2-3$-rúdelem lokális koordinátarendszere megegyezik a globálissal, így azt nem jelöltük külön.)

A lokális koordinátarendszerben mindkét rúdelem dinamikus mervségi mátrixa azonos, hiszen a keresztmetszeti jellemzők és az elemek hossza is azonos.

A gerjesztés körfrekvenciája a megadott teher alapján $\omega = 5$rad/s, amiből (5.85) képleteiből $\psi = 0.8165$ és $\lambda = 2.5298$. Ezek számításánál felhívjuk a figyelmet a mértékegységek illesztésére: az alap SI-mértékegységek esetén nem kell további átváltásokat végezni, ezért $EA = 150000$N és

$EI = 250000 \mathrm{Nm}^2$ lett behelyettesítve.

Ugyanígy, (5.86) képleteivel az F segédfüggvények értékei:

$$\begin{array}{lll} F_1 = 2.3213, & F_2 = 3.5802, & F_3 = 7.4000, \\ F_4 = -3.7148, & F_5 = -17.870, & F_6 = -3.8777. \end{array} \tag{5.89}$$

Ezeket felhasználva a lokális koordinátarendszerben a dinamikus merevségi mátrix (5.84) alapján mindkét rúdelem esetében:

$$\underline{\underline{\hat{K}}}^{lok} = \begin{bmatrix} 28771 & 0 & 0 & -42015 & 0 & 0 \\ 0 & -15147 & 58044 & 0 & -69806 & 115625 \\ 0 & 58044 & 223764 & 0 & -115625 & 145081 \\ -42015 & 0 & 0 & 28771 & 0 & 0 \\ 0 & -69806 & -115625 & 0 & -15147 & -58044 \\ 0 & 115625 & 145081 & 0 & -58044 & 223764 \end{bmatrix} \tag{5.90}$$

Ez egyben a 2-3-rúdelem dinamikus merevségi mátrixa a globális koordinátarendszerben.

Az 1-2-rúdelem merevségi mátrixát a transzformáló-mátrixszal történő szorzás helyett a szabadsági fokok módosításával is megkaphatjuk két lépésben. Az 5.9.c) ábrának megfelelően először cseréljük fel a lokális x- és y-koordinátákat. Ezzel az első szabadságfokot a másodikkal, a negyediket pedig az ötödikkel cseréljük fel, vagyis az előző mátrix első sorát a másodikkal, majd első oszlopát a másodikkal kell felcserélni, illetve a negyedik sort az ötödikkel, majd a negyedik oszlopot az ötödikkel kell felcserélni. Ennek eredménye:

$$\underline{\underline{\hat{K}}}_{12}^{x'y'} = \begin{bmatrix} -15147 & 0 & 58044 & -69806 & 0 & 115625 \\ 0 & 28771 & 0 & 0 & -42015 & 0 \\ 58044 & 0 & 223764 & -115625 & 0 & 145081 \\ -69806 & 0 & -115625 & -15147 & 0 & -58044 \\ 0 & -42015 & 0 & 0 & 28771 & 0 \\ 115625 & 0 & 145081 & -58044 & 0 & 223764 \end{bmatrix} \tag{5.91}$$

Ezután a balra mutató x' irányt kell megfordítani, hogy a globális X-et kapjuk, vagyis a mostani első és negyedik szabadságfok irányát változtatjuk. Az előző mátrix első és negyedik sorait és oszlopait ezért -1-gyel be kell szorozni:

$$\underline{\underline{\hat{K}}}_{12}^{gl} = \begin{bmatrix} -15147 & 0 & -58044 & -69806 & 0 & -115625 \\ 0 & 28771 & 0 & 0 & -42015 & 0 \\ -58044 & 0 & 223764 & 115625 & 0 & 145081 \\ -69806 & 0 & 115625 & -15147 & 0 & 58044 \\ 0 & -42015 & 0 & 0 & 28771 & 0 \\ -115625 & 0 & 145081 & 58044 & 0 & 223764 \end{bmatrix} \tag{5.92}$$

Ezután következik a szerkezet teljes mátrixának kompilálása. Blokkonként vizsgálva:

- az 11-blokk az (5.92) bal felső blokkja lesz,

- az 12-blokk az (5.92) jobb felső blokkja lesz,
- a 21-blokk az (5.92) bal alsó blokkja lesz,
- a 22-blokk az (5.92) jobb alsó és az (5.90) bal felső blokkjának összege lesz,
- a 23-blokk az (5.90) jobb felső blokkja lesz,
- a 32-blokk az (5.90) bal alsó blokkja lesz,
- a 33-blokk az (5.90) jobb alsó blokkja lesz.

Ennek eredménye:

$$\underline{\underline{\hat{K}}}^{all} = \left[\begin{matrix} -15147 & 0 & -58044 & \dots \\ 0 & 28771 & 0 & \dots \\ -58044 & 0 & 223764 & \dots \\ -69806 & 0 & 115625 & \dots \\ 0 & -42015 & 0 & \dots \\ -115625 & 0 & 145081 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \dots & -69806 & 0 & -115625 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & -42015 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 115625 & 0 & 145081 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 13624 & 0 & 58044 & -42015 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 13624 & 58044 & 0 & -69806 & 115625 \\ \dots & 58044 & 58044 & 447529 & 0 & -115625 & 145081 \\ \dots & -42015 & 0 & 0 & 28771 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & -69806 & -115625 & 0 & -15147 & -58044 \\ \dots & 0 & 115625 & 145081 & 0 & -58044 & 223764 \end{matrix}\right] \tag{5.93}$$

5.3.4. Peremfeltételek, megoldás

A harmonikus gerjesztés esetére meghatározott dinamikus merevségi mátrixban a támaszokat, peremfeltételeket a statikus merevségi mátrixnál látotthoz hasonló módon kell figyelembe venni.

Homogén peremfeltételek, azaz zérus előírt elmozdulások esetén az érintett szabadságfokhoz tartozó sort és oszlopot törölhetjük a mátrixból és a megmaradó mátrixot *kondenzálhatjuk.* Ezzel egyidejűleg az elmozdulások amplitúdóvektorából és a csomóponti terhek amplitúdóvektorából is törölni kell az érintett elemeket és csökkenteni a vektorok méretét. Ennek a módszernek az áll a hátterében, hogy a nullával szorzódó oszlopok nem befolyásolják a $\underline{\underline{\hat{K}}}\underline{u}_0 = \underline{q}_0$ egyenlet bal oldalán a szorzat eredményét, az előírt szabadságfokra pedig egy reakcióerő működik, ami az egyenletrendszer jobb oldalát befolyásolná egy ismeretlen amplitúdóval, amit az egyenlet kihagyásával (a mátrix sorának törlésével) félre tudunk tenni, amíg az elmozdulások amplitúdóját meg nem határozzuk.

Inhomogén peremfeltételekről jelen esetben kiemeljük, hogy azoknak támaszok ω körfrekvenciájú rezgésének kell lennie, így az előírt amplitúdót a szabadságfokhoz tartozó mátrixoszloppal megszorozva a kapott vektort átvihetjük a jobb oldalra, ezzel módosítva a tehervektort. Ezután a bal oldalon a mátrix érintett sorát és oszlopát törölve csökkenthetjük annak méretét a homogén peremfeltételeknél látott módon.

A peremfeltételek figyelembevétele után megmaradó

$$\underline{\underline{\hat{K}}}\underline{u}_0 = \underline{q}_0 \tag{5.94}$$

egyenletben a vektorok csak a *belső* szabadságfokok elmozdulásainak amplitúdóját és a szabadságfokokra redukált erők amplitúdóját tartalmazzák. Az egyenletrendszer megoldása a lineáris egyenletrendszer megoldásának megfelelően történik, azaz formálisan:

$$\underline{u}_0 = \underline{\underline{\hat{K}}}^{-1}\underline{q}_0. \tag{5.95}$$

Ezt felhasználva az elmozulás (5.51) szerinti feltételezett alakjában:

$$\underline{u} = \underline{u}_0 \cos(\omega t). \tag{5.96}$$

Természetesen, ha (5.50) egyenletben a harmonikus gerjesztés időfüggése nem $\cos(\omega t)$, hanem másik ω körfrekvenciájú függvény[3], akkor (5.96) képletében is az a függvény szerepel.

5.3.3. Példa (Keret válasza a harmonikus gerjesztésre)**.** *Számítsuk ki az 5.9.a) ábrán látható tartó harmonikus gerjesztésre adott válaszát.*

Megoldás
A szerkezet teljes dinamikus merevségi mátrixát az 5.3.2. példában már felírtuk (lásd (5.93)), most csak a peremfeltételek figyelembevétele és az egyenletrendszer megoldása van hátra.

Az első és a harmadik csomópontok egyaránt mereven befogottak, ezért az ezekhez a csomópontokhoz tartozó u_1, v_1, φ_1 és u_3, v_3, φ_3 elmozdulások értéke nulla, míg az ugyanezen szabadságfokokhoz tartozó egyenleteket félre szoktuk tenni, azokat csak a reakciók esetleges számításához használnánk. A zérus elmozdulások miatt a használandó $\underline{\underline{\hat{K}}}$ dinamikus mátrixhoz a teljes szerkezet mátrixából törölnünk kell az 1.-3. és 7.-9. oszlopokat, az ismeretlen reakciók miatt pedig ugyanezen sorokat.

A megmaradó lineáris egyenletrendszer, azaz (5.94) az alábbi számértékekkel adódik:

$$\begin{bmatrix} 13624 & 0 & 58044 \\ 0 & 13624 & 58044 \\ 58044 & 58044 & 447529 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.97}$$

A szerkezet topológiájának ismeretében előre tudható volt, hogy az első csomópont három szabadságfokához és a harmadik csomópont három szabadságfokához tartozó sorokat és oszlopokat törölni fogjuk, így lehetett volna eleve csak a fenti képletben megmaradó mátrixot kompilálni: ekkor a később elhagyandó helyre beírandó elemi dinamikus merevségi mátrixele-

[3] Például $\sin(\omega t)$, vagy $\cos(\omega t - \varphi)$

meket egyszerűen kihagytuk volna, így esetünkben az 5.3.2. példában csak a „22-blokk az (5.92) jobb alsó és az (5.90) bal felső blokkjának összege lesz" lépést hajtottuk volna végre.

Az egyenletrendszer megoldásaként a válasz amplitúdóvektora:

$$\underline{u}_0 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03857 \\ -0.03123 \\ 0.00905 \end{bmatrix} \tag{5.98}$$

a válasz pedig:

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} -0.03857 \\ -0.03123 \\ 0.00905 \end{bmatrix} \cos(5t) \tag{5.99}$$

5.3.5. Szabadrezgés megoldása

Az (5.55) egyenletnek egy speciális esete, ha a jobb oldalon a $\underline{q}_0$ vektor zérusvektor. Ez terheletlen szerkezetet és így szabadrezgést jelent. Ilyenkor a

$$\underline{\underline{\hat{K}}}\underline{u}_0 = \underline{0} \tag{5.100}$$

egyenletet kell megoldanunk, és két eset lehetséges. Ha az előírt ω körfrekvenciával számolt $\underline{\underline{\hat{K}}}$ nem szinguláris, akkor csak a triviális $\underline{u}_0 = \underline{0}$ megoldás létezik, azaz nem alakul ki rezgés.

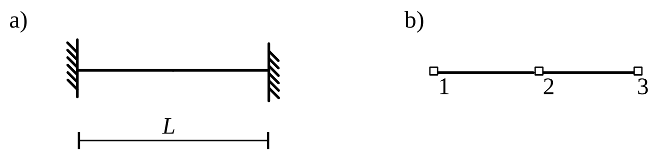
Ha az előírt ω körfrekvenciával számolt $\underline{\underline{\hat{K}}}$ szinguláris, akkor viszont a zérus sajátértékhez tartozó sajátvektornak megfelelő rezgésalak jön létre. Közben persze a tehervektor zérus, azaz a szerkezet terheletlen, így ez a rezgés egy szabadrezgés, aminek a sajátkörfrekvenciája megegyezik ω-val. A sajátvektorok nem egyértelmű volta miatt ennek a szabadrezgésnek az amplitúdója természetesen bármekkora lehet.

Terheletlen szerkezeten persze kevés értelme van a gerjesztés körfrekvenciájáról beszélni, a szabadrezgésnél jellemzően nem ismerjük a sajátkörfrekvenciákat előzetesen. Az ω körfrekvenciát paraméterként kezelve lehetőség van a diszkretizált szerkezet sajátrezgéseinek meghatározására. A paraméteresen felírt $\underline{\underline{\hat{K}}}(\omega)$ dinamikus merevségi mátrix determinánsát kifejtve, annak zérushelyei, azaz a

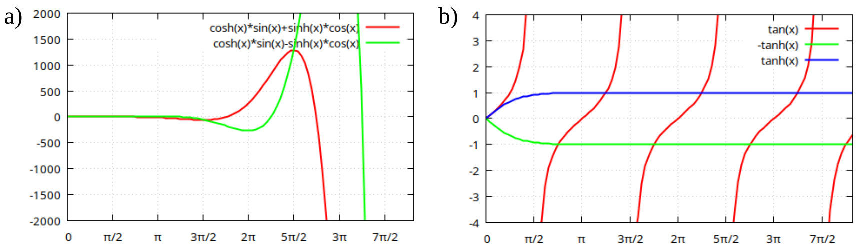
$$\det\left(\underline{\underline{\hat{K}}}(\omega)\right) = 0 \tag{5.101}$$

egyenlet megoldásai a szerkezet sajátkörfrekvenciáit adják meg. A sajátkörfrekvenciát behelyettesítve (5.100) egyenlet mátrixába, a hozzá kapcsolódó sajátvektor a rezgésalakot határozza meg.

Kiemeljük, hogy (5.101) egyenlete egy nemlineáris egyenletet eredményez, aminek végtelen sok megoldása lehet, azaz, bár véges számú szabadságfokkal dolgozunk, a folytonos szerkezet végtelen sok rezgésalakját megkaphatjuk. Ugyanakkor még így is előfordulhat, hogy egyes rezgésalakok kimaradnak. Ha egy rezgésalak olyan, hogy mindegyik szabadságfok mozdulatlan benne, akkor az triviális $\underline{u}_0$ vektort eredményezne, amihez nem szükséges a szinguláris együtthatómátrix.



5.10. ábra. Rúdszerkezet szabadrezgése a pontos dinamikus merevségi mátrixszal. a) A befogott-befogott rúd. b) Az elemekre bontás és a csomópontok.



5.11. ábra. A hajlítórezgés frekvenciaparaméterének függvényei a sajátkörfrekvenciák számításához: a) a dinamikus merevségi mátrix determinánsából kapott $\cosh\lambda \sin\lambda \pm \sinh\lambda \cos\lambda$ függvények; b) az átalakított egyenletek $\tan\lambda$, $\mp\tanh\lambda$ függvényei.

5.3.4. Példa (Rúdszerkezet szabadrezgése)**.** *Határozzuk meg az 5.10.a) ábrán látható tartó sajátkörfrekvenciáit és rezgésalakjait a dinamikus merevségi mátrix segítségével, ha $EA = 150kN$, $EI = 250kNm^2$, $\mu = 250kg/m$, $L = 4m$.*

Megoldás
Bontsuk a rudat két elemre az 5.10.b) ábra szerint.

A szabadrezgés vizsgálatához ψ és λ értékét ω függvényében felírt paraméterként kell kezelni. Ezért mindkét rúdelemnek azonos lesz a dinamikus merevségi mátrixa (lásd (5.84), ahol $\ell = L/2$):

$$\underline{\underline{\hat{K}}}^{gl} =$$
$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell}\frac{\psi}{\tan\psi} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell}\frac{\psi}{\sin\psi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{\ell^3}F_6(\lambda) & -\frac{EI}{\ell^2}F_4(\lambda) & 0 & \frac{EI}{\ell^3}F_5(\lambda) & \frac{EI}{\ell^2}F_3(\lambda) \\ 0 & -\frac{EI}{\ell^2}F_4(\lambda) & \frac{EI}{\ell}F_2(\lambda) & 0 & -\frac{EI}{\ell^2}F_3(\lambda) & \frac{EI}{\ell}F_1(\lambda) \\ -\frac{EA}{\ell}\frac{\psi}{\sin\psi} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell}\frac{\psi}{\tan\psi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{\ell^3}F_5(\lambda) & -\frac{EI}{\ell^2}F_3(\lambda) & 0 & \frac{EI}{\ell^3}F_6(\lambda) & \frac{EI}{\ell^2}F_4(\lambda) \\ 0 & \frac{EI}{\ell^2}F_3(\lambda) & \frac{EI}{\ell}F_1(\lambda) & 0 & \frac{EI}{\ell^2}F_4(\lambda) & \frac{EI}{\ell}F_2(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{5.102}$$

Ezután következik a szerkezet teljes mátrixának kompilálása. Blokkonként vizsgálva:

- az 11-blokk az (5.102) bal felső blokkja lesz,
- az 12-blokk az (5.102) jobb felső blokkja lesz,

- a 21-blokk az (5.102) bal alsó blokkja lesz,
- a 22-blokk az (5.102) jobb alsó és az (5.102) bal felső blokkjának összege lesz,
- a 23-blokk az (5.102) jobb felső blokkja lesz,
- a 32-blokk az (5.102) bal alsó blokkja lesz,
- a 33-blokk az (5.102) jobb alsó blokkja lesz.

A peremfeltételek figyelembevétele után csak a 22-blokk marad, ennek tudatában csak ezt a blokkot mutatjuk:

$$\underline{\underline{\hat{K}}} = \begin{bmatrix} 2\frac{EA}{\ell}\frac{\psi}{\tan\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 2\frac{EI}{\ell^3}F_6(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{EI}{\ell}F_2(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{5.103}$$

Amint látjuk, a főátlón kívüli 23 és 32 elemek kinullázódtak. Ennek a szerkezet szimmetriája az oka: a középső csomópont bármilyen eltolódása szimmetrikus alakot eredményez, amiből a csomópontra két oldalról átadódó nyomatékok kiegyenlítik egymást, ugyanígy a csomóponti elforduláshoz ferdén szimmetrikus alak tartozik, az abból származó nyíróerők is éppen kiegyensúlyozzák egymást.

A szabadrezgéshez ezután az alábbi homogén lineáris egyenletrenszer tartozik:

$$\begin{bmatrix} 2\frac{EA}{\ell}\frac{\psi}{\tan\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 2\frac{EI}{\ell^3}F_6(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{EI}{\ell}F_2(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.104}$$

A homogén egyenletrendszernek akkor van nemtriviális megoldása, ha az együtthatómátrix determinánsa nulla. Diagonálmátrixról lévén szó, a determináns a főátlóbeli tagok szorzata:

$$\det\left(\underline{\underline{\hat{K}}}\right) = \left(2\frac{EA}{\ell}\frac{\psi}{\tan\psi}\right)\left(2\frac{EI}{\ell^3}F_6(\lambda)\right)\left(2\frac{EI}{\ell}F_2(\lambda)\right). \tag{5.105}$$

Ez a szorzat akkor zérus, ha valamelyik szorzótényezője zérus, így három lehetőség van:

- $\frac{\psi}{\tan\psi} = 0$
- $F_6(\lambda) = 0$, ami az (5.86) szerinti függvény számlálója alapján egyenértékű a $\cosh\lambda\sin\lambda + \sinh\lambda\cos\lambda = 0$ feltétellel.
- $F_2(\lambda) = 0$, ami az (5.86) szerinti függvény számlálója alapján egyenértékű a $\cosh\lambda\sin\lambda - \sinh\lambda\cos\lambda = 0$ feltétellel.

Az első esethez az $[1 \quad 0 \quad 0]^T$ sajátvektor tartozik, azaz $u_2 = 1$, $v_2 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ezek a rúd normálrezgései. A második esethez a $[0 \quad 1 \quad 0]^T$ sajátvektor tartozik, azaz $u_2 = 0$, $v_2 = 1$, $\varphi_2 = 0$, míg a harmadik esethez a $[0 \quad 0 \quad 1]^T$ sajátvektor tartozik, azaz $u_2 = 0$, $v_2 = 0$, $\varphi_2 = 1$, ezek a rúd hajlítórezgései.

Normálrezgés esetén a $\frac{\psi}{\tan\psi} = 0$ egyenlet nemtriviális megoldásai azok, amikor $\tan\psi \to \infty$. Ebből a

$$\psi_j = \frac{(2j-1)\pi}{2} \tag{5.106}$$

megoldás adódik a frekvenciaparaméterre. Fejezzük ki az ω_{0j}^N sajátkörfrekvenciát[a] (lásd (5.85)):

$$\psi_j = \sqrt{\frac{\omega_{0j}^{N2}\mu\ell^2}{EA}} \to \omega_{0j}^N = \psi_j\sqrt{\frac{EA}{\mu\ell^2}}, \tag{5.107}$$

majd helyettesítsük be ψ_j fenti értékét és az $\ell = L/2$-t:

$$\omega_{0j}^N = (2j-1)\pi\sqrt{\frac{EA}{\mu L^2}}. \tag{5.108}$$

Látjuk, hogy a mindkét végén megtámasztott rúd (4.36) szerinti sajátkörfrekvenciáiból csak a páratlanokat kaptuk meg, amikhez páratlan szinuszfélhullám rezgésalak tartozik. A páros félhullámot eredményező körfrekvenciák és frekvenciaparaméterek esetén a $\tan\psi$ értéke nullává válna, így a $\frac{\psi}{\tan\psi}$ értéke látszólag végtelen lenne. Az (5.104) szerinti mátrix ennél többet nem segít nekünk. Ugyanakkor a 2. csomópont helyét kis mértékben elmozdítva felismerhető, hogy ezzel a két rúdelem hossza ellentétes irányba változik, így a kompilálás során az egyik elemből számolt $\frac{EA}{\ell'}\frac{\psi'}{\tan\psi'}$ és a másik elemből számolt $\frac{EA}{\ell''}\frac{\psi''}{\tan\psi''}$ nevezői ellentétes irányból közelítenek nullához. A csomópontot közelítve az eredeti helyéhez tehát a mátrix 11-eleme $-\infty+\infty$ értékhez tart, amit a korábbi összegzés nem vett figyelembe, de a szerkezeten ez egy zérus értéket eredményezne.

Hajlítórezgés esetén a

$$\cosh\lambda\sin\lambda + \sinh\lambda\cos\lambda = 0$$

, illetve a

$$\cosh\lambda\sin\lambda - \sinh\lambda\cos\lambda = 0$$

egyenletek bel oldalát λ függvényében ábrázolva egy exponenciális burkolóba rajzolt, harmonikushoz hasonlóan változó függvényt kapunk, amit nehéz kényelmesen láthatóra nagyítani ahhoz, hogy egy iterációs megoldáskereséshez felvegyük a kezdeti értéket. Ennek illusztrálására az 5.11.a) ábrán bemutatjuk e függvények jellegét. Ennél célszerűbb átalakítani az egyenleteket oly módon, hogy a $\sinh\lambda\cos\lambda$ tagot átvisszük a másik oldalra és leosztjuk az egyenleteket $\cosh\lambda\cos\lambda$-val. Az így kapott

$$\tan\lambda = -\tanh\lambda, \qquad \tan\lambda = \tanh\lambda \tag{5.109}$$

függvényeket az 5.11.b) ábrán ábrázoltunk. Az a) és b) ábrát összehasonlítva látható az utóbbi módszer előnye: az átalakított függvények egy jól behatárolható tartományban változnak, és a közelítő megoldások leolvasása is könnyebb.. A $\mp \tanh \lambda$ függvény abszolútértéke nem haladja meg az 1-et, nagy λ értékeknél közel 1, így a függvények metszéspontjai (ahol egyik egyenlőség teljesül) a $\mp \tan \lambda \approx 1$ értékek közelében lesz, ahogy azt a 4.2.2. példában is láthattuk.

[a] A normál- és a hajlítórezgések sajátkörfrekvenciái egymásba fűződő sorozatot alkothatnak, ezért a sorszámuk egymástól is függ, ezt elkerülendő jelöljük felső indexben a húzást.

5.4. Tömegmátrix közelítése

Láttuk, hogy a pontos dinamikus merevségi mátrixot és abból eredően a pontos, frekvenciafüggő tömegmátrixot hogyan lehet egy adott körfrekvenciájú harmonikus gerjesztés esetén előállítani. Most nézzük meg, hogy mi történik, ha a gerjesztés nem harmonikus.

Ilyen esetben nem alakul ki állandósult rezgés, ezért a szerkezet esetében sem beszélhetünk dinamikai merevségi mátrixról, az elemek szintjén pedig dinamikus rezgésalakokról. Emiatt a pontos tömegmátrix (5.74) szerinti képlete sem használható, hiszen a dinamikus alakfüggvények híján azk (5.57) szerinti mátrixa sem áll rendelkezésre.

5.4.1. Konzisztens tömegmátrix

Ilyenkor tehát közelítő tömegmátrixot kell használnunk. A közelítés egy természetes módja, hogy az $\hat{\underline{\underline{N}}}(x)$ mátrixot helyettesítjük egy megfelelő mátrixszal. Ha erre a célra a statikus alakfüggvények (5.32) szerinti $\underline{\underline{N}}(x)$ mátrixát használjuk, azaz azokat a függvényeket amiket a statikus merevségi mátrix számításához is alkalmaztunk. Az így kapott tömegmátrixot nevezzük *konzisztens tömegmátrixnak*:

$$\boxed{\underline{\underline{M}} = \int_0^{l_{jk}} \underline{\underline{N}}^T(x) \underline{\underline{\mu}} \underline{\underline{N}}(x) dx} \tag{5.110}$$

ami megnevezésében és képletében is azonos a (3.502) képletben bevezetettel. Mivel általában ezt használjuk, a harmonikus esetre levezetett pontos mátrixot pedig a kalappal megkülönböztetjük, ezért nem jelöljük külön, hogy a konzisztens tömegmátrixról beszélünk. A konzisztens tömegmátrix elemei a korábbi (3.503) képlettel megegyezően:

$$\underline{\underline{M}} = \mu l_{jk} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & \frac{11}{210} l_{jk} & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420} l_{jk} \\ 0 & \frac{11}{210} l_{jk} & \frac{1}{105} l_{jk}^2 & 0 & \frac{13}{420} l_{jk} & -\frac{1}{140} l_{jk}^2 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{13}{420} l_{jk} & 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210} l_{jk} \\ 0 & -\frac{13}{420} l_{jk} & -\frac{1}{140} l_{jk}^2 & 0 & -\frac{11}{210} l_{jk} & \frac{1}{105} l_{jk}^2 \end{bmatrix}. \tag{5.111}$$

Harmonikus gerjesztés esetén a konzisztens tömegmátrixszal a dinamikus merevségi mátrixot közelítőleg tudjuk meghatározni:

$$\underline{\underline{\hat{K}}}(\omega) = \underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{\hat{M}}} \approx \underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}. \tag{5.112}$$

Az ω^2-es tag miatt természetesen a közelítő dinamikai merevségi mátrix továbbra is frekvenciafüggő.

5.4.2. A konzisztens tömegmátrix hibája

Harmonikus gerjesztés esetén ismerjük a dinamikus merevségi mátrix (5.76) szerinti pontos és (5.112) szerinti közelítő képletét, így számítható a közelítés hibája. A két mátrixot kivonva egymásból:

$$\underline{\underline{\hat{K}}}(\omega) - \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right) = \underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{\hat{M}}} - \underline{\underline{K}} + \omega^2 \underline{\underline{M}} = -\omega^2 \left(\underline{\underline{\hat{M}}} - \underline{\underline{M}}\right) \tag{5.113}$$

azt látjuk, hogy ez egyben a tömegmátrix közelítése miatti hibát is megadja. Az (5.113) szerinti különbséget elemenként vizsgálhatjuk oly módon, hogy a pontos dinamikus merevségi mátrix adott elemét a ψ vagy λ frekvenciaparaméter szerint Taylor-sorba fejtjük[4].

Ennek menete minden elem esetében hasonló és a következtetések is azonosak, ezért csak egy elemen mutatjuk be. A pontos dinamikus merevségi mátrix 3-6 eleme (5.84) szerint:

$$K_{36} = \frac{EI}{\ell} F_1(\lambda) = \frac{EI}{\ell} \lambda \frac{\sin\lambda - \sinh\lambda}{\cos\lambda\cosh\lambda - 1}, \tag{5.114}$$

amit λ szerint sorbafejtve:

$$\hat{K}_{36} = \frac{EI}{\ell}\left(2 + \frac{\lambda^4}{140} + \frac{1097\lambda^8}{69854400} + \frac{899\lambda^{12}}{28252224000} + \mathcal{O}(\lambda^{13})\right) \tag{5.115}$$

adódik. Ennek első tagja láthatóan a statikus merevségi mátrix $3,6$ elemének $\frac{2EI}{\ell}$ értéke. A második elem a $\lambda^4 = \frac{\omega^2\mu\ell^4}{EI}$ összefüggés felhasználásával $\frac{\omega^2\mu\ell^3}{140}$ alakra egyszerűsíthető, ami éppen a konzisztens tömegmátrix 3-6 elemének ω^2-szerese. A konzistens tömegmátrixszal számolt közelítő dinamikus merevségi mátrix tehát a pontos dinamikus merevségi mátrix Taylor-sorral való közelítése az első két elemmel, a további elemek pedig mind a hibát fejezik ki. Az (5.115) közelítés harmadik és azt követő elemeit írjuk át úgy, hogy a λ frekvenciaparaméter helyett a gerjesztés körfrekvenciáját használjuk (lásd (5.85)):

$$\hat{K}_{36} - (K_{36} - \omega^2 M_{36}) = +\frac{1097\omega^4\mu^2\ell^7}{69854400EI} + \frac{899\omega^6\mu^3\ell^{11}}{28252224000EI^2} + \mathcal{O}(\omega^7). \tag{5.116}$$

Ezt $-\omega^2$-tel leosztva a konzisztens tömegmátrix 3-6 elemének hibája:

$$\hat{M}_{36} - M_{36} = -\frac{1097\omega^2\mu^2\ell^7}{69854400EI} - \frac{899\omega^4\mu^3\ell^1 1}{28252224000EI^2} + \mathcal{O}(\omega^5. \tag{5.117}$$

[4]Ez a sorba fejtés csak leírva hangzik olyan könnyűnek: a dinamikus merevségi mátrix elemei a $\psi = 0$ és a $\lambda = 0$ helyeken $0/0$ alakúak, így már a függvényérték számításához is a l'Hospital-szabályt kell esetleg többször is használni, ahogy aztán később a deriváltaknál is. A bemutatott példához is számítógépes segítséget használtunk (név szerint a WolframAlpha-t).

A hiba nagyságrendjét tekintve azt mondhatjuk, hogy ugyanazon szerkezeten számolva a hiba nagyobb, ha a körfrekvencia nagyobb, vagy ha a rúdelem ℓ hosszúsága nagyobb. Ez áll a hátterében annak az ökölszabálynak, hogy olyan felbontást kell alkalmazni, hogy minden egyes rúdelem, mint befogott-befogott tartó első sajátkörfrekvenciája legyen nagyobb a számítás során figyelembe vett legnagyobb körfrekvenciánál.

Ez a pontossági következtetés a sajátkörfrekvenciák számítására is átvihető. A konzisztens tömegmátrixszal az alacsonyabb sajátkörfrekvenciák ugyanazon szerkezeten azonos felbontás mellett kisebb hibával számíthatók, mint a magasabb sajátkörfrekvenciák. Több elemre bontva ugyanazon szerkezetet az elemméret csökken, így a tömegmátrix, és ezzel a sajátkörfrekvenciák számítása is pontosabb.

5.4.3. Konzisztens tömegmátrix energiaalapú levezetése

A konzisztens merevségi mátrix egy másik előállítási módja a rúdelem mozgási energiájából származtatható. Ahogy a rúdelem elmozdulását (5.1) alapján a csomóponti szabadságfokok elmozdulása jellemzi, úgy a mozgást a csomóponti szabadságfokok sebességével írhatjuk fel:

$$\underline{\dot{u}}_{jk}(t) = \begin{bmatrix} \dot{u}_{jx}(t) \\ \dot{v}_{jy}(t) \\ \dot{\varphi}_{jz}(t) \\ \dot{u}_{ky}(t) \\ \dot{v}_{ky}(t) \\ \dot{\varphi}_{kz}(t) \end{bmatrix}. \tag{5.118}$$

Ezekből a szabadságfokonkénti sebességekből kell a rúd hossza mentén az egyes keresztmetszetek sebességeit interpolálni. Erre egy természetes ötlet, hogy a statikus alakfüggvényeket használjuk, így:

$$\underline{\dot{u}}(x,t) = \begin{bmatrix} \dot{u}(x,t) \\ \dot{v}(x,t) \end{bmatrix} = \underline{\underline{N}}(x)\underline{\dot{u}}_{jk}(t). \tag{5.119}$$

Ez persze csak közelítés, hiszen a valóságban a rúd sem polinomfüggvénnyel leírható alakkal rezeg és a sebességfüggvény sem úgy változik a hossz mentén

Egy dx elemi rúdszakasz mozgási energiája:

$$dK = \frac{\mu}{2}\left(\dot{u}^2(x,t) + \dot{v}^2(x,t)\right) = \frac{1}{2}\underline{\dot{u}}^T(x,t)\underline{\underline{\mu}}\underline{\dot{u}}(x,t), \tag{5.120}$$

ahol $\underline{\underline{\mu}}$ az (5.75) képlettel definiált fajlagos tehetetlenségi mátrix. A rúdelem mozgási energiája az elemi szakaszok mozgási energiájának integrálásából:

$$K(t) = \int_0^{\ell_{jk}} dT = \frac{1}{2}\int_0^{\ell_{jk}} \underline{\dot{u}}^T(x,t)\underline{\underline{\mu}}\underline{\dot{u}}(x,t)dx, \tag{5.121}$$

amibe helyettesítsük be az sebességek (5.119) szerinti közelítését:

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell_{jk}} \underline{\dot{u}}_{jk}^T(t)\underline{\underline{N}}^T(x)\underline{\underline{\mu}}\underline{\underline{N}}(x)\underline{\dot{u}}_{jk}(t)dx. \tag{5.122}$$

A csomóponti sebességek $\dot{\underline{u}}_{jk}(t)$ vektora a hossz mentén nem változik, így az kiemelhető az integrálás mögé, transzponáltja pedig az integrálás elé:

$$K(t) = \frac{1}{2}\dot{\underline{u}}_{jk}^T(t) \int_0^{\ell_{jk}} \underline{\underline{N}}^T(x)\underline{\underline{\mu}}\,\underline{\underline{N}}(x)dx\dot{\underline{u}}_{jk}(t). \tag{5.123}$$

Korábban már láttuk (3.210) képletében, hogy többszabadságfokú rendszerben a mozgási energiát a

$$K(t) = \frac{1}{2}\dot{\underline{u}}_{jk}^T(t)\underline{\underline{M}}\dot{\underline{u}}_{jk}(t). \tag{5.124}$$

képlettel számolhatjuk, ebből viszont már következik, hogy a sebességek rúdhossz menti interpolálása esetén a tömegmátrixot az

$$\underline{\underline{M}} = \int_0^{\ell_{jk}} \underline{\underline{N}}^T(x)\underline{\underline{\mu}}\,\underline{\underline{N}}(x)dx \tag{5.125}$$

képlettel számolhatjuk, ez pedig megegyezik a konzisztens tömegmátrix (5.110) képletével.

5.5. Végeselemmódszer

A rúdelemek tömegmátrixának előállításához használt jelölésrendszerünk olyan, hogy a megfogalmazás általánosítható a végeselemmódszerre, így más mechanikai feladatokra is.

Az általánosság kedvéért jelölje a vizsgálandó tartományt Ω, melynek az elemre jutó része Ω_e. Ebben a tartományban a koordinátákat jelölje az $\underline{x}$ vektor. A lényeges elmozdulásfüggvények mechanikai feladattól függő vektora: $\underline{u}(\underline{x}, t)$

A csomópontokban értelmezett szabadságfokok a mechanikai modelltől és a választott végeselemtől is függenek. A szabadságfokok $\underline{v}(t)$ vektorba gyűjtött elmozdulásaiból az elmozdulásfüggvények interpolálását az elemen belül a bázisfüggvények $\underline{\underline{N}}(\underline{x})$ mátrixával végezzük[5]:

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{N}}(\underline{x})\underline{v}(t). \tag{5.126}$$

A bázisfüggvényektől azt várjuk el, hogy a hozzájuk tartozó szabadságfokban az értékük 1 legyen, a többi szabadságfokban pedig 0. Így az (5.126) szerinti közelítés a csomópontokban visszaadja a $\underline{v}(t)$ vektor szerinti értékeket.

Az $\underline{\varepsilon}(\underline{x}, t)$ vektorba gyűjtött alakváltozásokat a mechanikai modelltől függően felírandó $\underline{\underline{L}}$ operátormátrixszal képezhetjük az elmozdulásokból:

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{L}}\underline{u}(\underline{x}, t), \tag{5.127}$$

ugyanezt az operátormátrixot használjuk a $\underline{\underline{B}}(\underline{x})$ alakváltozási mátrix számítására is:

$$\underline{\underline{B}}(\underline{x}) = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{N}}(\underline{x}). \tag{5.128}$$

[5] A bázisfüggvények kiválasztásánál többféle koordinátarendszert (globális, eltolt lokális, paraméteres, természetes) használhatunk, ami a láncszabályon keresztül hatással lehet az alakváltozási mátrix számítására, illetve az integrálási tartomány változása miatt a merevségi mátrix, a tömegmátrix és a csomópontra redukált tehervektor számítására is. Ezek nem dinamikai kérdések, így ennél a lábjegyzetnél bővebben itt nem foglalkozunk velük.

Ily módon az alakváltozások a csomóponti elmozdulásokból az $\underline{\varepsilon}(\underline{x},t) = \underline{\underline{B}}(\underline{x})\underline{v}(t)$ módon közelíthetők.

Az anyagi viselkedést két mátrix határozza meg. A mechanikai modelltől függő $\underline{\underline{D}}$ anyagi, vagy (kereszt)metszeti merevségi mátrix segítségével számolhatjuk a lényeges igénybevételeket, feszültségeket:

$$\underline{\sigma}(\underline{x},t) = \underline{\underline{D}}\underline{\varepsilon}(\underline{x},t). \tag{5.129}$$

Az elemi tehetetlenségeket (melyekből az $\underline{\ddot{u}}(\underline{x},t)$ elmozdulásonkénti gyorsulásokkal a tehetetlenségi erőket számolhatjuk) a $\underline{\underline{\mu}}$ mátrixba gyűjtjük.

Fenti mennyiségeket felhasználva az elemi merevségi mátrix:

$$\underline{\underline{K}} = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{B}}^T(\underline{x})\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{B}}(\underline{x})d\Omega. \tag{5.130}$$

Az elemi tömegmátrix pontos számításához a szabadságfokok harmonikus gerjesztésére kialakuló állandósult rezgés alakját kellene számítani. Az jellemzően a rúdszerkezeteknél látottnál sokkal bonyolultabb alakokat eredményezne, ezért csak kivételes esetben használják. Helyette a tömegmátrixot konzisztens tömegmátrixként állíthatjuk elő, azaz:

$$\underline{\underline{M}} = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{N}}^T(\underline{x})\underline{\underline{\mu}}\,\underline{\underline{N}}(\underline{x})d\Omega. \tag{5.131}$$

Ezután a szerkezet teljes merevségi mátrixának és tömegmátrixának kompilálása az egyes csomópont-párokhoz tartozó blokkokkal történik, a csomópontok elemi szinten és a teljes szerkezet szintjén meghatározott sorszámainak megfeleltetésével.

A csomóponti terhek $\underline{q}(t)$ vektorát az előírt $\underline{p}(\underline{x},t)$ teherből a

$$\underline{q}(t) = \int_{\Omega_e} \underline{\underline{N}}^T(\underline{x})\underline{p}(\underline{x},t)d\Omega \tag{5.132}$$

képlettel számíthatjuk, majd a teljes szerkezet tehervektorába kompiláljuk az elemeit.

A támaszok, peremfeltételek figyelembevétele a sorok és oszlopok eliminációjával és a mátrixok, vektorok kondenzálásával történik.

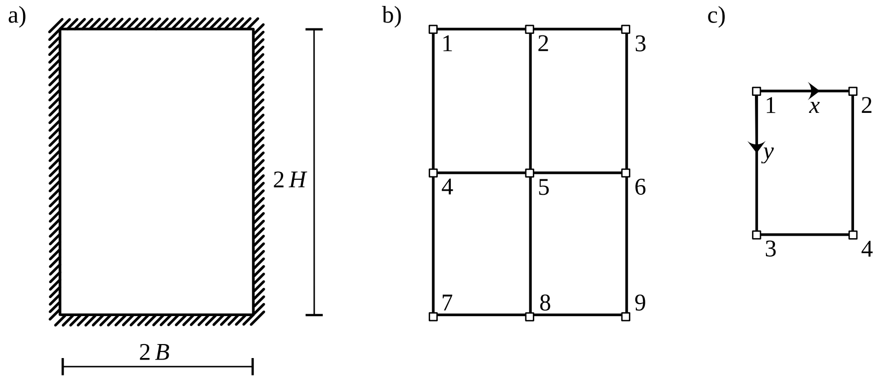
Végül a többszabadságfokú rendszer (3.13) szerinti differenciálegyenletét kell megoldani:

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{v}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{v}(t) = \underline{q}(t). \tag{5.133}$$

5.5.1. Példa (Tárcsa rezgése). *Határozzuk meg az 5.12.a) ábrán látható, síkbeli feszültségi állapotban levő tárcsa merevségi és konzisztens tömegmátrixát, valamint síkbeli rezgésének sajátkörfrekvenciáit és rezgésalakjait, ha a tárcsa vastagsága $b = 10mm$, $E = 210GPa$, $\nu = 0.3$, $\varrho = 7850kg/m^3$, $B = 2m$, $H = 3m$. A tárcsa az élei mentén meg van támasztva, használjunk négy elemet a számításhoz.*

Megoldás

A szerkezetet bontsuk az 5.12.b) ábra szerinti négy, azonos méretű négycsomópontos téglalapelemre. Az azonos elemméretek miatt az elemi mátrixokat elég egyszer meghatározni. Ehhez válasszuk az 5.12.c) ábra szerinti lokális koordinátarendszert, azaz a jobbra mutató x- és a lefelé mutató



5.12. ábra. Tárcsa rezgésvizsgálata végeselemmódszerrel. a) A vizsgált szerkezet. b) Az elemekre bontás és a csomópontok. c) Egy elemen belüli csomópontok számozása és a lokális koordinátarendszer.

y-tengelyt, miközben az origó a bal felső sarokban van. Az

$$\underline{u}(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$$

elmozdulásfüggvényeket tehát a

$$\underline{v}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \\ u_2(t) \\ v_2(t) \\ u_3(t) \\ v_3(t) \\ u_4(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix} \tag{5.134}$$

csomóponti elmozdulásokkal közelítjük. A bázisüggvények a lokális koordinátarendszerben

$$\begin{matrix} N_1(x,y) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{y}{3}\right), & N_2(x,y) = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{y}{3}\right), \\ N_3(x,y) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)\frac{y}{3}, & N_4(x,y) = \frac{x}{2}\frac{y}{3}, \end{matrix} \tag{5.135}$$

amikből a bázisfüggvények mátrixa (az (x,y)-függés jelölését a jobb átláthatóság érdekében elhagytuk):

$$\underline{\underline{N}}(x,y) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}. \tag{5.136}$$

A feladat egy tárcsa, így az $\underline{\underline{L}}$ operátormátrix alakja:

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \tag{5.137}$$

Az alakváltozási mátrix (5.136) és (5.137) felhasználásával:

$$\underline{\underline{B}}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{y-3}{6} & 0 & \frac{3-y}{6} & 0 & \frac{-y}{6} & 0 & \frac{y}{6} & 0 \\ 0 & \frac{x-2}{6} & 0 & \frac{-x}{6} & 0 & \frac{2-x}{6} & 0 & \frac{x}{6} \\ \frac{x-2}{6} & \frac{y-3}{6} & \frac{-x}{6} & \frac{3-y}{6} & \frac{2-x}{6} & \frac{-y}{6} & \frac{x}{6} & \frac{y}{6} \end{bmatrix}. \tag{5.138}$$

Az anyagi merevségi mátrix a síkbeli feszültségi állapotra és a b vastagságra tekintettel:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{Eb}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2308 & 692 & 0 \\ 692 & 2308 & 0 \\ 0 & 0 & 808 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \mathrm{N/m}. \tag{5.139}$$

A fajlagos tőmeg itt egységnyi felületre értendő, azaz a sűrűséget a lemezvastagsággal kell szorozni mindkét elmozdulási irányhoz külön-külön:

$$\underline{\underline{\mu}} = \begin{bmatrix} \varrho b & 0 \\ 0 & \varrho b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78.5 & 0 \\ 0 & 78,5 \end{bmatrix} \mathrm{kg/m^2} \tag{5.140}$$

Behelyettesítve (5.130) képletébe egy elem merevségi mátrixa:

$$\underline{\underline{K}}_e = \begin{bmatrix} 1333 & 375 & -1064 & -29 & 397 & 29 & -667 & -375 \\ 375 & 917 & 29 & -147 & -29 & -311 & -375 & -458 \\ -1064 & 29 & 1333 & -375 & -667 & 375 & 397 & -29 \\ -29 & -147 & -375 & 917 & 375 & -458 & 29 & -311 \\ 397 & -29 & -667 & 375 & 1333 & -375 & -1064 & 29 \\ 29 & -311 & 375 & -458 & -375 & 917 & -29 & -147 \\ -667 & -375 & 397 & 29 & -1064 & -29 & 1333 & 375 \\ -375 & -458 & -29 & -311 & 29 & -147 & 375 & 917 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \mathrm{N/m} \tag{5.141}$$

Az elem tömegmátrixa (5.131) képletébe történő behelyettesítés után:

$$\underline{\underline{M}}_e = \begin{bmatrix} 52.333 & 0 & 26.167 & 0 & 26.167 & 0 & 13.083 & 0 \\ 0 & 52.333 & 0 & 26.167 & 0 & 26.167 & 0 & 13.083 \\ 26.167 & 0 & 52.333 & 0 & 13.083 & 0 & 26.167 & 0 \\ 0 & 26.167 & 0 & 52.333 & 0 & 13.083 & 0 & 26.167 \\ 26.167 & 0 & 13.083 & 0 & 52.333 & 0 & 26.167 & 0 \\ 0 & 26.167 & 0 & 13.083 & 0 & 52.333 & 0 & 26.167 \\ 13.083 & 0 & 26.167 & 0 & 26.167 & 0 & 52.333 & 0 \\ 0 & 13.083 & 0 & 26.167 & 0 & 26.167 & 0 & 52.333 \end{bmatrix} \mathrm{kg} \tag{5.142}$$

A kompilálás során azt kell figyelembe vennünk, hogy minden csomópontban 2 szabadságfokot írtunk elő, így 2×2-es blokkokra kell bontani a mátrixokat. A kompilálás jelen esetben az alábbi blokkonkénti hozzáadásokat jelenti

- Az első (bal felső) elem esetén az $1,1$-blokkot az $1,1$-blokkhoz, az $1,2$-blokkot az $1,2$-blokkhoz, az $1,3$-blokkot az $1,4$-blokkhoz, az $1,4$-blokkot az $1,5$-blokkhoz, a $2,1$-blokkot a $2,1$-blokkhoz, a $2,2$-blokkot a $2,2$-blokkhoz, a $2,3$-blokkot a $2,4$-blokkhoz, a $2,4$-blokkot a $2,5$-blokkhoz, a $3,1$-blokkot a $4,1$-blokkhoz, a $3,2$-blokkot a $4,2$-blokkhoz, a $3,3$-blokkot a $4,4$-blokkhoz, a $3,4$-blokkot a $4,5$-blokkhoz, a $4,1$-blokkot az $5,1$-blokkhoz, a $4,2$-blokkot az $5,2$-blokkhoz, a $4,3$-blokkot az $5,4$-blokkhoz, a $4,4$-blokkot az $5,5$-blokkhoz adjuk.

- A második (jobb felső) elem esetén az $1,1$-blokkot a $2,2$-blokkhoz, az $1,2$-blokkot a $2,3$-blokkhoz, az $1,3$-blokkot a $2,5$-blokkhoz, az $1,4$-blokkot a $2,6$-blokkhoz, a $2,1$-blokkot a $3,2$-blokkhoz, a $2,2$-blokkot a $3,3$-blokkhoz, a $2,3$-blokkot a $3,5$-blokkhoz, a $2,4$-blokkot a $3,6$-blokkhoz, a $3,1$-blokkot az $5,2$-blokkhoz, a $3,2$-blokkot az $5,3$-blokkhoz, a $3,3$-blokkot az $5,5$-blokkhoz, a $3,4$-blokkot az $5,6$-blokkhoz, a $4,1$-blokkot a $6,2$-blokkhoz, a $4,2$-blokkot a $6,3$-blokkhoz, a $4,3$-blokkot a $6,5$-blokkhoz, a $4,4$-blokkot a $6,6$-blokkhoz adjuk.

- A harmadik (bal alsó) elem esetén az $1,1$-blokkot a $4,4$-blokkhoz, az $1,2$-blokkot a $4,5$-blokkhoz, az $1,3$-blokkot a $4,7$-blokkhoz, az $1,4$-blokkot a $4,8$-blokkhoz, a $2,1$-blokkot az $5,4$-blokkhoz, a $2,2$-blokkot az $5,5$-blokkhoz, a $2,3$-blokkot az $5,7$-blokkhoz, a $2,4$-blokkot az $5,8$-blokkhoz, a $3,1$-blokkot a $7,4$-blokkhoz, a $3,2$-blokkot a $7,5$-blokkhoz, a $3,3$-blokkot a $7,7$-blokkhoz, a $3,4$-blokkot a $7,8$-blokkhoz, a $4,1$-blokkot a $8,4$-blokkhoz, a $4,2$-blokkot a $8,5$-blokkhoz, a $4,3$-blokkot a $8,7$-blokkhoz, a $4,4$-blokkot a $8,8$-blokkhoz adjuk.

- A negyedik (jobb alsó) elem esetén az $1,1$-blokkot az $5,5$-blokkhoz, az $1,2$-blokkot az $5,6$-blokkhoz, az $1,3$-blokkot az $5,8$-blokkhoz, az $1,4$-blokkot az $5,9$-blokkhoz, a $2,1$-blokkot a $6,5$-blokkhoz, a $2,2$-blokkot a $6,6$-blokkhoz, a $2,3$-blokkot a $6,8$-blokkhoz, a $2,4$-blokkot a $6,9$-blokkhoz, a $3,1$-blokkot a $8,5$-blokkhoz, a $3,2$-blokkot a $8,6$-blokkhoz, a $3,3$-blokkot a $8,8$-blokkhoz, a $3,4$-blokkot a $8,9$-blokkhoz, a $4,1$-blokkot a $9,5$-blokkhoz, a $4,2$-blokkot a $9,6$-blokkhoz, a $4,3$-blokkot a $9,8$-blokkhoz, a $4,4$-blokkot a $9,9$-blokkhoz adjuk.

A megtámasztások figyelembevétele azt jelenti, hogy csak az $5,5$ blokk marad, ezért valójában elegendő lett volna azt kiszámolni. A fenti lépésekből kiválogatva az $5,5$-blokkhoz adott elemeket ez az első elem miatt az $4,4$-blokk, a második elem miatt a $3,3$-blokk, a harmadik elem miatt a $2,2$-blokk, végül a negyedik elem miatt az $1,1$-blokk egymással való összegzését jelenti. Így a kompilált és a peremfeltételeket figyelembe vevő merevségi és tömegmátrix:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 5333 & 0 \\ 0 & 3667 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \mathrm{N/m}, \tag{5.143}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 209.3 & 0 \\ 0 & 209.3 \end{bmatrix} \mathrm{kg}. \tag{5.144}$$

A sajátértékfeladat megoldásaként a sajátkörfrekvenciák:

$$\omega_{01} = 4185\text{rad/s}, \qquad \omega_{02} = 5048\text{rad/s} \tag{5.145}$$

A nagyon magas sajátkörfrekvenciák oka, hogy egy ilyen szerkezet elsősorban lemezszerű viselkedéssel a síkjára merőleges kitéréssel rezeg. A síkban számolt alakok csak nagyon sokadik alakok közelítése az alábbi sajátvektorokkal:

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0691 \end{bmatrix}, \qquad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.0691 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.146}$$

6. fejezet

Többszabadságfokú és kontinuumszerkezetek csillapított rezgései

Az egyszabadságfokú rendszerek rezgéseinél láttuk, hogy a viszkózus csillapítás milyen hatással van a szabadrezgésre, illetve a gerjesztett rezgésre. Kis csillapítás és szabadrezgés esetén a periódusidő megnyúlása, valamint a rezgés amplitúdójának exponenciális lecsengése figyelhető meg, harmonikus erővel történő gerjesztés esetén pedig az állandósult rezgés amplitúdója kisebb lesz a csillapítatlan rendszerben számolhatónál a válasz pedig valamilyen fáziskéséssel következik be.

Többszabadságfokú csillapított rendszereknél is csak sebességgel arányos viszkózus csillapítással fogunk foglalkozni, azaz az egyszabadságfokú rendszerek c csillapítási együtthatójához hasonlóan egy $\underline{\underline{C}}$ csillapítási mátrix jellemzi majd a csillapítást. Három fő kérdésre fogjuk a választ keresni:

- Csillapítatlan esetben láttuk, hogy a modálanalízis nagyban leegyszerűsíti a számítást, hiszen a kapcsolt differenciálegyenlet-rendszer helyett az egyes rezgésmódok diffferenciálegyenleteit kell megoldanunk külön-külön. Az első kérdésünk, hogy ezt a tulajdonságot hogyan befolyásolja a csillapítás, feltételezve, hogy az már ismert.
- A csillapítás származhat közvetlenül csillapító elemekből, vagy az anyagi, környezeti viselkedésből. A második kérdés ezért az, hogy a csillapító elemek paramétereiből és az anyagjellemzőkből hogyan tudjuk felépíteni a csillapítási mátrixot.
- A második kérdés alapján előállított numerikus modellnek következményei lehetnek a további számításokra, illetve az eredmények eltérhetnek a laboratóriumi kísérletek eredményeitől. A harmadik kérdés ezen hatások rendszerezése lesz.

Fentieken túlmenően a végtelen kiterjedésű szerkezetek esetében is megfigyelhető egy csillapítási jelenség, amit *szóródó* csillapításnak nevezünk. Ezt egy olyan külön példán keresztül fogjuk bemutatni, ahol a talaj dinamikus megtámasztó hatását modellezzük majd.

6.1. Komplex modálanalízis

A többszabadságfokú csillapított rendszer vizsgálatakor a sebességgel arányos viszkózus csillapítás feltételezésével az egyszabadságfokú csillapított rendszernek a (2.26) differenciálegyenletéhez ($m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = q(t)$) hasonló alakú egyenletet kaphatunk:

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{u}}(t) + \underline{\underline{C}}\,\underline{\dot{u}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{u}(t) = \underline{q}(t), \tag{6.1}$$

ahol a $\underline{\underline{C}}$ mátrix egyes oszlopai határozzák meg, hogy egy-egy szabadságfok egységnyi sebességű mozgásakor mekkora erők működnek a sazabadságfokokra a csillapítás miatt[1].

Beépített csillapítóelemek hatását a rugókal egyező módszer szerint lehet beépíteni a csillapítási mátrixba, azaz egy kompilálási folyamat eredménye lesz a mátrix. A környezeti hatásokat, vagy a szerkezet anyagának viszkózus viselkedését is figyelembe lehet venni, ennek módját a későbbiek során mutatjuk be.

A továbbiakban feltételezzük, hogy ismert a $\underline{\underline{C}}$ mátrix is, és a (6.1) egyenlet megoldási módszerét fogjuk megvizsgálni.

6.1.1. Csillapított rendszer valós modálanalízise

A csillapítatlan rendszereknél korábban már láttuk, hogy az

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{u}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{u}(t) = \underline{q}(t) \tag{6.2}$$

mátrix differenciálegyenlet megoldását kereshetjük a

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \underline{\underline{M}}\right) \underline{v} = \underline{0} \tag{6.3}$$

általánosított sajátértékfeladat (3.72) megoldásaként kapott $\underline{v}_j$ tömegmátrixra normált sajátvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{u}(t) = \sum_{j=1}^{N} y_j(t)\underline{v}_j = \underline{\underline{V}}\,\underline{y}(t). \tag{6.4}$$

A keresett alakot behelyettesítve a differenciálegyenletbe és beszorozva azt balról $\underline{\underline{V}}^T$-vel a kapcsolt differenciálegyenlet-rendszer szétesik N darab közönséges differenciálegyenletté:

$$\ddot{y}_j(t) + \omega_{0,j}^2 y_j(t) = f_j(t). \tag{6.5}$$

Ennek oka, hogy a sajátvektorok a tömegmátrixra és a merevségi mátrixra is ortogonálisak (3.179), ezért a $\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{V}}$ és a $\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}$ mátrixok diagonálmátrixok lesznek.

Csillapított rendszer esetén is kereshetjük a megoldást a csillapítás nélküli rendszer sajátvektorainak a lineáris kombinációjaként, azaz a (6.4) egyenlet szerinti alakban. Ekkor a (6.1) egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{\ddot{y}}(t) + \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{\dot{y}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{y}(t) = \underline{q}(t), \tag{6.6}$$

[1] Az egyenletrendszer alapján ez a fizikai jelentés olvasható ki a csillapítási mátrixra.

amit a szokott módon megszorozhatunk balról a $\underline{\underline{V}}^T$ mátrixszal:

$$\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{M}}\underline{\underline{V}}\ddot{\underline{y}}(t) + \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{C}}\underline{\underline{V}}\dot{\underline{y}}(t) + \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}\underline{\underline{V}}\underline{y}(t) = \underline{\underline{V}}^T \underline{q}(t). \tag{6.7}$$

A $\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{M}}\underline{\underline{V}}$ és a $\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{K}}\underline{\underline{V}}$ mátrixok most is diagonálmátrixok, mégpedig az egységmátrix és a spektrálmátrix négyzete lesz:

$$\underline{\underline{I}}\ddot{\underline{y}}(t) + \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{C}}\underline{\underline{V}}\dot{\underline{y}}(t) + \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{y}(t) = \underline{f}(t), \tag{6.8}$$

a $\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{C}}\underline{\underline{V}}$ mátrix viszont csak speciális esetekben lesz diagonálmátrix. Ennek az a következménye, hogy általános esetben az egyes rezgésalakok $y_j(t)$ modális koordinátáira felírt differenciálegyenletek továbbra is kapcsolt differenciálegyenlet-rendszert alkotnak, nem esnek szét, ezért ilyenkor nem használható ki a valós modálanalízis legnagyobb előnye. Könnyen belátható, hogy a csillapítatlan rendszer rezgésalakjait akkor lehet pontos számításra használni, ha a $\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{C}}\underline{\underline{V}}$ mátrix diagonálmátrix lesz, azaz a

$$\underline{v}_j^T \underline{\underline{C}}\underline{v}_k = 0 \qquad \forall j \neq k \tag{6.9}$$

feltétel teljesül. Ilyenkor a j-edik módban a csillapítás c_j értékét a

$$c_j = \underline{v}_j^T \underline{\underline{C}}\underline{v}_j \tag{6.10}$$

képlettel számolhatjuk, a rezgésalak közönséges differenciálegyenlete pedig

$$\ddot{y}_j(t) + c_j \dot{y}_j(t) + \omega_{0,j}^2 y_j(t) = f_j(t) \tag{6.11}$$

lesz. Minthogy a rezgésmód kritikus csillapítása $c_{j,kr} = 2\sqrt{1 \cdot \omega_{0,j}^2} = 2\omega_{0,j}$, ezért a csillapítási hányad a j-edik rezgésmódban:

$$\xi_j = \frac{c_j}{2\omega_{0,j}} = \frac{\underline{v}_j^T \underline{\underline{C}}\underline{v}_j}{2\omega_{0,j}}, \tag{6.12}$$

lesz, (6.11) pedig írható az alábbi alakban is:

$$\ddot{y}_j(t) + 2\xi_j \omega_{0,j} \dot{y}_j(t) + \omega_{0,j}^2 y_j(t) = f_j(t) \tag{6.13}$$

A csillapítási mátrix diagonálmátrixszá válásának (6.9) szerinti ellenőrzéséhez a (6.3) általánosított sajátértékfeladat teljes megoldására (az összes sajátvektorra) szükség van, ami numerikusan nagy feladat lehet. Ennél kisebb számítási igényt jelenthet az alábbi, ún. *Caughey-O'Kelly*-feltétel ellenőrzése:

$$\underline{\underline{K}}\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}. \tag{6.14}$$

Amennyiben a (6.14) egyenlőség teljesül, úgy a csillapítatlan rendszer rezgésalakjaival a csillapítási mátrix is diagonálmátrixszá válik, és a modálanalízis a csillapítatlan rendszer sajátvektoraival elvégezhető. Ez érvényes a szabadrezgés és a gerjesztett rezgés vizsgálatára is, például egy $\underline{v}_j$ alakban magára hagyva a rendszert az összes szabadságfok $\omega_{0j}^* = \omega_{0j}\sqrt{1-\xi_j^2}$ sajátkörfrekvenciával végez exponenciálisan lecsengő rezgést azonos fázisban, ahol ξ_j értéke (6.12) szerint a modális csillapítási hányad, ω_{0j} pedig a (6.3) szerinti csillapítatlan sajátkörfrekvencia.

A (6.14) feltétel bizonyításához a sajátvektorok (3.179) szerinti tulajdonságait használjuk fel. A tömegmátrixra vonatkozó feltételt szorozzuk be balról $\underline{\underline{V}}^{T-1}$-zel, jobbról pedig $\underline{\underline{V}}^{-1}$-zel:

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{V}}^{T-1}\underline{\underline{V}}^{-1}. \tag{6.15}$$

Mátrixok szorzatának az inverze az inverzek fordított sorrendű szorzataként állítható elő, így a tömegmátrix inverze:

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{V}}^{T}. \tag{6.16}$$

Helyettesítsük be ezt az inverz mátrixot (6.14) mindkét oldalán, és szorozzuk be az egészet balról $\underline{\underline{V}}^T$-vel, jobbról pedig $\underline{\underline{V}}$-vel:

$$\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}. \tag{6.17}$$

A $\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}$ szorzat (3.179) második egyenletének megfelelően az $\underline{\underline{\Omega}}^2$ diagonálmátrix:

$$\underline{\underline{\Omega}}^2\left(\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{V}}\right) = \left(\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{V}}\right)\underline{\underline{\Omega}}^2. \tag{6.18}$$

A feltétel szerint tehát a (6.8) egyenletben is előforduló $\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{V}}$ mátrix akkor lesz diagonálmátrix, ha (6.18) teljesül. Az $\underline{\underline{\Omega}}^2$ diagonálmátrixszal való szorzás az egyenlet bal oldalán a j-edik sort ω_{0j}^2-tel szorozza, az egyenlet jobb oldalán pedig a k-edik oszlopot szorozza ω_{0k}^2-tel. Egy főátlón kívüli jk-elem tehát a bal oldalon ω_{0j}^2-tel szorzódik, a jobb oldalon pedig ω_{0k}^2-tel. A kettő csak akkor lehet egyenlő, ha a jk-elem zérus, azaz a $\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{V}}$ valóban diagonálmátrix.

6.1.2. Csillapított rendszer komplex modálanalízise

Amennyiben a rendszer $\underline{\underline{K}}$, $\underline{\underline{C}}$ és $\underline{\underline{M}}$ mátrixai nem elégítik ki a (6.14) szerinti feltételt, akkor a rezgésalakokat csak komplex alakban tudjuk meghatározni. A

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{u}}(t) + \underline{\underline{C}}\,\underline{\dot{u}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{u}(t) = \underline{0}, \tag{6.19}$$

szabadrezgésfeladatnak a megoldását

$$\underline{u}(t) = \underline{v}e^{\lambda t} \tag{6.20}$$

alakban keresve, és behelyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$\underline{\underline{M}}\lambda^2\underline{v}e^{\lambda t} + \underline{\underline{C}}\lambda\underline{v}e^{\lambda t} + \underline{\underline{K}}\,\underline{v}e^{\lambda t} = \underline{0}, \tag{6.21}$$

amiből $e^{\lambda t}$-vel történő egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy:

$$\left(\underline{\underline{M}}\lambda^2 + \underline{\underline{C}}\lambda + \underline{\underline{K}}\right)\underline{v} = \underline{0}. \tag{6.22}$$

A (6.22) általánosított sajátértékfeladat együtthatómátrixát *mátrixnyaláb*nak nevezzük. A homogén lineáris egyenletrendszernek természetesen akkor van nemtriviális megoldása, ha az együtthatómátrix szinguláris. Ennek eldöntéséhez a mátrix determinánsát használhatjuk, mely most egy $2N$-edfokú polinom λ függvényében. A gyökök között valós és komplex konjugált párok is előfordulhatnak.

A (6.22) általánosított sajátértékfeladat megoldása helyett (6.19) megoldását átalakított alakban is kereshetjük. Legyen az elmozdulások feltételezett alakja:

$$\underline{u}(t) = \underline{\tilde{v}} e^{\lambda t}, \tag{6.23}$$

a sebességeket pedig keressük az

$$\underline{\dot{u}}(t) = \underline{\tilde{w}} e^{\lambda t} \tag{6.24}$$

alakban. Természetesen utóbbi kifejezhető (6.23) képletéből is, így:

$$\underline{\dot{u}}(t) = \underline{\tilde{v}} \lambda e^{\lambda t} \qquad \rightarrow \qquad \underline{\tilde{w}} = \lambda \underline{\tilde{v}}. \tag{6.25}$$

A két ismeretlen vektor közötti kapcsolat nem változik, ha mindkettőt beszorozzuk a nemszinguláris merevségi mátrixszal balról, és egy oldalra rendezzük őket:

$$\underline{\underline{K}} \underline{\tilde{w}} - \lambda \underline{\underline{K}} \underline{\tilde{v}} = \underline{0}. \tag{6.26}$$

Fejezzük ki a gyorsulást a sebességből:

$$\underline{\ddot{u}}(t) = \lambda \underline{\tilde{w}} e^{\lambda t}, \tag{6.27}$$

és helyettesítsük be (6.23)-t, (6.24)-t és (6.27)-t a (6.19) mozgásegyenletbe:

$$\underline{\underline{M}} \lambda \underline{\tilde{w}} e^{\lambda t} + \underline{\underline{C}} \underline{\tilde{w}} e^{\lambda t} + \underline{\underline{K}} \underline{\tilde{v}} e^{\lambda t} = \underline{0}. \tag{6.28}$$

Az $e^{\lambda t}$-vel való egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy:

$$\underline{\underline{M}} \lambda \underline{\tilde{w}} + \underline{\underline{C}} \underline{\tilde{w}} + \underline{\underline{K}} \underline{\tilde{v}} = \underline{0}. \tag{6.29}$$

A (6.26) egyenlettel kiegészítve ezt az alábbi alakban írhatjuk:

$$\left(\begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}} \\ \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{C}} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{M}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{\tilde{v}} \\ \underline{\tilde{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix}, \tag{6.30}$$

ami egy

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{B}}) \underline{z} = \underline{0} \tag{6.31}$$

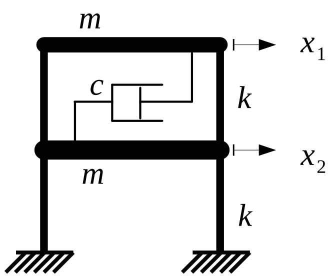
alakú általánosított sajátértékfeladat, amiben λ már csak az első hatványon szerepel. A mátrixok

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}} \\ \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{C}} \end{bmatrix} \qquad , \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{M}} \end{bmatrix}. \tag{6.32}$$

viszont $2N \times 2N$ méretűek lesznek, így a determináns kifejtve egy $2N$-edfokú polinoma lesz λ-nak, tehát nem veszítünk gyököt.

A (6.31) általánosított sajátértékfeladat megoldásaként két típusú sajátértéket kaphatunk (lehet, hogy csak egyiket, csak másikat, vagy mindkettőt):

- a valós negatív λ sajátértékekhez nagy csillapítás és valós $\underline{\tilde{v}}$ és $\underline{\tilde{w}}$ sajátvektor tartozik;
- a komplex λ értékek komplex konjugált párokként lépnek fel, komplex konjugált sajátvektorokkal, és a sajátértékek valós része az exponenciális lecsengés gyorsaságát fejezi ki, a képzetes rész abszolútértéke pedig a szabadrezgés csillapított körfrekvenciáját; a sajátvektorok komplex volta azzal jár, hogy egy sajátalakkal történő rezgés során az egyes szabadságfokok fázisa eltérhet egymástól.



6.1. ábra. Kétszintes keret csillapított szabadrezgésének vizsgálata.

6.1.1. Példa (Komplex modálanalízis). *Határozzuk meg a 6.1.a) ábrán látható szerkezet rendszermátrixait, és a rezgésalakokat. Az egyes szintek tömege* $m = 10t$, *a szintenkénti merevségek* $k = 100kN/m$, *a két szint közötti csillapítóelem együtthatója pedig* $c = 120kNs/m$.

Megoldás

A tömegmátrix a diszkrét rendszerben diagonálmátrix:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}. \tag{6.33}$$

A szintenkénti merevségekből kompilálhatjuk a merevségi mátrixot:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix}. \tag{6.34}$$

A csillapító elem az 1 és 2 szabadsági fokokat köti össze, így:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 120 & -120 \\ -120 & 120 \end{bmatrix}. \tag{6.35}$$

A (6.32) szerinti mátrixok:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 200 \\ 100 & -100 & 120 & -120 \\ -100 & 200 & -120 & 120 \end{bmatrix}, \tag{6.36}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}. \tag{6.37}$$

A sajátértékfeladat megoldásaként kapott sajátértékek:

$$\lambda_1 = -22.9109, \qquad \lambda_2 = -0.8955, \qquad \lambda_{3,4} = -0.0968 \pm 2.2056i, \tag{6.38}$$

a hozzájuk tartozó sajátvektorok pedig:

$$\underline{z}_1 = \begin{bmatrix} 0.0436 \\ -0.0428 \\ -1.0000 \\ 0.9813 \end{bmatrix}, \underline{z}_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -0.0742 \\ -0.8955 \\ 0.0665 \end{bmatrix}, \underline{z}_{3,4} = \begin{bmatrix} 0.0265 \mp 0.3862i \\ 0.0865 \mp 0.3551i \\ 0.8493 \pm 0.0959i \\ 0.7748 \pm 0.2252i \end{bmatrix} \tag{6.39}$$

Az első két alakhoz nagy csillapítás tartozik, a komplex alakokhoz viszont kis csillapítás, és $\omega_0^* = 2.2056 \mathrm{rad/s}$ nagyságú csillapított sajátkörfrekvencia. Azookat a rezgésalakokat, amik ilyen szabadrezgést végeznek, a $\underline{z}_3$ és $\underline{z}_4$ vektorok lineáris kombinációjaként kaphatjuk meg. Látható, hogy a sebességek aránya nem azonos az elmozdulások arányával, azaz a szabadságfokok fázisa eltérő.

6.2. Komplex dinamikus merevségi mátrix

6.2.1. Többszabadságfokú csillapított rendszer harmonikus gerjesztése

Tekintsük egy sebességgel arányos csillapítással rendelkező többszabadságfokú rendszer harmonikus erővel történő gerjesztését. Ahogy a csillapítatlan rendszer (3.240) differenciálegyenleténél láttuk, az egyes szabadságfokok gerjesztőerejének amplitúdóját egy $\underline{q}_0$ vektorba gyűjtve az időfüggést egy skalár harmonikus függvénnyel tudjuk megadni:

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{u}}(t) + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{u}}(t) + \underline{\underline{K}}\underline{u}(t) = \underline{q}_0 \cos(\omega t), \tag{6.40}$$

A differenciálegyenletet a csillapított egyszabadságfokú és a csillapítatlan többszabadságfokú rendszereknél szerzett tapasztalataink alapján megoldhatjuk, ha közvetlenül az alak feltételezésével keressük a megoldást.

Az egyszabadságfokú rendszereknél láttuk, hogy a harmonikus gerjesztésre harmonikus választ kapunk, de a csillapítás miatt egy fáziskésést tapasztalunk. Ezt (2.194) feltételezett megoldásban úgy írtuk, hogy

$$x_g(t) = x_{g0} \cos(\omega t - \varphi_0), \tag{6.41}$$

azaz az egyszabadságfokú rendszer válaszában az x_{g0} amplitúdót és a φ_0 fáziskésést használtuk két, ismeretlen paraméternek. A harmonikus függvényt átírva:

$$x_g(t) = x_{g0} \left(\cos(\varphi_0)\cos(\omega t) + \sin(\varphi_0)\sin(\omega t)\right) \tag{6.42}$$

alakra, bevezethetjük az

$$x_{c0} = x_{g0}\cos(\varphi_0), \qquad x_{s0} = x_{g0}\sin(\varphi_0) \tag{6.43}$$

paramétereket, melyekkel (6.41) alakja:

$$x_g(t) = x_{c0}\cos(\omega t) + x_{s0}\sin(\omega t) \tag{6.44}$$

lesz. Ez fizikailag ugyanaz a megoldás, csak a két ismeretlen paraméter szerepe más: x_{c0} és x_{s0} rendre a koszinuszos gerjesztésre adott válasz koszinuszos és szinuszos részének az amplitúdója.

Többszabadságfokú csillapított rendszer esetén azt várhatjuk, hogy mindegyik szabadságfoknak eltérő fáziskésése lehet, ezért a megoldást az alábbi alakban kellene feltételeznünk:

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1 \cos(\omega t - \varphi_1) \\ u_2 \cos(\omega t - \varphi_2) \\ \vdots \\ u_N \cos(\omega t - \varphi_N) \end{bmatrix}, \tag{6.45}$$

azaz a szabadságfokok amplitúdói és fázisszögei jelentenék a $2N$ darab ismeretlen paramétert. Ez az alak viszont nehezen kezelhető, hiszen a vektor is mindig időfüggő, ezért írjuk át mindegyik harmonikus függvényt egy koszinuszos és egy szinuszot tag összegévé:

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_{1c} \cos(\omega t) + u_{1s} \sin(\omega t) \\ u_{2c} \cos(\omega t) + u_{2s} \sin(\omega t) \\ \vdots \\ u_{Nc} \cos(\omega t) + u_{Ns} \sin(\omega t) \end{bmatrix} = \underline{u}_c \cos(\omega t) + \underline{u}_s \sin(\omega t). \tag{6.46}$$

Az ismeretlen paramétereink így az $\underline{u}_c$ és $\underline{u}_s$ vektorok elemei lesznek (összesen $2N$ darab). E feltételezett alaknak képezhetjük az idő szerinti deriváltjait:

$$\underline{\dot{u}}(t) = -\omega \underline{u}_c \sin(\omega t) + \omega \underline{u}_s \cos(\omega t), \tag{6.47}$$

$$\underline{\ddot{u}}(t) = -\omega^2 \underline{u}_c \cos(\omega t) - \omega^2 \underline{u}_s \sin(\omega t), \tag{6.48}$$

amiket behelyettesíthetünk (6.40) vektoraiba:

$$\underline{\underline{M}} \left(-\omega^2 \underline{u}_c \cos(\omega t) - \omega^2 \underline{u}_s \sin(\omega t)\right) + \underline{\underline{C}} \left(-\omega \underline{u}_c \sin(\omega t) + \omega \underline{u}_s \cos(\omega t)\right) + \\ \underline{\underline{K}} \left(\underline{u}_c \cos(\omega t) + \underline{u}_s \sin(\omega t)\right) = \underline{q}_0 \cos(\omega t). \tag{6.49}$$

Válasszuk szét az egyenletben a $\cos(\omega t)$-vel és a $\sin(\omega t)$-vel szorzott tagokat:

$$- \omega^2 \underline{\underline{M}} \underline{u}_s \sin(\omega t) - \omega \underline{\underline{C}} \underline{u}_c \sin(\omega t) + \underline{\underline{K}} \underline{u}_s \sin(\omega t) - \\ - \omega^2 \underline{\underline{M}} \underline{u}_c \cos(\omega t) + \omega \underline{\underline{C}} \underline{u}_s \cos(\omega t) + \underline{\underline{K}} \underline{u}_c \cos(\omega t) = \underline{q}_0 \cos(\omega t). \tag{6.50}$$

Mivel ez az egyenlet a mozgásegyenletből származik, így minden időpillanatban igaznak kell lennie. Amikor $\cos(\omega t) = 0$, akkor az egyenlet egyszerűsíthető:

$$-\omega^2 \underline{\underline{M}} \underline{u}_s \sin(\omega t) - \omega \underline{\underline{C}} \underline{u}_c \sin(\omega t) + \underline{\underline{K}} \underline{u}_s \sin(\omega t) = \underline{0} \sin(\omega t), \tag{6.51}$$

ahol $\sin(\omega t) \neq 0$, így egyszerűsíthetünk vele:

$$-\omega^2 \underline{\underline{M}} \underline{u}_s - \omega \underline{\underline{C}} \underline{u}_c + \underline{\underline{K}} \underline{u}_s = \underline{0}. \tag{6.52}$$

Ebből az egyenletrendszerből kifejezhetjük $\underline{u}_s$-t $\underline{u}_c$ függvényében:

$$\underline{u}_s = \omega \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right)^{-1} \underline{\underline{C}} \underline{u}_c \tag{6.53}$$

Fentiek teljesülésekor (6.50) első sora mindig nulla, így a második sorral önmagában is teljesülnie kell az egyenlőségnek:

$$-\omega^2 \underline{\underline{M}} \underline{u}_c \cos(\omega t) + \omega \underline{\underline{C}} \underline{u}_s \cos(\omega t) + \underline{\underline{K}} \underline{u}_c \cos(\omega t) = \underline{q}_0 \cos(\omega t). \tag{6.54}$$

Ráadásul ennek bármilyen t időpillanatban igaznak kell lennie, így egyszerűsíthetünk $\cos(\omega t)$-vel:

$$-\omega^2 \underline{\underline{M}}\,\underline{u}_c + \omega \underline{\underline{C}}\,\underline{u}_s + \underline{\underline{K}}\,\underline{u}_c = \underline{q}_0. \tag{6.55}$$

Helyettesítsük be $\underline{u}_s$ helyére (6.53) szerint az $\underline{u}_c$-vel kifejezett értékét:

$$-\omega^2 \underline{\underline{M}}\,\underline{u}_c + \omega \underline{\underline{C}}\omega \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right)^{-1} \underline{\underline{C}}\,\underline{u}_c + \underline{\underline{K}}\,\underline{u}_c = \underline{q}_0. \tag{6.56}$$

Gyűjtsük össze egyetlen mátrixba $\underline{u}_c$ együtthatóit:

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}} + \omega^2 \underline{\underline{C}} \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right)^{-1} \underline{\underline{C}}\right) \underline{u}_c = \underline{q}_0, \tag{6.57}$$

aminek a megoldásaként a koszinuszos amplitúdók:

$$\boxed{\underline{u}_c = \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}} + \omega^2 \underline{\underline{C}} \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right)^{-1} \underline{\underline{C}}\right)^{-1} \underline{q}_0} \tag{6.58}$$

Ezt visszahelyettesítve (6.53) képletébe megkapjuk a szinuszos amplitúdókat:

$$\boxed{\underline{u}_s = \omega \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right)^{-1} \underline{\underline{C}} \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}} + \omega^2 \underline{\underline{C}} \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right)^{-1} \underline{\underline{C}}\right)^{-1} \underline{q}_0} \tag{6.59}$$

6.2.2. Komplex dinamikus merevség

A komplex dinamikus merevség fogalmát egyszabadságfokú csillapított rendszer harmonikus gerjesztésén keresztül vezetjük be. Tételezzük fel, hogy ismerjük egy csillapított egyszabadságfokú rendszer $q_c(t) = q_0 \cos(\omega t)$ és $q_s(t) = q_0 \sin(\omega t)$ gerjesztésre adott válaszát, melyet jelöljön rendre $x_c(t)$ és $x_s(t)$. Azaz:

$$m\ddot{x}_c(t) + c\dot{x}_c(t) + kx_c(t) = q_0 \cos(\omega t), \tag{6.60}$$

$$m\ddot{x}_s(t) + c\dot{x}_s(t) + kx_s(t) = q_0 \sin(\omega t). \tag{6.61}$$

A rendszer linearitásából következik, hogy $q_c(t)$ és $q_s(t)$ bármely lineáris kombinációjára adott választ az $x_c(t)$ és $x_s(t)$ válaszok ugyanolyan együtthatókkal képzett lineáris kombinációjaként állíthatjuk elő[2].

Képezzük a koszinuszos és szinuszos teher komplex kombinációját az alábbi módon:

$$\tilde{q}(t) = q_0 \left(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\right). \tag{6.64}$$

A lineáris rendszer miatt a válasz alakja is komplex, mégpedig

$$\tilde{x}(t) = x_c(t) + i x_s(t), \tag{6.65}$$

lesz, azaz a valós rész a koszinuszos, a képzetes rész pedig a szinuszos gerjesztésre adott választ tartalmazza. Ezt a gerjesztést az Euler-féle átírással átalakíthatjuk az alábbi alakra:

$$\tilde{q}(t) = q_0 \left(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\right) = q_0 e^{i\omega t}. \tag{6.66}$$

[2]Ha például az

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = q_0 \left(2\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right) \tag{6.62}$$

differenciálegyenlet megoldását keressük, akkor az a $q(t) = 2q_c(t) + 1q_s(t)$ kombinációnak megfelelően a válasz az alábbi lesz:

$$x(t) = 2x_c(t) + x_s(t). \tag{6.63}$$

Ezzel gerjesztve az egyszabadságfokú rendszert, annak mozgásegyenlete a komplex $\tilde{x}(t)$-re:

$$m\ddot{\tilde{x}}(t) + c\dot{\tilde{x}}(t) + k\tilde{x}(t) = q_0 e^{i\omega t}. \tag{6.67}$$

Keressük ennek megoldását $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{i\omega t}$ alakban, tudva, hogy annak valós része a $q_0 \cos(\omega t)$, képzetes része pedig a $q_0 \sin(\omega t)$ gerjesztése adott válasz lesz, $\tilde{x}_0$ pedig a válasz komplex amplitúdója. A feltételezett alakot és deriváltjait behelyettesítve a differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy:

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k)\tilde{x}_0 e^{i\omega t} = q_0 e^{i\omega t}, \tag{6.68}$$

aminek minden pillanatban igaznak kell lenni, így $e^{i\omega t}$-vel egyszerűsíthetünk:

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k)\tilde{x}_0 = q_0. \tag{6.69}$$

Ezt oldjuk meg a komplex amplitúdóra:

$$\tilde{x}_0 = \frac{q_0}{k - \omega^2 m + i\omega c} = \frac{q_0}{k}\frac{1}{1 - \omega^2 \frac{m}{k} + i\omega\frac{c}{k}}, \tag{6.70}$$

és bővítsük ki a második törtet a nevező komplex konjugáltjával:

$$\tilde{x}_0 = \frac{q_0}{k}\frac{1}{1 - \omega^2 \frac{m}{k} + i\omega\frac{c}{k}}\frac{1 - \omega^2 \frac{m}{k} - i\omega\frac{c}{k}}{1 - \omega^2 \frac{m}{k} - i\omega\frac{c}{k}}, = \frac{q_0}{k}\frac{1 - \omega^2 \frac{m}{k} - i\omega\frac{c}{k}}{\left(1 - \omega^2 \frac{m}{k}\right)^2 + \left(\omega\frac{c}{k}\right)^2} \tag{6.71}$$

A második nevezőt bontsuk fel a négyzetgyökének az önmagával vett szorzatára:

$$\tilde{x}_0 = \frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 \frac{m}{k}\right)^2 + \left(\omega\frac{c}{k}\right)^2}}\frac{1 - \omega^2 \frac{m}{k} - i\omega\frac{c}{k}}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 \frac{m}{k}\right)^2 + \left(\omega\frac{c}{k}\right)^2}} \tag{6.72}$$

Kihasználva, hogy $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ és:

$$\frac{c}{k} = \frac{\xi 2\sqrt{km}}{k} = 2\xi\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k}} = \frac{2\xi}{\omega_0} \tag{6.73}$$

a válasz komplex amplitúdóját így írhatjuk:

$$\tilde{x}_0 = \frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - i2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \tag{6.74}$$

Ebből az első tört a teher amplitúdója miatti statikus elmozdulás, a második pedig a (2.210) szerinti rezonanciatényező, így e kettőt a továbbiakban az $x_{st}\mu$ szorzattal helyettesítjük:

$$\tilde{x}_0 = x_{st}\mu\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - i2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \tag{6.75}$$

A teljes megoldáshoz a komplex amplitúdót kell szoroznunk $e^{i\omega t}$-vel:

$$\tilde{x}(t) = x_{st}\mu\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - i2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}e^{i\omega t}. \tag{6.76}$$

Tudjuk, hogy $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$:

$$\tilde{x}(t) = x_{st}\mu \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - i2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right), \tag{6.77}$$

és hogy a válasz valós része a koszinuszos, képzetes része a szinuszos gerjesztésre adott válasz.

- A (6.77) egyenlet számlálójában és a zárójelben levő komplex számok szorzatából a valósszor-valós, illetve a képzetesszer-képzetes tagok lesznek valósak, így:

$$\Re\left(\tilde{x}(t)\right) = x_c(t) = x_{st}\mu \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\cos(\omega t) + 2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega t)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \tag{6.78}$$

  A számlálóban levő harmonikus függvény amplitúdója (2.64) alapján megegyezik a nevezővel, így a tört átírható $\cos(\omega t - \varphi_0)$ alakra, ahol

$$\arctan(\varphi_0) = \frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \tag{6.79}$$

  A koszinuszos gerjesztésre tehát a válasz:

$$x_c(t) = x_{st}\mu\cos(\omega t - \varphi_0) \tag{6.80}$$

- A (6.77) egyenlet számlálójában és a zárójelben levő komplex számok szorzatából a valósszor-képzetes, illetve a képzetesszer-valós tagok lesznek képzetesek, így:

$$\Im\left(\tilde{x}(t)\right) = x_s(t) = x_{st}\mu \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\sin(\omega t) - 2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\cos(\omega t)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \tag{6.81}$$

  A számlálóban levő harmonikus függvény amplitúdója (2.64) alapján megegyezik a nevezővel, így a tört átírható $\sin(\omega t - \varphi_0)$ alakra, ahol

$$\arctan(\varphi_0) = \frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \tag{6.82}$$

  A szinuszos gerjesztésre tehát a válasz:

$$x_s(t) = x_{st}\mu\sin(\omega t - \varphi_0) \tag{6.83}$$

A külön levezetett képleteinktől tehát nem térnek el a komplex analízissel elért eredmények, de a többszabadságfokú rendszerek felé jobban kibővíthető ez az eljárásunk.

6.2.3. Komplex dinamikus merevségi mátrix

Terjesszük ki a komplex analízist a többszabadságfokú rendszerekre. Jelölje az

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{u}}(t)+\underline{\underline{C}}\dot{\underline{u}}(t)+\underline{\underline{K}}\underline{u}(t)=\underline{q}_c(t)=\underline{q}_0\cos(\omega t) \tag{6.84}$$

differenciálegyenlet állandósult rezgéshez tartozó megoldását $\underline{u}_c(t)$, míg az

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{u}}(t)+\underline{\underline{C}}\dot{\underline{u}}(t)+\underline{\underline{K}}\underline{u}(t)=\underline{q}_s(t)=\underline{q}_0\sin(\omega t) \tag{6.85}$$

differenciálegyenlet állandósult rezgéshez tartozó megoldását $\underline{u}_s(t)$.

A $\underline{q}_c(t)$ és $\underline{q}_s(t)$ terhek lineáris kombinációjára adott válasz az $\underline{u}_c(t)$ és $\underline{u}_s(t)$ válaszok azonos együtthatókkal képzett lineáris kombinációja lesz. Legyen a kombináció az alábbi komplex alak:

$$\tilde{\underline{q}}(t)=\underline{q}_c(t)+i\underline{q}_s(t), \tag{6.86}$$

azaz

$$\tilde{\underline{q}}(t)=\underline{q}_0\left(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)\right)=\underline{q}_0e^{i\omega t}. \tag{6.87}$$

A komplex gerjesztésre komplex választ várunk, ezért a differenciálegyenlet alakja az alábbi lesz:

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\tilde{\underline{u}}}(t)+\underline{\underline{C}}\dot{\tilde{\underline{u}}}(t)+\underline{\underline{K}}\tilde{\underline{u}}(t)=\underline{q}_0e^{i\omega t}, \tag{6.88}$$

melynek $\tilde{\underline{u}}(t)$ megoldásának valós része a (6.84), képzetes része pedig a (6.85) egyenletek megoldása lesz.

Keressünk (6.88) megoldását a teherhez hasonló alakban:

$$\tilde{\underline{u}}(t)=\tilde{\underline{u}}_0e^{i\omega t}. \tag{6.89}$$

Ennek első és második deriváltja:

$$\dot{\tilde{\underline{u}}}(t)=i\omega\tilde{\underline{u}}_0e^{i\omega t}, \tag{6.90}$$

$$\ddot{\tilde{\underline{u}}}(t)=-\omega^2\tilde{\underline{u}}_0e^{i\omega t}. \tag{6.91}$$

Helyettesítsük be ezeket a (6.88) differenciálegyenletbe:

$$\underline{\underline{M}}\left(-\omega^2\tilde{\underline{u}}_0e^{i\omega t}\right)+\underline{\underline{C}}\left(i\omega\tilde{\underline{u}}_0e^{i\omega t}\right)+\underline{\underline{K}}\left(\tilde{\underline{u}}_0e^{i\omega t}\right)=\underline{q}_0e^{i\omega t}. \tag{6.92}$$

Az $e^{i\omega t}$-vel egyszerűsíthetünk, a kapott egyenlet bal oldalán pedig emeljük ki $\tilde{\underline{u}}_0$-t:

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega^2\underline{\underline{M}}+i\omega\underline{\underline{C}}\right)\tilde{\underline{u}}_0=\underline{q}_0. \tag{6.93}$$

Az egyenletrendszer komplex együtthatómátrixát nevezzük *komplex dinamikus merevségi mátrix*nak, amit $\tilde{\underline{\underline{K}}}$-val jelölünk:

$$\boxed{\tilde{\underline{\underline{K}}}=\underline{\underline{K}}-\omega^2\underline{\underline{M}}+i\omega\underline{\underline{C}}} \tag{6.94}$$

Ezel a mátrixszal (6.93) egyenlete röviden írható:

$$\tilde{\underline{\underline{K}}}\tilde{\underline{u}}_0=\underline{q}_0. \tag{6.95}$$

Ebből az egyenletből olvashatjuk ki a komplex dinamikus merevségi mátrix fizikai jelentését. A mátrix a komplex harmonikusan gerjesztett csillapított többszabadságfokú rendszer elmozdulásainak komplex amplitúdója és a szabadságfokokat gerjesztő erők komplex amplitúdója közötti kapcsolatot adja meg[3]. *A mátrix egy oszlopát akkor kapjuk meg, ha az adott szabadságfok amplitúdója* 1 *(azaz* $1e^{i\omega t}$ *függvény szerint mozog), míg a többi szabadságfok mozgását megakadályozzuk, és az így kialakuló rezgést fenntartó szabadságfokonkénti erők komplex amplitúdóit soroljuk fel a mátrix oszlopában.*

A (6.93) egyenlet megoldása formálisan az alábbi:

$$\underline{\tilde{u}}_0 = \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}} + i\omega\underline{\underline{C}}\right)^{-1} \underline{q}_0. \tag{6.96}$$

A komplex mátrix inverzét azon megfontolás alapján kereshetjük, hogy a mátrix és inverzének a szorzata az egységmátrixot kell adja. Azt várjuk, hogy az inverz is komplex lesz, ezért jelöljük annak valós részét $\underline{\underline{A}}$-val, képzetes részét pedig $\underline{\underline{B}}$-vel, azaz:

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}} + i\omega\underline{\underline{C}}\right)^{-1} = \underline{\underline{A}} + i\underline{\underline{B}}. \tag{6.97}$$

Az inverz definíciójából következően:

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}} + i\omega\underline{\underline{C}}\right)\left(\underline{\underline{A}} + i\underline{\underline{B}}\right) = \underline{\underline{I}} + i\underline{\underline{0}}. \tag{6.98}$$

(Az egységmátrix valós mátrix, így képzetes része zérus.) Az összegek szorzatait kifejtve:

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{\underline{A}} + i\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{\underline{B}} + i\omega\underline{\underline{CA}} - \omega\underline{\underline{CB}} = \underline{\underline{I}} + i\underline{\underline{0}}. \tag{6.99}$$

Az egyenlet képzetes részéből:

$$i\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{\underline{B}} + i\omega\underline{\underline{CA}} = +i\underline{\underline{0}} \qquad \rightarrow \qquad \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{\underline{B}} + \omega\underline{\underline{CA}}, = \underline{\underline{0}} \tag{6.100}$$

így $\underline{\underline{B}}$-t kifejezhetjük $\underline{\underline{A}}$ segítségével:

$$\underline{\underline{B}} = -\omega\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{\underline{CA}}. \tag{6.101}$$

Az így kifejezett mátrixot helyettesítsük be (6.99) valós részébe:

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{\underline{A}} + \omega^2\underline{\underline{C}}\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{\underline{CA}} = \underline{\underline{I}}, \tag{6.102}$$

aminek bal oldalán kiemelhető $\underline{\underline{A}}$:

$$\left(\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right) + \omega^2\underline{\underline{C}}\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{\underline{C}}\right)\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}. \tag{6.103}$$

A zárójeles mátrixot $\underline{\underline{A}}$-val szorozva egységmátrixot kapunk, vagyis az inverz definíciója alapján ezek egymás inverzei, így:

$$\boxed{\underline{\underline{A}} = \left(\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right) + \omega^2\underline{\underline{C}}\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{\underline{C}}\right)^{-1}} \tag{6.104}$$

[3] Bár az általunk bevezetett feladatban a tehervektor amplitúdója valós volt, az egyenletünk alapján lehetne komplex is.

míg (6.101) alapján:

$$\boxed{\underline{\underline{B}} = -\omega\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{\underline{C}}\left(\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right) + \omega^2\underline{\underline{C}}\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{\underline{C}}\right)^{-1}} \tag{6.105}$$

A (6.104) és (6.105) képletek előnye, hogy azokban csak valós mátrixok szerepelnek. (Megjegyzés: hasonlítsuk össze a (6.58) és (6.59) képletek együtthatómátrixait a fenti két képlettel.)

Visszatérve (6.96) képletéhez, a válasz komplex amplitúdója az alábbi lesz:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_0 = &\left(\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right) + \omega^2\underline{\underline{C}}\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{\underline{C}}\right)^{-1}\underline{q}_0 \\ &- i\omega\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{\underline{C}}\left(\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right) + \omega^2\underline{\underline{C}}\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{\underline{C}}\right)^{-1}\underline{q}_0,\end{aligned} \tag{6.106}$$

amit (6.89) feltételezésének megfelelően be kell szorozni $e^{i\omega t}$-vel[4], hogy megkapjuk az $\tilde{\underline{u}}(t)$ függvényt.

- Az $\tilde{\underline{u}}(t)$ függvénynek a valós része lesz a $\underline{q}_0\cos(\omega t)$ gerjesztésre adott válasz, ami a valósszor-valós, valamint a képzetesszer-képzetes tagokból származik, azaz:

$$\begin{aligned}u_c(t) = &\left(\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right) + \omega^2\underline{\underline{C}}\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{\underline{C}}\right)^{-1}\underline{q}_0\cos(\omega t) \\ &+ \omega\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{\underline{C}}\left(\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right) + \omega^2\underline{\underline{C}}\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{\underline{C}}\right)^{-1}\underline{q}_0\sin(\omega t),\end{aligned} \tag{6.107}$$

- Az $\tilde{\underline{u}}(t)$ függvénynek a képzetes része lesz a $\underline{q}_0\sin(\omega t)$ gerjesztésre adott válasz, ami a valósszor-képzetes, valamint a képzetesszer-valós tagokból származik, azaz:

$$\begin{aligned}u_s(t) = &\left(\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right) + \omega^2\underline{\underline{C}}\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{\underline{C}}\right)^{-1}\underline{q}_0\sin(\omega t) \\ &- \omega\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{\underline{C}}\left(\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right) + \omega^2\underline{\underline{C}}\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{\underline{C}}\right)^{-1}\underline{q}_0\cos(\omega t).\end{aligned} \tag{6.108}$$

Végül kiemeljük, hogy a (6.94) szerint számolt komplex dinamikus merevségi mátrixban a valós rész a csillapítatlan rendszereknél már megismert dinamikus merevségi mátrix, míg a képzetes rész kizárólag a csillapítási mátrixszal van kapcsolatban. A csillapítás önmagában tehát egy képzetes dinamikus merevséget eredményez, és viszont, a komplex merevség képzetes része valamilyen csillapításnak felel meg.

6.2.4. Rúdelem komplex dinamikus merevségi mátrixa

Miután tisztáztuk a többszabadságfokú csillapított szerkezet komplex dinamikus merevségi mátrixának szerepét, a folytatásban levezetjük, hogy egy rúdszerkezet esetén hogyan tudjuk a mátrix fizikai jelentését felhasználva meghatározni

[4]EMlékeztetőül: $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$.

annak elemeit. Ezzel egyidejűleg az elemi merevségi és tömegmátrix mellett az elemi csillapítási mátrix elemeit is előállítjuk, hiszen tudjuk, hogy a komplex dinamikus merevségi mátrixban a képzetes rész felel meg a csillapítási mátrixnak.

A vizsgálatunk tárgya tehát egy olyan rúdszerkezet, amit $e^{i\omega t}$ időfüggésű komplex harmonikus gerjesztőerő terhel, melynek hatására egy időben $e^{i\omega t}$ szerint változó állandósult rezgés alakult ki. Ennek megfelelően az összes csomópont ugyanilyen időfüggéssel mozog, így a csomópontokra ható erőket elemenként tudjuk számolni és elegendő egy jk-rúdelem (lásd a 6.2.a) ábra) esetében levezetni a komplex dinamikus merevségi mátrixot.

A teljes szerkezet mátrixait az elemi mátrixokból lehet majd kompilálni az esetleg szükséges transzformálás után.

6.2.4.1. Csillapított rúdelem modellje

A rúdelemre az alábbi jellemzőket vesszük figyelembe. A fajlagos tömeget μ-vel jelöljük, ahogy korábban. A rúd viszkózus közegben mozog, ezért a keresztmetszetekre egy, a pillanatnyi sebességgel ellentétes irányú, azzal arányos közegellenállás hat, melynek arányossági tényezője ζ, így a közegellenállás által kifejtett fékezőerő:

$$q_x(x,t) = -\zeta \dot{u}(x,t), \qquad q_y(x,t) = -\zeta \dot{v}(x,t). \tag{6.109}$$

A későbbiekben a ζ paramétert fajlagosítjuk a rúdelem fajlagos tömegére, így helyette az $\alpha = \zeta/\mu$ paramétert használjuk majd, így:

$$q_x(x,t) = -\alpha\mu \dot{u}(x,t), \qquad q_y(x,t) = -\alpha\mu \dot{v}(x,t). \tag{6.110}$$

Az anyagon belül disszipálódó energiát az anyagmodellen keresztül vesszük figyelembe. A Kelvin-Voigt-féle anyagmodellben két anyagi paramétert használunk, az E rugalmassági moduluszt és a β viszkózus együtthatót:

$$\sigma = E\varepsilon + \beta E\dot{\varepsilon}, \tag{6.111}$$

azaz a feszültség egy alakváltozástól és egy alakváltozássebességtől függő tag összege. Mivel a rúdelemben a fajlagos nyúlásból származó normálfeszültségek eredői, azaz a normálerő és a hajlítónyomaték a lényeges igénybevételek, így a keresztmetszetek anyagegyenletei:

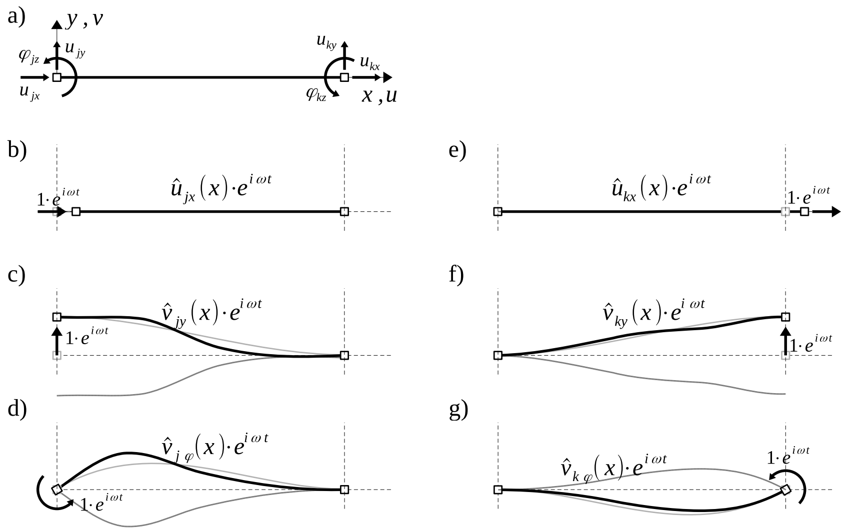
$$N = EA\varepsilon + \beta EA\dot{\varepsilon}. \qquad M = EI\kappa + \beta EI\dot{\kappa}. \tag{6.112}$$

Fentieket kiegészíthetjük (5.15) és (5.16) képleteihez hasonlóan úgy, hogy az elmozdulások deriváltjai és az igénybevételek közötti kapcsolatot kapjuk meg:

$$N = EAu' + \beta EA\dot{u}'. \qquad M = EIv'' + \beta EI\dot{v}''. \tag{6.113}$$

6.2.4.2. Komplex dinamikus rezgésalakok

A komplex harmonikus gerjesztés hatására a teljes rúdszerekezet, és így a vizsgált rúdelem is komplex harmonikus válasszal reagál. Emiatt a komplex dinamikai merevségi mátrix (6.93) szerinti fizikai jelentését használhatjuk az elemeinek a meghatározásához. A mátrix egy oszlopa azt jelenti, hogy ha az adott szabadságfokot egységnyi amplitúdójú komplex harmonikus kitérésre kényszerítünk, miközben a többi szabadságfok elmozdulását meggátoljuk, akkor mekkora amplitúdójú komplex harmonikus erőt kell kifejtenünk az egyes szabadságfokokra a



6.2. ábra. Rúdelem az xy-síkban: a) szabadságfokok, b-g) az egyes szabadságfokok egységnyi amplitúdójú elmozdításakor kialakuló komplex dinamikus alakok jellege (az alakok a gerjesztés körfrekvenciájától is függenek, ezért csak a szürkével jelzett statikus alakhoz képesti váltakozásukat jelezzük és szaggatott vonallal azt, hogy ezek a rezgés befagyasztott pillanataiban érvényes alakok).

mozgás fenntartásához. Ezek az értékek természetesen a komplex rezgésalakoktól függenek, ezért a kezdő- és végponti szabadságfokonként rendre az alábbi függvényeket kell meghatározni a jk-rúdelem esetén:

$$\hat{u}_{jx}(x)e^{i\omega t} \quad \hat{u}_{kx}(x)e^{i\omega t} \quad \hat{v}_{jy}(x)e^{i\omega t} \quad \hat{v}_{ky}(x)e^{i\omega t} \quad \hat{v}_{j\varphi}(x)e^{i\omega t} \quad \hat{v}_{k\varphi}(x)e^{i\omega t}. \tag{6.114}$$

E függvények meghatározási módját két okból nem részletezzük. Egyrészt az alakfüggvények meghatározásához fel kellene írni a csillapított gerenda differenciálegyenletét (a külső és a belső csillapítás hatását figyelembe véve). Másrészt az adott frekvenciájú gerjesztésre adott válaszban az egyes keresztmetszetek különböző fáziskéséssel követnék a támasz mozgását. Így egy koszinuszos gerjesztésre $v(x,t) = \bar{v}(x)\cos(\omega t - \varphi(x))$ alakú feltételezett választ kellene keresni, vagy egyből komplex alakban megfogalmazni a feladatot.

A továbbiakban tehát feltételezzük, hogy rendelkezésre állnak a (6.114) szerinti komplex dinamikus alakfüggvények. Hangsúlyozva, hogy ezek valójában komplex függvények, a 6.2.b-g) ábrán jelezzük, hogy melyik milyen szabadságfok gerjesztéséhez tartozik.

6.2.4.3. Komplex rúdvégi erők amplitúdója

A komplex dinamikus alakfüggvényekből származó rúdvégi erőamplitúdókat kell meghatároznunk. A módszer hasonló lesz a dinamikus merevségi mátrix elemeinek számításánál bemutatotthoz. A D'Alambert-elv segítségével egyensúlyi erőrendszerré alakítjuk a rúdelemre ható erőrendszert, és a keresett rúdvégi erőnek megfelelő virtuális elmozdulásrendszer felvétele után felírjuk a virtuális elmozdulások tételét és kifejezzük belőle a keresett mennyiséget.

ξ, η	1	2	3	4	5	6
csomópont	j	j	j	k	k	k
zérus elmozdulásfv. jele	$\tilde{v}$	$\tilde{u}$	$\tilde{u}$	$\tilde{v}$	$\tilde{u}$	$\tilde{u}$
nemzérus elmozdulásfv. jele	$\tilde{u}$	$\tilde{v}$	$\tilde{v}$	$\tilde{u}$	$\tilde{v}$	$\tilde{v}$
elmozdulásfv. indexe	jx	jy	$j\varphi$	kx	ky	$k\varphi$

6.1. táblázat. A jk-rúdelem komplex dinamikus merevségi mátrixának $\tilde{K}_{\xi\eta}$ eleméhez tartozó mennyiségek.

A dinamikus vizsgálathoz hasonlóan nézzük meg, milyen lépésekkel tudjuk a komplex dinamikus merevségi mátrix $\tilde{K}_{\xi\eta}$ elemét kiszámítani. A ξ és η értékek rendre a sor- és oszlopindexet jelölik, ami mindig egy-egy szabadságfoknak felel meg, ami egyben meghatározza az alakot megadó függvény jellegét és korábban már bevezetett indexelését. Érvényes tehát az 5.2. táblázatból a komplex dinamikus alakfüggvényekre aktualizált 6.1. táblázat, ahol felsoroltuk, hogy a különböző indexek melyik csomóponthoz tartoznak, melyik elmozdulásfüggvény zérus, illetve nemzérus, és mi az elmozdulásfüggvény indexe.

A mátrix indexelésének sor-oszlop sorrendje egyben a hely–ok sorrendnek is megfelel, azaz a keresett elem az η által meghatározott komplex dinamikus alakon kialakuló rúdvégi igénybevételek közül a ξ által meghatározott érték komplex amplitúdójának kell lennie, így az annak megfelelő statikus alakot kell virtuális elmozdulásrendszernek felvenni. Az η indexnek megfelelő elmozdulásfüggvény egy, a 6.114 képletben felsorolt alak, általános jelöléssel:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_\eta(x,t) &= \tilde{u}_\eta(x)e^{i\omega t},\\ \tilde{v}_\eta(x,t) &= \tilde{v}_\eta(x)e^{i\omega t}.\end{aligned} \tag{6.115}$$

Ezek idő szerinti első és második deriváltjai:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{u}}_\eta(x,t) &= i\omega\hat{u}_\beta(x)e^{i\omega t},\\ \dot{\tilde{v}}_\eta(x,t) &= i\omega\hat{v}_\beta(x)e^{i\omega t}.\end{aligned} \tag{6.116}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{u}}_\eta(x,t) &= -\omega^2\hat{u}_\beta(x)e^{i\omega t},\\ \ddot{\tilde{v}}_\eta(x,t) &= -\omega^2\hat{v}_\beta(x)e^{i\omega t}.\end{aligned} \tag{6.117}$$

Az egyensúlyivá kiegészített komplex erőrendszer és a virtuális elmozdulásrendszer ismeretében kell felírnunk a dinamikus erőrendszer statikus elmozdulásokon végzett virtuális munkáját. (A ks index a komplex dinamikus erőrendszerre és a statikus elmozdulásrendszerre fog utalni.) A teljes munka a külső és a belső munka összege:

$$\delta\tilde{W}_{ks} = \delta\tilde{W}^k_{ks} + \delta\tilde{W}^b_{ks} = 0. \tag{6.118}$$

Az erőrendszer elemeiből munkát végez a ξ által meghatározott rúdvégi igénybevétel, a tehetetlenségi erő, a közegellenállás, és a belső erő (melynek az anyagmodell miatt két komponense van: egyik az alakváltozással, másik az alakváltozássebességgel arányos). Ezek mindegyike egy $\tilde{}$ jelöléssel megkülönböztetett amplitúdónak és ugyanazon $e^{i\omega t}$ komplex harmonikus függvénynek a szorzata.

A külső munkát a keresett $\tilde{Q}_\eta e^{i\omega t}$ igénybevétel végzi a vele munkakompatibilis egységnyi elmozduláson, valamint a $-\mu\ddot{\tilde{u}}_\eta(x,t)$, illetve $-\mu\ddot{\tilde{v}}_\eta(x,t)$ tehetetlenségi erők, továbbá a $-\mu\alpha\dot{\tilde{u}}_\eta(x,t)$, illetve $-\mu\alpha\dot{\tilde{v}}_\eta(x,t)$ közegellenállás, rendre az $u_\xi(x)$, illetve $v_\xi(x)$ elmozdulásokon:

$$\delta\tilde{W}_{ks}^{k} = \pm\tilde{Q}_{\xi\eta}\cdot 1e^{i\omega t} + \int_0^{l_{jk}} \left[(-\mu\ddot{u}_\eta(x,t)u_\xi(x)) + (-\mu\alpha\dot{u}_\eta(x,t)u_\xi(x)) + \right. \\ \left. +(-\mu\ddot{v}_\eta(x,t)v_\xi(x)) + (-\mu\alpha\dot{v}_\eta(x,t)v_\xi(x))\right] dx, \quad (6.119)$$

ahol az előjel $\tilde{N}_j, \tilde{M}_j, \tilde{V}_k$ esetén negatív, $\tilde{V}_j, \tilde{N}_k, \tilde{M}_k$ esetén pozitív (5.14) összefüggéseinek megfelelően. Az idő szerinti deriváltakat behelyettesítve és a komplex harmonikus függvényt kiemelve a külső munka:

$$\delta\tilde{W}_{ks}^{k} = \left[\pm\tilde{Q}_{\xi\eta}\cdot 1 + \omega^2\mu\int_0^{l_{jk}} (\tilde{u}_\eta(x)u_\xi(x) + \tilde{v}_\eta(x)v_\xi(x))\, dx \right. \\ \left. -i\omega\alpha\mu\int_0^{l_{jk}} (\tilde{u}_\eta(x)u_\xi(x) + \tilde{v}_\eta(x)v_\xi(x))\, dx\right] e^{i\omega t}. \quad (6.120)$$

A belső munkát a normálerő, illetve a hajlítónyomaték végzi a fajlagos nyúláson, illetve a görbületen, ezek szorzatát a rúdhossz mentén integrálni kell. A belső munka jellegzetessége, hogy egy negatív előjelet kell használni, így:

$$\delta\tilde{W}_{ks}^{b} = -\int_0^{l_{jk}} \left(\tilde{N}_\eta(x,t)u'_\xi(x) + \tilde{M}_\eta(x,t)v''_\xi(x)\right) dx, \quad (6.121)$$

ami (6.113) felhasználásával:

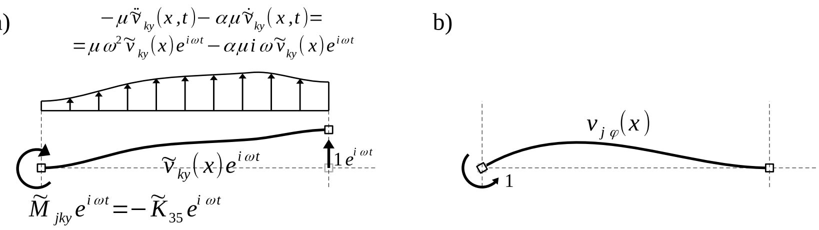
$$\delta\tilde{W}_{ks}^{b} = -\int_0^{l_{jk}} \left[EA\tilde{u}'_\eta(x,t)u'_\xi(x) + \beta EA\dot{\tilde{u}}'_\eta(x,t)u'_\xi(x) + \right. \\ \left. EI\tilde{v}''_\eta(x,t)v''_\xi(x) + \beta EI\dot{\tilde{v}}''_\eta(x,t)v''_\xi(x)\right] dx, \quad (6.122)$$

Az időfüggő mennyiségek itt is egy komplex amplitúdó és a komplex harmonikus függvény szorzatai ($\tilde{u}_\eta(x,t) = \tilde{u}_\eta(x)e^{i\omega t}$, $\tilde{v}_\eta(x,t) = \tilde{v}_\eta(x)e^{i\omega t}$), amiket az idő szerinti deriváltjaikkal behelyettesítve:

$$\delta\tilde{W}_{ks}^{b} = -\int_0^{l_{jk}} \left[EA\tilde{u}'_\eta(x)u'_\xi(x) + i\omega\beta EA\tilde{u}'_\eta(x)u'_\xi(x) + \right. \\ \left. EI\tilde{v}''_\eta(x)v''_\xi(x) + i\omega\beta EI\tilde{v}''_\eta(x)v''_\xi(x)\right] e^{i\omega t}dx, \quad (6.123)$$

A külső és belső munkák összegéből:

$$\delta\tilde{W}_{ks} = 0 = \left[\pm\hat{Q}_{\xi\eta}\cdot 1 + \omega^2\mu\int_0^{l_{jk}} \{\tilde{u}_\eta(x)u_\xi(x) + \tilde{v}_\eta(x)v_\xi(x)\}\, dx \right. \\ - i\omega\alpha\mu\int_0^{l_{jk}} \{\tilde{u}_\eta(x)u_\xi(x) + \tilde{v}_\eta(x)v_\xi(x)\}\, dx \\ - \int_0^{l_{jk}} \left\{EA\tilde{u}'_\eta(x)u'_\xi(x) + EI\tilde{v}''_\eta(x)v''_\xi(x)\right\} dx \\ \left. - \int_0^{l_{jk}} \left\{i\omega\beta EA\tilde{u}'_\eta(x)u'_\xi(x) + i\omega\beta EI\tilde{v}''_\eta(x)v''_\xi(x)\right\} dx\right] e^{i\omega t} \quad (6.124)$$



6.3. ábra. Rúdelem komplex dinamikus merevségi mátrixában a $\tilde{K}_{35}$ elem számításához használt a) komplex dinamikus alakfüggvény és a munkát végző erők, b) virtuális elmozdulás.

Az egyensúlyivá tett erőrendszerünk minden időpillanatban egyensúlyi, ezért a szögletes zárójelen belüli kifejezésnek kell nullának lennie. Az így kapott egyenletet az (5.14) szerinti előjeles belső erőre megoldhatjuk, ez egyben a keresett $\tilde{K}_{\xi\eta}$ elem:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{\xi\eta} = \pm Q_{\xi\eta} = &-\omega^2\mu\int_0^{l_{jk}}\tilde{u}_\eta(x)u_\xi(x)dx - \omega^2\mu\int_0^{l_{jk}}\tilde{v}_\eta(x)v_\xi(x)dx\\ &+ i\omega\alpha\mu\int_0^{l_{jk}}\tilde{u}_\eta(x)u_\xi(x)dx + i\omega\alpha\mu\int_0^{l_{jk}}\tilde{v}_\eta(x)v_\xi(x)dx\\ &+ EA\int_0^{l_{jk}}\tilde{u}'_\eta(x)u'_\xi(x)dx + EI\int_0^{l_{jk}}\tilde{v}''_\eta(x)v''_\xi(x)dx\\ &i\omega\beta EA\int_0^{l_{jk}}\tilde{u}'_\eta(x)u'_\xi(x)dx + i\omega\beta EI\int_0^{l_{jk}}\tilde{v}''_\eta(x)v''_\xi(x)dx\end{aligned} \tag{6.125}$$

A tagokat olyan sorrendben írtuk fel, hogy minden sorban az első tag a normálirányú alakváltozáshoz, a második a hajlításhoz kapcsolódik. Hangsúlyozzuk, hogy mindegyik integrálban egy függvény a komplex dinamikus alakból, egy pedig a statikus alakból származik.

6.2.1. Példa (Komplex dinamikus merevségi mátrix egy eleme)**.** *Határozzuk meg a 6.2.a) ábrán látható jk-rúdelem komplex dinamikus merevségi mátrixának $\tilde{K}_{35}$ elemét!*

Megoldás
Az 5-ös index a merevségi mátrix ötödik oszlopára utal, és a 6.1. táblázat alapján azt jelenti, hogy a $\tilde{v}_{ky}(x)$ dinamikus alakfüggvény rúdvégi igénybevételeiből kell a 3-as indexnek megfelelően a harmadikat kiszámítani. Azaz, a végpont eltolódása esetén a kezdőpontra működtetendő nyomatékot akarjuk meghatározni. Az ehhez szükséges virtuális elmozdulásrendszer az 5.1. táblázat alapján a $v_{j\varphi}(x)$ függvény lesz. A 6.3.a) ábrán feltüntettük a dinamikus alakot, a keresett rúdvégi erőt, a tehetetlenségi erőt és a közegellenállást, míg az 5.7.b) ábrán a felhasznált statikus alakot. A virtuális

munka (a zérus hosszirányú elmozdulások miatt zérus tagokat kihagytuk):

$$\begin{aligned}\delta\tilde{W}_{ks} = 0 = -\tilde{M}_{jky}e^{i\omega t}\cdot 1 + \int_0^{l_{jk}} (-\mu\ddot{v}_{ky}(x,t))v_{j\varphi}(x)dx \\ + \int_0^{l_{jk}} (-\mu\alpha\dot{v}_{ky}(x,t))v_{j\varphi}(x)dx - \int_0^{l_{jk}} EI\tilde{M}_{ky}(x,t)\kappa_{j\varphi}(x)dx = \\ \Bigg[-\tilde{M}_{jky} + \int_0^{l_{jk}} \omega^2\mu\tilde{v}_{ky}(x)v_{j\varphi}(x)dx - \int_0^{l_{jk}} i\omega\mu\tilde{v}_{ky}(x)v_{j\varphi}(x)dx \\ - \int_0^{l_{jk}} EI\tilde{v}''_{ky}(x)v''_{j\varphi}(x)dx - \int_0^{l_{jk}} i\omega\beta EI\tilde{v}''_{ky}(x)v''_{j\varphi}(x)dx\Bigg] e^{i\omega t}.\end{aligned} \tag{6.126}$$

Ezt megoldva $-\tilde{M}_{jky}$-ra megkapjuk a keresett $\tilde{K}_{35}$-t:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{35} = -\tilde{M}_{jky} = +EI\int_0^{l_{jk}} \tilde{v}''_{ky}(x)v''_{j\varphi}(x)dx - \omega^2\mu\int_0^{l_{jk}} \tilde{v}_{ky}(x)v_{j\varphi}(x)dx \\ + \int_0^{l_{jk}} i\omega\beta EI\tilde{v}''_{ky}(x)v''_{j\varphi}(x)dx + \int_0^{l_{jk}} i\omega\mu\tilde{v}_{ky}(x)v_{j\varphi}(x)dx\end{aligned} \tag{6.127}$$

6.2.4.4. Komplex dinamikus merevség közelítése

Amennyiben nem $e^{i\omega t}$ alakú a gerjesztés (márpedig az a tipikus eset), úgy nincs olyan állandósult rezgés, amelynek körfrekvenciájához előállíthatnánk a dinamikus alakfüggvényeket. Ilyenkor csak közelíteni tudjuk azokat, és értelemszerűen a (6.125) képletben is közelítenünk kell a komplex dinamikus alakfüggvényeket. Ahogy a csillapítatlan esetben, itt is természetes választás, hogy a statikus alakfüggvényekkel közelítsük az ismeretlen komplex dinamikus alakfüggvényeket. Egy ilyen közelítés mellett a keresett eleme a komplex dinamikus merevségi mátrixnak:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{\xi\eta} = \pm Q_{\xi\eta} \approx -\omega^2\mu\int_0^{l_{jk}} u_\eta(x)u_\xi(x)dx - \omega^2\mu\int_0^{l_{jk}} v_\eta(x)v_\xi(x)dx \\ + i\omega\alpha\mu\int_0^{l_{jk}} u_\eta(x)u_\xi(x)dx + i\omega\alpha\mu\int_0^{l_{jk}} v_\eta(x)v_\xi(x)dx \\ + EA\int_0^{l_{jk}} u'_\eta(x)u'_\xi(x)dx + EI\int_0^{l_{jk}} v''_\eta(x)v''_\xi(x)dx \\ i\omega\beta EA\int_0^{l_{jk}} u'_\eta(x)u'_\xi(x)dx + i\omega\beta EI\int_0^{l_{jk}} v''_\eta(x)v''_\xi(x)dx\end{aligned} \tag{6.128}$$

Az így kapott integrálkifejezések az első két sorban a konzisztens tömegmátrix $\xi\eta$-elemét tartalmazzák $-\omega^2$-tel, illetve $i\omega\alpha$-val szorozva, a második két sorban pedig a statikus merevségi mátrix $\xi\eta$-elemét tartalmazzák önmagában, illetve $i\omega\beta$-val szorozva. A közelítés tehát röviden úgy írható, hogy:

$$\tilde{K}_{\xi\eta} \approx -\omega^2 M_{\xi\eta} + i\omega\alpha M_{\xi\eta} + K_{\xi\eta} + i\omega\beta K_{\xi\eta} \tag{6.129}$$

Mivel ez az összefüggés az elemi komplex dinamikus merevségi mátrix minden $\xi\eta$-elemére igaz, ezért a rúdelem mátrixára is felírható:

$$\underline{\underline{\tilde{K}}}^{jk} = \underline{\underline{K}}^{jk} - \omega^2 \underline{\underline{M}}^{jk} + i\omega\left(\alpha \underline{\underline{M}}^{jk} + \beta \underline{\underline{K}}^{jk}\right) \tag{6.130}$$

A kapott eredményt a komplex dinamikus merevségi mátrix (6.94) szerinti definíciójával összevetve azt láthatjuk, hogy a képzetes tagok zárójelében levő mátrixnak a jk-rúdelem csillapítási mátrixával kell megegyeznie, azaz a közeg-ellenállás modellje és a választott anyagmodell mellett:

$$\boxed{\underline{\underline{C}}^{jk} = \alpha \underline{\underline{M}}^{jk} + \beta \underline{\underline{K}}^{jk}} \tag{6.131}$$

Az elemi csillapítási mátrix tehát a tömegmátrix és a merevségi mátrix lineáris kombinációjaként állítható elő, azokkal arányos.

6.3. Többszabadságfokú rendszerek csillapítása

6.3.1. Arányos csillapítás és következményei

A 6.2. fejezetben levezettük, hogy egy α paraméterrel megadott környezetben mozgó, β paraméterrel jellemzett belső viszkozitású rúdelem esetén az elemi csillapítási mátrixot (6.131) alapján a

$$\boxed{\underline{\underline{C}}^{jk} = \alpha \underline{\underline{M}}^{jk} + \beta \underline{\underline{K}}^{jk}} \tag{6.132}$$

képlettel közelíthetjük. A teljes szerkezet $\underline{\underline{C}}$ csillapítási mátrixát ezután a merevségi és a tömegmátrixhoz hasonlóan állíthatjuk elő. Először, ha szükséges, az elemi mátrixokat a globális koordinátarendszerbe forgatjuk az (5.88) képletekhez hasonlóan:

$$\underline{\underline{C}}^{gl}_{jk} = \underline{\underline{\hat{T}}}_{jk} \underline{\underline{C}}^{lok}_{jk} \underline{\underline{\hat{T}}}^{T}_{jk}. \tag{6.133}$$

Ezután az elemi mátrix jj-, jk-, kj-, kk-blokkjait hozzáadjuk a teljes szerkezet jj-, jk-, kj-, kk-blokkjaihoz. A peremfeltételek figyelembevétele is azonos módon, legegyszerűbb esetben sorok és oszlopok törlésével és a mátrix kondenzációjával történik.

Amennyiben a teljes szerkezeten minden rúdelemnek azonos az α és β paramétere[5], úgy a kompilálás során q $\underline{\underline{C}}$ mátrix minden eleme az $\underline{\underline{M}}$ és $\underline{\underline{K}}$ mátrix azonos elemeinek α és β szerinti kombinációja lesz, és a kombinációt nem szükséges elemenként számolni, hanem a teljes szerkezet tömegmátrixából és merevségi mátrixábó megkaphatjuk a

$$\boxed{\underline{\underline{C}} = \alpha \underline{\underline{M}} + \beta \underline{\underline{K}}} \tag{6.134}$$

képlettel. Ezt az esetet *arányos csillapítás*nak nevezzük.

Arányos csillapítás esetén a mozgás differenciálegyenlete ((6.1) és (6.134)):

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{u}}(t) + \left(\alpha \underline{\underline{M}} + \beta \underline{\underline{K}}\right) \underline{\dot{u}}(t) + \underline{\underline{K}}\,\underline{u}(t) = \underline{q}(t), \tag{6.135}$$

[5] Ez α esetén nem feltétlenül jelent azonos közeget, hiszen a közegellenállást a $\zeta = \alpha\mu$ együtthatóval számoljuk (6.109) képletei alapján.

Oldjuk meg az egyenletet valós modálanalízissel, azaz keressük az $\underline{u}(t)$ vektort a csillapítatlan rendszer sajátvektorainak lineáris kombinációjaként. Legyen:

$$\underline{u}(t) = \underline{\underline{V}}\underline{y}(t), \qquad \underline{\dot{u}}(t) = \underline{\underline{V}}\underline{\dot{y}}(t), \qquad \underline{\dot{u}}(t) = \underline{\underline{V}}\underline{\ddot{y}}(t), \tag{6.136}$$

ahol $\underline{y}(t)$, $\underline{\dot{y}}(t)$ és $\underline{\ddot{y}}(t)$ rendre a modális koordináták, sebességek és gyorsulások vektora, $\underline{\underline{V}}$ pedig a modális mátrix. Behelyetteítve ezeket a (6.135) egyenletbe:

$$\underline{\underline{MV}}\underline{\ddot{y}}(t) + \left(\alpha\underline{\underline{M}} + \beta\underline{\underline{K}}\right)\underline{\underline{V}}\underline{\dot{y}}(t) + \underline{\underline{KV}}\underline{y}(t) = \underline{q}(t). \tag{6.137}$$

A második tag mátrixát alakítsuk át

$$\left(\alpha\underline{\underline{M}} + \beta\underline{\underline{K}}\right)\underline{\underline{V}} = \left(\alpha\underline{\underline{MV}} + \beta\underline{\underline{KV}}\right) \tag{6.138}$$

alakúra, majd szorozzuk be balról mindkét oldalt $\underline{\underline{V}}^T$-vel:

$$\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{MV}}\underline{\ddot{y}}(t) + \left(\alpha\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{MV}} + \beta\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{KV}}\right)\underline{\dot{y}}(t) + \underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{KV}}\underline{y}(t) = \underline{\underline{V}}^T\underline{q}(t). \tag{6.139}$$

A sajátvektorok (3.179) szerinti tulajdonságai miatt a mátrix hármasszorzatok mindegyike diagonálmátrixszá egyszerűsödik:

$$\underline{\underline{I}}\underline{\ddot{y}}(t) + \left(\alpha\underline{\underline{I}} + \beta\underline{\underline{\Omega}}^2\right)\underline{\dot{y}}(t) + \underline{\underline{\Omega}}^2\underline{y}(t) = \underline{f}(t). \tag{6.140}$$

A diagonálmátrixok miatt a kapcsolt differenciálegyenletrendszer szétesik az egyes rezgésalakok közönséges differenciálegyenleteire. [6]

A rezgésalakok differenciálegyenleteinek szétesése miatt a j-edik alak differenciálegyenlete:

$$\ddot{y}_j(t) + \left(\alpha + \omega_{0j}^2\beta\right)\dot{y}_j(t) + \omega_{0j}^2 y_j(t) = f_j(t), \tag{6.141}$$

ahol $f_j(t) = \underline{v}_j^T\underline{q}(t)$ a teher vetülete a rezgésmódra. A j-edik mód, mint egységnyi tömegű rendszer kritikus csillapítása:

$$c_{j,kr} = 2\sqrt{1\omega_{0j}^2} = 2\omega_{0j}, \tag{6.142}$$

a csillapítási hányada pedig:

$$\xi_j = \frac{c_j}{c_{j,kr}} = \frac{\alpha + \omega_{0j}^2\beta}{2\omega_{0j}}, \tag{6.143}$$

vagy egyszerűsítve:

$$\boxed{\xi_j = \frac{\alpha}{2\omega_{0j}} + \frac{\omega_{0j}\beta}{2}.} \tag{6.144}$$

[6] Megjegyezzük, hogy azt, hogy a $\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{CV}}$ szorzat diagonálmátrixszá válik, a Caughey-O'Kelly-feltétellel is igazolhatjuk. A (6.14) egyenlet bal oldala ugyanis:

$$\underline{\underline{KM}}^{-1}\left(\alpha\underline{\underline{M}} + \beta\underline{\underline{K}}\right) = \alpha\underline{\underline{KM}}^{-1}\underline{\underline{M}} + \beta\underline{\underline{KM}}^{-1}\underline{\underline{K}} = \alpha\underline{\underline{K}} + \beta\underline{\underline{KM}}^{-1}\underline{\underline{K}},$$

míg a jobb oldala:

$$\left(\alpha\underline{\underline{M}} + \beta\underline{\underline{K}}\right)\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}} = \alpha\underline{\underline{MM}}^{-1}\underline{\underline{K}} + \beta\underline{\underline{KM}}^{-1}\underline{\underline{K}} = \alpha\underline{\underline{K}} + \beta\underline{\underline{KM}}^{-1}\underline{\underline{K}}.$$

Arányos csillapítás esetén tehát a modális csillapítási hányad frekvenciafüggő, egy lineáris és egy hiperbolikus függvény összege. A modális csillapítás frekvenciafüggése miatt a logaritmikus dekrementum is frekvenciafüggő lesz. Ahogy (2.113) képletével definiáltuk korábban a logaritmikus dekrementumot:

$$\vartheta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \tag{6.145}$$

úgy a modális csillapítás értékét behelyettesíthetjük:

$$\vartheta_j = \frac{2\pi\left(\frac{\alpha}{2\omega_{0j}} + \frac{\omega_{0j}\beta}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{2\omega_{0j}} + \frac{\omega_{0j}\beta}{2}\right)^2}}, \tag{6.146}$$

A 6.4. ábrán bemutatjuk a modális csillapítási hányad tipikus alakját a sajátkörfrekvencia függvényében. Látható, hogy kellően kis sajátkörfrekvencia esetén mindig a hiperbolikus tag dominál, kellően nagy sajátkörfrekvencia esetén pedig a lineáris tag szerepe jelentős. Mindkét esetben nagy csillapítás van. Ahhoz, hogy egy rezgésmódhoz kis csillapítás is tartozzon az kell, hogy az

$$\frac{\alpha}{2\omega} + \frac{\omega\beta}{2} = 1 \tag{6.147}$$

egyenletnek legyen két valós ω-gyöke és a sajátkörfrekvencia e két valós gyök közé essen. Az egyenlet ω-ban másodfokú egyenletté alakításával és megoldásával belátható, hogy valós gyököket akkor kapunk, ha $\alpha\beta \leq 1$, és ilyenkor a kis csillapítás feltétele a sajátkörfrekenciára az alábbi:

$$\frac{1-\sqrt{1-\alpha\beta}}{\beta} < \omega_{0j} < \frac{1+\sqrt{1-\alpha\beta}}{\beta}. \tag{6.148}$$

A 6.4.a) ábrán egy olyan eset látható, amikor van kis csillapítású tartomány, a 6.4.b) ábrán pedig egy olyan, amikor nincs.

Mivel a (6.144) csillapítási hányad egy lineáris és egy hiperbolikus függvény összege, a minimuma mindig ott lesz, ahol a két összegzendő tag azonos. Ennek frekvenciája:

$$\omega_0^{min} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \tag{6.149}$$

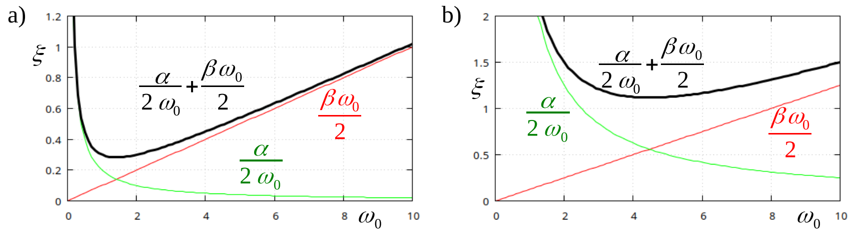
értéke pedig $\xi_{min} = \sqrt{\alpha\beta}$.

Merevséggel arányos csillapítás Emlékeztetünk rá, hogy az arányos csillapítás levezetésekor α jellemezte a közegellenállást, β pedig az anyagmodellből származó csillapítást. Az építőmérnöki feladatok jelentős részében a közegellenállás hatása elhanyagolható. Ilyenkor $\alpha = 0$, ezért a csillapítási mátrix csak a merevséggel arányos:

$$\underline{\underline{C}} = \beta\underline{\underline{K}}, \tag{6.150}$$

aminek következménye, hogy ilyenkor a modális csillapítási hányados is csak a lineáris tagból áll:

$$\xi_j = \frac{\beta\omega_{0j}}{2}. \tag{6.151}$$



6.4. ábra. Modális csillapítási hányad arányos csillapítás esetén. a) $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.2$ eset: létezik kis csillapítási tartománya a sajátkörfrekvenciáknak. b) $\alpha = 5$, $\beta = 0.25$ eset: minden rezgésmód nagy csillapítású.

6.3.2. Frekvenciafüggetlen csillapítás

Az arányos csillapításból származó, frekvenciafüggő, modális csillapítás ellenőrzése egyetlen szerkezeten azért nehéz, mert a magasabb rezgésalakokból történő indítás után kellene a magára hagyott szerkezet rezgésének lecsengését mérni, viszont a kezdeti alak hibája miatt más (alacsonyabb) rezgésalakok zavarása is megjelenne a mérési eredményekben.

Egy másik kísérleti elrendezés lehet, ha azonos szerkezeti kialakítású, de különböző hosszúságú gerendák szabadrezgését követjük. Azonos anyagból készült, azonos keresztmetszetű, egyik végükön befogott másikon szabad végű, de különböző hosszúságú gerendák szabadrezgését követhetjük úgy, hogy a végpontot kitérítve, majd a gerendát magára hagyva mérjük a végpont időbeli kitérését[7].

A 6.5.a) ábrán mutatunk három ilyen, egyik végén befogott konzolt, a 6.5.b) ábrán pedig a kitérések időbeli lecsengését. A kezdeti kitérített alak nagyon hasonló az első rezgésalakhoz, így a magasabb rezgésalakok szerepe elhanyagolható, a rezgés az első rezgésalak szerint történik.

A hajlítási sajátkörfrekvenciák azonos topológia mellett a hosszúság négyzetének reciprokával arányosak, azaz a második konzol első sajátkörfrekvenciája 2.25-öd része az első konzol első sajátkörfrekvenciájának, a harmadik konzol első sajátkörfrekvenciája pedig negyedei az első konzol első sajátkörfrekvenciájának[8].

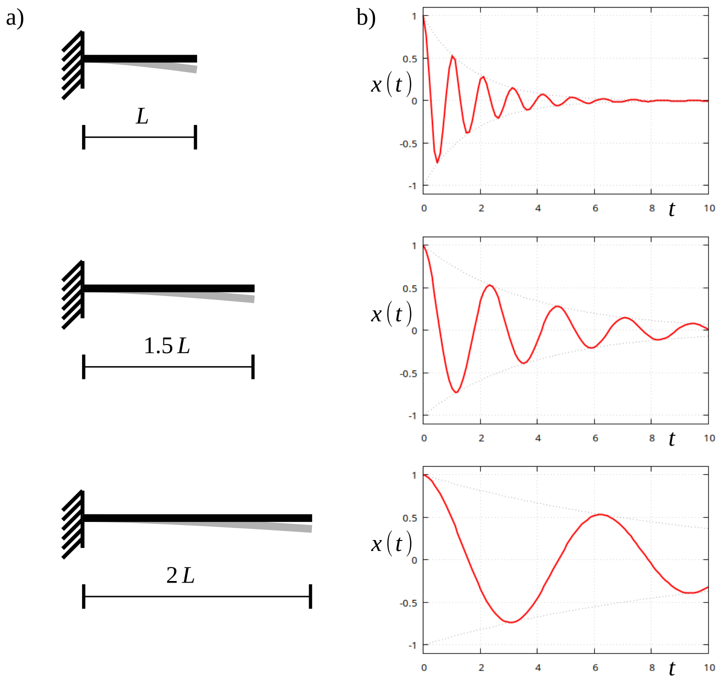
Tudjuk, hogy egy-egy ilyen szabadrezgés a (2.107) egyenlete szerint egy exponenciális lecsengés és egy harmonikus függvény szorzata, ahol az egymást követő maximumok arányát a logaritmikus dekrementum határozza meg.

A 6.5.b) ábrán látható függvények maximumait vizsgálva azt állapíthatjuk meg, hogy az egymást követő maximumok aránya a három tartó esetén azonosak, azaz a logaritmikus dekrementum, és így a csillapítási hányad a sajátkörfrekvenciától független. Ez azért van így, mert a Kelvin-Voigt-anyagmodell nem jól írja le az anyag tényleges időbeli viselkedését: az ott bevezetett α és β paraméterek helyett a csillapítást az anyagjellemzőként megadható ξ értékkel kellene jellemezni. Az így megadott csillapítást *frekvenciafüggetlen csillapítás*nak, vagy *szerkezeti csillapítás*nak nevezzük.

Frekvenciafüggetlen csillapítás esetén a ξ csillapítási hányad minden saját-

[7]Mindenki ismer valakit, aki játszott ilyet a pad szélén egy egyenes vonalzóval, csak nem mérte a kitérés időbeli lefutását.

[8]Ugyanez az arány a magasabb rezgésalakok körfrekvenciájára is érvényes, de azok kísérleti előállítása lényegesen nehezebb.



6.5. ábra. Laborkísérlet a modális csillapítási hányad vizsgálatára szabadrezgés segítségével. a) A három kísérleti elrendezés: a középső konzol másfélszer olyan hosszú, mint a felső, Az alsó konzol kétszer olyan hosszú, mint a felső. b) A kitérített, majd elengedett végpont kitérésének időbeli lecsengése a három tartó esetén.

körfrekvenciánál azonos, így a 6.5.b) ábrán bemutatott elmozdulások egyaránt a (2.107) függvény szerint rezegnek:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \cdot (A \cdot \cos(\omega_0^* t) + B \cdot \sin(\omega_0^* t)) \,., \tag{6.152}$$

ahol az egyes sajátkörfrekvenciák és csillapított sajátkörfrekvenciák lesznek 2.25-öd akkora, illetve negyedakkora értékűek a felső esethez képest. A sajátkörfrekvencia csökkenése miatt a rezgés időbeli lecsengése lassabb lesz (az exponenciális kitevőben levő ω_0 miatt), de azonos idő alatt kevesebb oda-vissza mozgást végez a tartó (a harmonikus függvényekben levő ω_0^* miatt). A két hatás az amplitúdók csökkenése szempontjából a fent leírt módon egyenlíti ki egymást.

Ha a szerkezetünk csillapítását a Kelvin-Voigt-modell paraméterei helyett a ξ hányados jellemzi, akkor nem tudjuk előállítani az arányos csillapítás $\underline{\underline{C}}$ mátrixát. Igaz, erre ilyenkor nincs is szükségünk: az általánosított sajátértékfeladatot a csillapítatlan rendszeren oldjuk meg, a csillapítást pedig csak a modálanalízis közben, az egyes rezgésmódok válaszának számításakor építjük be a megoldásba, akkor már a ξ értékét felhasználva.

A merevséggel arányos csillapítás (6.151) összefüggését átfogalmazva ilyenkor a β paraméter értéke válik frekvenciafüggővé:

$$\beta_j = \frac{2\xi}{\omega_{0j}}. \tag{6.153}$$

azaz nagyobb sajátkörfrekvenciák (gyorsabban változó elmozdulások, alakváltozások) esetén a Kelvin-Voigt-modellben csökkenteni kellene a viszkózus tag szerepét.

6.3.2.1. Komplex statikus merevségi mátrix

Ha komplex harmonikus gerjesztéssel terheljük a ξ szerkezeti csillapítással rendelkező szerkezetünket, akkor a merevséggel arányos csillapítás β paraméterét igazíthatjuk a gerjesztés körfrekvenciájához:

$$\beta = \frac{2\xi}{\omega}. \tag{6.154}$$

A merevséggel arányos csillapítással felírhatjuk a mozgás differenciálegyenletét:

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{\tilde{u}}}(t) + \beta\underline{\underline{K}}\dot{\underline{\tilde{u}}}(t) + \underline{\underline{K}}\underline{\tilde{u}}(t) = \underline{q}_0 e^{i\omega t}, \tag{6.155}$$

melynek megoldását kereshetjük a gerjesztéssel azonos időfüggő alakban, így a deriváltak és (6.154) behelyettesítésével:

$$-\omega^2\underline{\underline{M}}\underline{\tilde{u}}_0 e^{i\omega t} + i\omega\frac{2\xi}{\omega}\underline{\underline{K}}\underline{\tilde{u}}_0 e^{i\omega t} + \underline{\underline{K}}\underline{\tilde{u}}_0 e^{i\omega t} = \underline{q}_0 e^{i\omega t} \tag{6.156}$$

adódik. Az időfüggéstől megszabadulva, a válasz komplex amplitúdója éa a gerjesztés amplitúdója között az alábbi kapcsolat írható fel:

$$\left((1+2i\xi)\,\underline{\underline{K}} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{\tilde{u}}_0 = \underline{q}_0 \tag{6.157}$$

Vezessük be a *komplex statikus merevségi mátrix*ot az alábbi módon:

$$\underline{\underline{\tilde{K}}}_{st} = (1+2i\xi)\,\underline{\underline{K}}. \tag{6.158}$$

Ezzel a komplex dinamikai merevségi mátrix (6.157) képletében egyszerűsíthető:

$$\left(\underline{\underline{\tilde{K}}}_{st} - \omega^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{\tilde{u}}_0 = \underline{q}_0, \tag{6.159}$$

és a mozgás differenciálegyenlete is átírható az alábbi alakra:

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{\tilde{u}}}(t) + \underline{\underline{\tilde{K}}}_{st}\underline{\tilde{u}}(t) = \underline{q}(t). \tag{6.160}$$

Az így felírt differenciálegyenletben formálisan nincsen benne a sebesség, a komplex statikus merevségi mátrixon keresztül viszont mégis egy csillapított rendszer leírására alkalmas.

6.3.2.2. Különböző csillapítási hányadosú elemek

Szerkezeti csillapítás esetén felmerül az a kérdés, hogy milyen csillapítási hányadot alkalmazzunk akkor, ha nem minden elemnek azonos a ξ értéke. Ilyenkor is lehetőségünk van a csillapítatlan rendszer sajátalakjaival végzett modálanalízisre, de az egyes rezgésalakokhoz tartozó modális csillapítási hányadot az egyes elemek csillapítási hányadának súlyozott átlagaként kell felvenni úgy, hogy azonos energia disszipálódjon a csillapítás miatt az adott rezgésmódban, mint a szerkezetben.

Az r-edik rezgésalak esetére az *ekvivalens csillapítási hányad*ot a

$$\xi^r_{ekv} = \sum_{jk} w^r_{jk}\xi_{jk} \tag{6.161}$$

képlettel számoljuk, ξ_{jk} a jk-elem csillapítási hányadosa, w^r_{jk} pedig az ehhez tartozó súly az r-edik rezgésalakban. Az egyes csillapítási hányadok súlya rezgésalakonként eltérő lehet, nézzük meg, hogyan számolhatjuk azokat.

Az ekvivalens csillapítási hányadostól azt várjuk, hogy az adott rezgésalak szabadrezgésének lecsengését kövesse. A lecsengés a mozgási energia disszipációja miatt következik be, ezért a w_{jk} súlyt a jk-elem K^r_{jk} mozgási energiájának és a teljes szerkezet K^r mozgási energiájának hányadosaként állíthatjuk elő:

$$w^r_{jk} = \frac{K^r_{jk}}{K^r}. \tag{6.162}$$

Az r-edik rezgésalakkal történő rezgés során a szerkezet csomópontjai az

$$\underline{u}(t) = \underline{v}_r h_r(t) \tag{6.163}$$

függvény szerint rezegnek, ahol $\underline{v}_r$ az r-edik sajátvektor, $h_r(t)$ pedig egy ω_{0r} sajátkörfrekvenciájú harmonikus függvény. Ennek megfelelően a sebességfüggvény:

$$\underline{\dot{u}}(t) = \underline{v}_r \dot{h}_r(t) = \underline{v}_r \omega_{0r} \bar{h}_r(t), \tag{6.164}$$

a teljes szerkezet mozgási energiája pedig:

$$K^r(t) = \frac{1}{2}\underline{u}^T(t)\underline{\underline{M}}\,\underline{u}(t) = \frac{1}{2}\bar{h}^2_r(t)\omega^2_{0r}\underline{v}^T_r\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_r. \tag{6.165}$$

A sajátvektorokról tudjuk, hogy (3.166) szerint $\omega^2_{0r}\underline{v}^T_r\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_r = \underline{v}^T_r\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_r$, így a teljes szerkezet mozgási energiája:

$$K^r(t) = \frac{1}{2}\bar{h}^2_r(t)\underline{v}^T_r\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_r. \tag{6.166}$$

A jk elemben fellépő mozgási energiát úgy tudjuk számolni, ha csak a j és k csomópontok elmozdulásait, és a jk-elem $\underline{\underline{K}}_{jk}$ elemi merevségi mátrixát vesszük figyelembe:

$$K^r_{jk}(t) = \frac{1}{2}\bar{h}^2_r(t)\underline{v}^{jkT}_r\underline{\underline{K}}_{jk}\underline{v}^{jk}_r. \tag{6.167}$$

A jk elem súlya (6.162) képlete alapján:

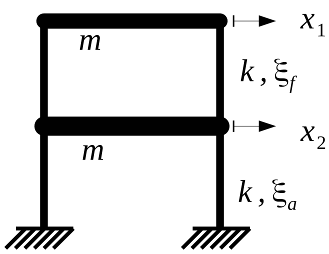
$$w^r_{jk} = \frac{\frac{1}{2}\bar{h}^2_r(t)\underline{v}^{jkT}_r\underline{\underline{K}}_{jk}\underline{v}^{jk}_r}{\frac{1}{2}\bar{h}^2_r(t)\underline{v}^T_r\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_r}, \tag{6.168}$$

ami a számláló és nevező egyszerűsítése után:

$$w^r_{jk} = \frac{\underline{v}^{jkT}_r\underline{\underline{K}}_{jk}\underline{v}^{jk}_r}{\underline{v}^T_r\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_r}. \tag{6.169}$$

Az r-edik rezgésalak ekvivalen csillapítási hányadosa ezek alapján (6.161) képletéből

$$\boxed{\xi^r_{ekv} = \frac{\sum_{jk}\xi_{jk}\underline{v}^{jkT}_r\underline{\underline{K}}_{jk}\underline{v}^{jk}_r}{\underline{v}^T_r\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_r}} \tag{6.170}$$



6.6. ábra. Szerkezeti modell az ekvivalens csillapítási hányados számításához.

A súlyozott átlagot talán jobban tükrözi, ha a nevezőt is az egyes elemek összegeként állítjuk elő, ekkor ugyanez a hányados az alábbi lesz:

$$\xi^r_{ekv} = \frac{\sum_{jk} \xi_{jk} \underline{v}_r^{jkT} \underline{\underline{K}}_{jk} \underline{v}_r^{jk}}{\sum_{jk} \underline{v}_r^{jkT} \underline{\underline{K}}_{jk} \underline{v}_r^{jk}}. \tag{6.171}$$

6.3.1. Példa (Ekvivalens csillapítási hányados)**.** *Határozzuk meg a 6.6. ábrán látható szerkezet modális csillapítási hányadosait, ha $k = 100kN/m$, $m = 10t$, az alsó szint oszlopaiban $\xi_a = 0.1$, a felső szint oszlopaiban $\xi_f = 0.2$.*

Megoldás
A kétszabadságfokú szerkezet tömegmátrixa egy diagonálmátrix:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}. \tag{6.172}$$

A két szinten az oszlopok elemi merevségi mátrixa is azonos:

$$\underline{\underline{K}}^f = \underline{\underline{K}}^a = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}, \tag{6.173}$$

ezekből kell a szerkezet merevségi mátrixát kompilálni:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix}. \tag{6.174}$$

A rendszermátrixok ismeretében kell megoldanunk az általánosított sajátértékfeladatot. Először a $|\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \underline{\underline{M}}| = 0$ egyenlet megoldásaként kapjuk a sajátkörfrekvenciákat, majd egyenként visszahelyettesítve azokat a

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega_{0,j}^2 \underline{\underline{M}}\right) \underline{v}_j = \underline{0}$$

egyenletbe kapjuk meg a sajátvektorokat, amiket a tömegmátrixra normálunk. Ezek eredményeként:

$$\underline{\underline{\Omega}} = \left\langle 1.9544 \quad 5.1167 \right\rangle, \tag{6.175}$$

$$\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} 0.2690 & 0.1663 \\ 0.1663 & -0.2690 \end{bmatrix}. \tag{6.176}$$

- Az első rezgésalakban a szerkezet a $\underline{\underline{V}}$ mátrix első oszlopából kiolvasható $\underline{v}_1$ vektor szerint rezeg. eközben az egyes szintek végpontjainak az elmozdulásaiból tudjuk meghatározni azok $\underline{v}_1^f$ és $\underline{v}_1^a$ elemi elmozdulásvektorait (az alsó rúdelem alsó végpontja a támasz, ami nem mozog):

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.2690 \\ 0.1663 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_1^f = \underline{v}_1^{12} = \begin{bmatrix} 0.2690 \\ 0.1663 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_1^a = \underline{v}_1^{2t} = \begin{bmatrix} 0.1663 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.177}$$

Ezek segítségével kell számolnunk a (6.170) képlet számlálójában és nevezőjében előforduló vektor-mátrix-vektorszorzatokat:

$$\underline{v}_1^f \underline{\underline{K}}^f \underline{v}_1^f = \begin{bmatrix} 0.2690 & 0.1663 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2690 \\ 0.1663 \end{bmatrix} = 1.0557 \tag{6.178}$$

$$\underline{v}_1^a \underline{\underline{K}}^a \underline{v}_1^a = \begin{bmatrix} 0.1663 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1663 \\ 0 \end{bmatrix} = 2.7639 \tag{6.179}$$

$$\underline{v}_1 \underline{\underline{K}} \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.2690 & 0.1663 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2690 \\ 0.1663 \end{bmatrix} = 3.8197 \tag{6.180}$$

Végül behelyettesítve (6.170) képletébe:

$$\boxed{\xi_{ekv}^1 = \frac{0.2 \cdot 1.0557 + 0.1 \cdot 2.7639}{3.8197} = 0.1276} \tag{6.181}$$

- A második rezgésalakban a szerkezet a $\underline{\underline{V}}$ mátrix második oszlopából kiolvasható $\underline{v}_2$ vektor szerint rezeg. eközben az egyes szintek végpontjainak az elmozdulásaiból tudjuk meghatározni azok $\underline{v}_2^f$ és $\underline{v}_2^a$ elemi elmozdulásvektorait (az alsó rúdelem alsó végpontja a támasz, ami nem mozog):

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.1663 \\ -0.2690 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2^f = \underline{v}_2^{12} = \begin{bmatrix} 0.1663 \\ -0.2690 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2^a = \underline{v}_2^{2t} = \begin{bmatrix} -0.2690 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.182}$$

Ezek segítségével kell számolnunk a (6.170) képlet számlálójában és nevezőjében előforduló vektor-mátrix-vektorszorzatokat:

$$\underline{v}_2^f \underline{\underline{K}}^f \underline{v}_2^f = \begin{bmatrix} 0.1663 & -0.2690 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1663 \\ -0.2690 \end{bmatrix} = 18.944 \tag{6.183}$$

$$\underline{v}_2^a \underline{\underline{K}}^a \underline{v}_2^a = \begin{bmatrix} -0.2690 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2690 \\ 0 \end{bmatrix} = 7.2361 \tag{6.184}$$

$$\underline{v}_2 \underline{\underline{K}} \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.1663 & -0.2690 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1663 \\ -0.2690 \end{bmatrix} = 26.180 \tag{6.185}$$

Végül behelyettesítve (6.170) képletébe:

$$\boxed{\xi_{ekv}^2 = \frac{0.2 \cdot 18.944 + 0.1 \cdot 7.2361}{26.180} = 0.1724} \tag{6.186}$$

6.3.3. Csillapítási mátrix illesztése

6.3.3.1. Rayleigh-csillapítás

A ξ frekvenciafüggetlen szerkezeti csillapítás esetén általában nem tudunk előállítani egy $\underline{\underline{C}}$ mátrixot. Ha mégis szükség van a mátrixra, akkor közelítő megoldást használhatunk. Egyik ilyen közelítési lehetőség a Rayleigh-csillapítás, amikor arányos csillapításként (6.134) állítjuk elő a csillapítási mátrixot:

$$\underline{\underline{C}} = \alpha \underline{\underline{M}} + \beta \underline{\underline{K}}. \tag{6.187}$$

Ilyenkor az α és β paramétereket kell úgy változtatnunk, hogy a kívánt módon adja ξ közelítését általunk kiválasztott körfrekvenciáknál.

A legegyszerűbb eset az, ha azt követeljük meg, hogy két körfrekvencia, ω_m és ω_n esetén a (6.144) csillapítási hányados egyezzen meg az előírt értékkel, azaz:

$$\xi = \frac{\alpha}{2\omega_m} + \frac{\beta\omega_n}{2}, \tag{6.188}$$

$$\xi = \frac{\alpha}{2\omega_n} + \frac{\beta\omega_n}{2}. \tag{6.189}$$

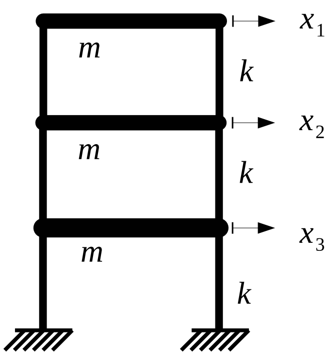
Az egyenletrendszer megoldása:

$$\alpha = \xi\frac{2\omega_m\omega_n}{\omega_m + \omega_n}, \qquad \beta = \xi\frac{2}{\omega_m + \omega_n}. \tag{6.190}$$

A 6.4. ábra alapján megállapíthatjuk, hogy az így közelített $\underline{\underline{C}}$ csillapítási mátrix a modellezett ξ értékénél nagyobb csillapítással számol az olyan rezgésekre, melyek frekvenciája kisebb ω_m és ω_n minimumánál, vagy nagyobb ω_m és ω_n maximumánál. Ha a körfrekvencia a két érték közé esik, akkor a számolt csillapítás kisebb lesz a ténylegesnél.

Az ω_m és ω_n frekvenciák felvételére többféle lehetőség is van. Lehetnek az első és a második sajátkörfrekvencia, vagy lehet két tetszőleges sajátkörfrekvencia. Lehet a gerjesztés függvényében felvenni a két frekvenciát, vagy úgy, hogy egy bizonyos ω tartományon belüli sajátkörfrekvenciák esetére számított ξ értékek hibáinak az összege minimális legyen.

6.3.2. Példa (Rayleigh-féle csillapítás)**.** *Határozzuk meg a 6.7. ábrán látható szerkezeten α és β értékét, ha az első és a harmadik sajátkörfrekvenciához illesztjük a $\xi = 0.1$ csillapítási hányadot. Mekkora ebben az esetben a második rezgésalak modális csillapítási hányadosa? Adott: $k = 100kN/m$, $m = 10t$.*



6.7. ábra. Szerkezeti modell a Rayleigh-féle csillapítás számításához.

Megoldás
A szerkezet tömegmátrixa egy diagonálmátrix:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}. \tag{6.191}$$

A merevségi mátrixot a szintenkénti merevségekből kompilálással a legkönnyebb előállítani:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 \\ -100 & 200 & -100 \\ 0 & -100 & 200 \end{bmatrix}. \tag{6.192}$$

A rendszermátrixok ismeretében kell megoldanunk az általánosított sajátértékfeladatot. Először a $|\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \underline{\underline{M}}| = 0$ egyenlet megoldásaként kapjuk a sajátkörfrekvenciákat, majd egyenként visszahelyettesítve azokat a

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega_{0,j}^2 \underline{\underline{M}}\right) \underline{v}_j = \underline{0}$$

egyenletbe kapjuk meg a sajátvektorokat, amiket a tömegmátrixra normálunk. Ezek eredményeként:

$$\underline{\underline{\Omega}} = \left\langle 1.4073 \quad 3.9433 \quad 5.6982 \right\rangle, \tag{6.193}$$

$$\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} 0.2331 & 0.1869 & 0.1037 \\ 0.1869 & -0.1037 & -0.2331 \\ 0.1037 & -0.2331 & 0.1869 \end{bmatrix}. \tag{6.194}$$

A felhasználandó (6.190) képletből kiolvasható, hogy a sajátrezgésalakokra ebben a feladatban nincs is szükségünk, csak az első és a harmadik sajátkörfrekvenciákra. A képletbe behelyettesítve ezeket és a csillapítási hányadost:

$$\alpha = 0.1 \cdot \frac{2 \cdot 1.4073 \cdot 5.6982}{1.4073 + 5.6982} = \boxed{0.2257} \tag{6.195}$$

$$\beta = 0.1 \cdot \frac{2}{1.4073 + 5.6982} = \boxed{0.028147} \tag{6.196}$$

A két paramétert visszahelyettesítve (6.144) képletébe a csillapítási hányados a második rezgésalakban:

$$\xi_2 = \frac{0.2257}{2 \cdot 3.9433} + \frac{0.028147 \cdot 3.9433}{2} = \boxed{0.084117} \tag{6.197}$$

A $\xi(\omega)$ függvény ismeretében (lásd 6.4. ábra) nagyságrendileg ellenőrizhetjük, hogy a két illesztési pont ($\omega_{0,1}$ és $\omega_{0,3}$) közötti tartományba eső $\omega_{0,2}$-nél a csillapítási hányados kisebb lett az illesztett ξ értéknél.

6.3.3.2. Caughey-csillapítás

A Rayleigh-féle csillapításnál kifinomultabb közelítést adhatunk a ξ csillapítási hányad mellett előírt $\underline{\underline{C}}$ mátrixra, ha nem csak az $\underline{\underline{M}}$ és $\underline{\underline{K}}$ mátrixok lineáris kombinációjaként állítjuk elő azt. A kibővített kombinációtól is elvárjuk azonban, hogy a csillapítatlan rendszer sajátvektoraival végzett modálanalízis során a csillapítási mátrix is diagonálmátrixszá váljon.

Tekintsünk ehhez egy olyan mátrix-családot, melynek j-edik tagja:

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}_j = \underline{\underline{M}} \left(\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} \right)^j . \tag{6.198}$$

A mátrix-család első pár eleme[9]:

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}_0 = \underline{\underline{M}}, \qquad \underline{\underline{\mathcal{M}}}_1 = \underline{\underline{K}}, \qquad \underline{\underline{\mathcal{M}}}_2 = \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}, \qquad \underline{\underline{\mathcal{M}}}_3 = \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}. \tag{6.199}$$

Korábban láttuk, hogy a tömegmátrix inverze (6.16):

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{V}}^T \tag{6.200}$$

így a j-edik mátrix:

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}_j = \underline{\underline{M}}\,\underbrace{\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}}_{1}\,\underbrace{\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}}_{2} \cdots \underbrace{\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}}_{j} . \tag{6.201}$$

Egy ilyen mátrixból készített csillapítási mátrixot a modálanalízis során jobbról a $\underline{\underline{V}}$-vel, balról pedig a $\underline{\underline{V}}^T$-vel szorozzuk:

$$\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{\mathcal{M}}}_j \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{M}}\,\underbrace{\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}}_{1}\,\underbrace{\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}}_{2} \cdots \underbrace{\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}}_{j}\,\underline{\underline{V}}, \tag{6.202}$$

így a mátrix-hármasszorzatok egy-egy diagonálmátrixszá válnak (3.179):

$$\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{\mathcal{M}}}_j \underline{\underline{V}} = \underbrace{\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{V}}}_{\underline{\underline{I}}}\,\underbrace{\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}}_{\underline{\underline{\Omega}}^2_1}\,\underbrace{\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}}_{\underline{\underline{\Omega}}^2_2} \cdots \underbrace{\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}}_{\underline{\underline{\Omega}}^2_j}, \tag{6.203}$$

[9]Az „első” itt a természetes számok közül felvett j esetén igaz, a bemutatott tulajdonságok negatív j értékekre is igazolhatóak lennének.

azaz ez a szorzat egyszerűsíthető:

$$\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{\mathcal{M}}}_j \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{\Omega}}^{2j}. \tag{6.204}$$

Ha tehát a csillapítási mátrixot az alábbi alakban állítjuk elő[10]:

$$\underline{\underline{C}} = \sum_{j=0}^{J} a_j \underline{\underline{\mathcal{M}}}_j, \tag{6.205}$$

akkor a modálanalízis során azt kapjuk a modális csillapítási mátrixra, hogy:

$$\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{CV}} = \sum_{j=0}^{J} a_j \underline{\underline{\Omega}}^{2j}. \tag{6.206}$$

A k-adik rezgésalak differenciálegyenletében $\dot{y}_k(t)$ együtthatója a fenti mátrix kk-eleme lesz, azaz:

$$c_k = \sum_{j=0}^{J} a_j \omega_{0k}^{2j}. \tag{6.207}$$

Az ebből számolt csillapítási hányad:

$$\xi_k = \frac{c_k}{2\omega_{0k}} = \sum_{j=0}^{J} \frac{\omega_{0k}^{2j-1}}{2} a_j. \tag{6.208}$$

A képlet egyben azt is jelenti, hogy $J+1$ körfrekvenciában tudjuk illeszteni a csillapítási hányadot előre eldöntött értékhez. Jelöljük az illesztésre kijelölt körfrekvenciákat ω_1, ω_2, $\dots$ ω_{J+1}-gyel. Így egy olyan egyenletrendszert kapunk, ami mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2\omega_1} & \frac{\omega_1}{2} & \frac{\omega_1^3}{2} & \dots & \frac{\omega_1^{2J-1}}{2} \\ \frac{1}{2\omega_2} & \frac{\omega_2}{2} & \frac{\omega_2^3}{2} & \dots & \frac{\omega_2^{2J-1}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2\omega_J} & \frac{\omega_J}{2} & \frac{\omega_J^3}{2} & \dots & \frac{\omega_J^{2J-1}}{2} \\ \frac{1}{2\omega_{J+1}} & \frac{\omega_{J+1}}{2} & \frac{\omega_{J+1}^3}{2} & \dots & \frac{\omega_{J+1}^{2J-1}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{J-1} \\ a_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \\ \vdots \\ \xi \\ \xi \end{bmatrix} \tag{6.209}$$

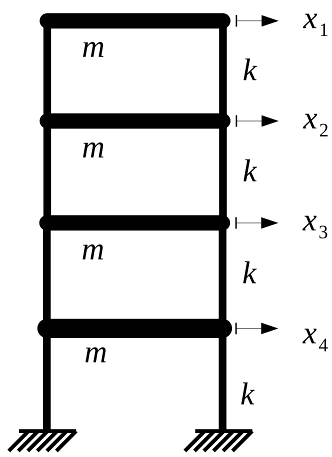
Aminek a megoldása adja a keresett a_j együtthatókat:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{J-1} \\ a_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\omega_1} & \frac{\omega_1}{2} & \frac{\omega_1^3}{2} & \dots & \frac{\omega_1^{2J-1}}{2} \\ \frac{1}{2\omega_2} & \frac{\omega_2}{2} & \frac{\omega_2^3}{2} & \dots & \frac{\omega_2^{2J-1}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2\omega_J} & \frac{\omega_J}{2} & \frac{\omega_J^3}{2} & \dots & \frac{\omega_J^{2J-1}}{2} \\ \frac{1}{2\omega_{J+1}} & \frac{\omega_{J+1}}{2} & \frac{\omega_{J+1}^3}{2} & \dots & \frac{\omega_{J+1}^{2J-1}}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \\ \vdots \\ \xi \\ \xi \end{bmatrix} \tag{6.210}$$

6.3.3. Példa (Caughey-féle csillapítás)**.** *Határozzuk meg a 6.8. ábrán látható szerkezeten a_0, a_1 és a_2 értékét, ha az első, második és a harmadik sajátkörfrekvenciához illesztjük a $\xi = 0.2$ csillapítási hányadot. Mekkora ebben az esetben a negyedik rezgésalak modális csillapítási hányadosa? Adott: $k = 100kN/m$, $m = 10t$.*

---

[10]Megismételjük: j értéke lehetne negatív is, az a következtetéseket nem befolyásolná.



6.8. ábra. Modell a Caughey-féle csillapítás számításához.

Megoldás
A tömegmátrix egy 4×4-es diagonálmátrix:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}. \tag{6.211}$$

A merevségi mátrixot pedig a szintenkénti merevségekből lehet kompilálni:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 200 \end{bmatrix}. \tag{6.212}$$

A rendszermátrixok ismeretében kell megoldanunk az általánosított sajátértékfeladatot. Először a $|\underline{\underline{K}} - \omega_0^2 \underline{\underline{M}}| = 0$ egyenlet megoldásaként kapjuk a sajátkörfrekvenciákat, majd egyenként visszahelyettesítve azokat a

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega_{0,j}^2 \underline{\underline{M}}\right) \underline{v}_j = \underline{0}$$

egyenletbe kapjuk meg a sajátvektorokat, amiket a tömegmátrixra normálunk. Ezek eredményeként:

$$\underline{\underline{\Omega}} = \left\langle 1.0982 \quad 3.1623 \quad 4.8449 \quad 5.9431 \right\rangle. \tag{6.213}$$

$$\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} 0.20762 & -0.18257 & -0.13551 & -0.07210 \\ 0.18257 & 0 & 0.18257 & 0.18257 \\ 0.13551 & 0.18257 & 0.07210 & -0.20762 \\ 0.07210 & 0.18257 & -0.20762 & 0.13551 \end{bmatrix} \tag{6.214}$$

A (6.209) egyenletből látható, hogy a rezgésalakokra ebben a feladatban nincs is szükség, csak a sajátkörfrekvenciákra. Az első három sajátkörfrekvenciát behelyettesítve (6.209) mátrixába az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 0.4553 & 0.5491 & 0.6623 \\ 0.1581 & 1.5811 & 15.8114 \\ 0.1032 & 2.4224 & 56.8620 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}. \tag{6.215}$$

Ennek megoldásaként a keresett három paraméter:

$$\boxed{a_0 = 0.30226, \qquad a_1 = 0.11599, \qquad a_2 = -0.0019729} \tag{6.216}$$

Végül a kapott értékeket és $\omega_{0,4}$ értékét behelyettesítjük (6.208) képletébe:

$$\xi_4 = \frac{0.30226}{2 \cdot 5.9431} + \frac{0.11599 \cdot 5.9431}{2} + \frac{-0.0019729 \cdot 5.9431^3}{2} = \boxed{0.1630} \tag{6.217}$$

Mint látjuk, a kapott csillapítási hányados kisebb az illesztett $\xi = 0.2$ értéknél. A módszer szempontjából még ennél is veszélyesebb, hogy a körfrekvencia további növekedésével ez a hányados tovább csökken: (6.208) képletében a legmagasabb kitevőjű tag lesz a domináns, így a_2 negatív előjele miatt akár negatív modális csillapítási hányad is kijöhet. Ez mindenképpen kerülendő, vagy az illesztés módosításával, vagy azon körfrekvencia-tartomány elkerülésével.

6.4. Szóródó csillapítás, a talaj dinamikus megtámasztó hatása

Az építőmérnöki szerkezettervezés során előfordulnak olyan végtelen kiterjedésű kapcsolódó elemek, melyek egy speciális csillapítási típusnak, a *szóródó csillapítás*nak a megjelenését eredményezik. Ilyen például egy szerkezetet alátámasztó, végtelennek tekinthető talajtest, vagy egyik irányban megtámasztott, másik irányban végtelen hosszúságú lemez.

Szaktárgyakban megismerhetők ilyen szerkezetek esetén különböző helyettesítő merevségek számítására szolgáló képletek, ebben a könyvben azt mutatjuk be, hogy ezeknek a képleteknek a megjelenése, jellege milyen mechanikai háttérrel igazolható. A bemutatást egy egyszerű terhelési eseten végezzük, aminek a helyettesítő modelljét a végtelen testtel való összehasonlítás alapján statikus elven hozzuk létre, majd a kapott egyszerűsített modellen hajtjuk végre a dinamikai vizsgálatot.

6.4.1. A rugalmas féltér és az ekvivalens rúdmodell

A talaj eredendően nemlineáris viselkedését nagyban leegyszerűsítve tekintsük a homogén izotrop, lineárisan rugalmas anyagú rugalmas félteret, melynek felső síkján egy merev, kör keresztmetszetű felületen adunk át egy központos függőleges erőt. *Boussinesq* nyomán ismert, hogy a rugalmas féltér helyettesítő statikus rugómerevsége erre a teherre

$$k_{st}^B = \frac{4GR}{1-\nu}, \tag{6.218}$$

ahol R a felszínen nyomott körfelület sugara, G a talaj nyírási modulusza, ν a Poisson-tényezője.

A helyettesítő statikus rugómerevség fizikai jelentése nyilvánvaló: a felszíni keresztmetszet egységnyi eltolódása esetén az egyensúlyt egy ekkora erővel lehetne fenntartani, ami természetesen a felület mentén oszlik meg.

Dinamikus helyettesítő merevséghez az eddig tanultak alapján egy egységnyi amplitúdójú harmonikus mozgást kellene létrehoznunk a felszíni körfelületen és az állandósult rezgés során a rezgést létrehozó erő amplitúdója lenne a dinamikus merevség. A rugalmas féltér állandósult rezgésalakjának meghatározása viszont szinte lehetetlen: még a körszimmetria kihasználása esetén is egy tengelytől való távolság, egy mélység és egy idő szerepelne független változóként a kétirányú elmozdulásokban, melyekből az alakváltozásokat, feszültségeket kellene kifejezni a mozgás differenciálegyenletrendszerének felírásához (idáig csak ijesztő, de megoldható a feladat), hogy aztán azt harmonikus peremfeltételek mellett megoldjuk.

Ehelyett vezessünk be egy egyszerűsített modellt, amit *helyettesítő rúdmodell*nek nevezzük, és az alábbi elvárásokat fogalmazzuk meg vele szemben:

a) legyen egy függőleges tengelyű, körszimmetrikus rúd,

b) a helyettesítő statikus merevsége legyen azonos a talaj (6.218) szerinti merevségével,

c) a rúd hossza legyen végtelen,

d) a rúd keresztmetszetei merev síklapokként csak függőlegesen mozduljanak el,

e) a rúd keresztmetszetei mozgás közben ne változtassák meg a méretüket.

Az a) feltétel egyértelmű, hiszen a végtelen rugalmas féltér és abban a függőleges mozgás is körszimmetrikus. A körszimmetria miatt a d) feltételnek is teljesülnie kell. A b) és c) feltétel együtt azt eredményezi, hogy a rúd keresztmetszetének a hossz mentán lefelé haladva növekednie kell és a végtelen mélységben a végtelenhez kell tartania: felülről korlátos keresztnetszet esetén bármilyen véges rúderő végtelen alakváltozást okozna[11]. A végtelenbe tartóan növekvő keresztmetszeti terület viszont nullához tartóan csökkenti a normálfeszültség értékét, így a végtelen féltér végtelen mélységében számolható jelenséget kapjuk vissza. Végül az e) feltétellel modellezzük a környező földtömeg megtámasztó hatását: azt feltételezzük, hogy a rúdmodellben csak függőleges alakváltozások léphetnek fel, így az E rugalmassági modulusz helyett az

$$E_c = E\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{6.219}$$

gátolt rugalmassági modulusz fejezi ki a függőleges normálfeszültség és fajlagos nyúlás közötti kapcsolatot. Ezzel az anyagjellemzővel a végtelen rugalmas féltér (6.218) szerinti helyettesítő merevsége:

$$k_{st}^B = 2E_cR\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}. \tag{6.220}$$

A rúd sűrűségét azonosnak tekintjük a talaj ϱ sűrűségével.

A feltételeknek megfelelően egy olyan rudat választunk (lásd a 6.9. ábrát), aminek a sugara egy exponenciális függvény szerint változik az y-irányú mélység mentén:

$$r(y) = Re^{\frac{y}{f}}, \tag{6.221}$$

ahol f egy egyelőre ismeretlen karakterisztikus mélység. Ahogy a képletből látszik, az $y = f$ mélységben lesz a sugár a felszíni sugár e-szerese. A sugárból természetesen a keresztmetszeti terület is kifejezhető:

$$A(y) = r^2(y)\pi = R^2e^{\frac{2y}{f}}\pi = A_0e^{\frac{2y}{f}}, \tag{6.222}$$

ahol A_0 a felszíni keresztmetszeti terület. Mint látszik, a terület is exponenciálisan növekszik a mélység függvényében.

A keresztmetszetek elmozdulását a $v(y,t)$ függvény adja meg, melyből az alakváltozás:

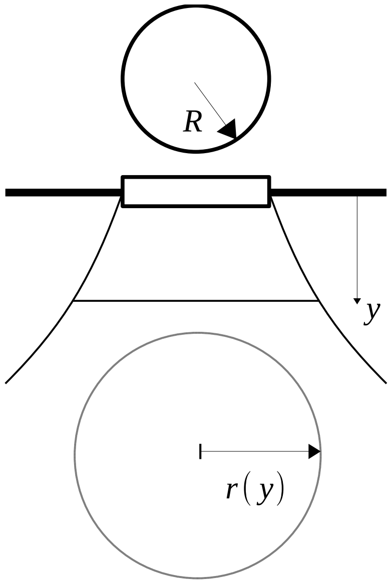
$$\varepsilon_y(y,t) = \frac{\partial v(y,t)}{\partial y}. \tag{6.223}$$

Ebben az alfejezetben a ($'$) jellel az y szerinti (parciális) deriválást fogjuk jelölni, így a fenti kapcsolat $\varepsilon_y(x,t) = v'(y,t)$ alakban is írható.

A gátolt alakváltozásnak megfelelően a normálfeszültséget a gátolt rugalmassági modulusszal számoljuk:

$$\sigma(y,t) = E_c\varepsilon_y(y,t). \tag{6.224}$$

[11] Emlékeztetünk a prizmatikus rúd $\Delta\ell = \frac{S\ell}{EA}$ megnyúlására, ami végtelen ℓ esetén végtelen lenne.



6.9. ábra. Az ekvivalens rúdmodell: a felszínen nyomott felület átmérője $D = 2R$, az ekvivalens rúd sugara az $e^{\frac{y}{f}}$ függvény szerint változik.

Végül, a merev keresztmetszetek miatt a normálfeszültség eloszlása a felület mentén egyenletes, így a normálerő:

$$N(y,t) = \sigma(y,t)A(y). \tag{6.225}$$

6.4.1.1. Mozgás differenciálegyenlete

A vizsgálathoz szükségünk lesz az ekvivalens rúdmodell mozgásának differenciálegyenletére, ezért a 6.10. ábrán feltüntettük az y és $y+dy$ mélységek közötti elemi rúdszakasz elkülönítését. A felső keresztmetszetben a $\sigma(y,t)$ feszültség működik $A(y)$ felületen, az alsó keresztmetszetben a $\sigma(y+dy,t)$ feszültség működik $A(y+dy)$ felületen. ezek az erők hozzák létre a $\ddot{v}(y,t)$ gyorsulást. Newton második törvényének felírásakor kihasználjuk, hogy a dy távolság elemien kicsiny, így az elemi szakasz tömegének számításakor elhanyagolhatjuk a keresztmetszeti terület növekedését:

$$dm = \varrho A(y)dy, \tag{6.226}$$

az alsó keresztmetszetre ható feszültségek eredőjének számításakor a feszültséget és a területet a Taylor sor első két elemével közelítjük:

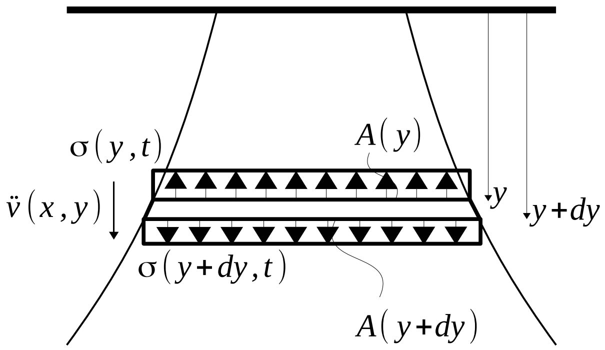
$$\sigma(y+dy,t) \approx \sigma(y,t) + \sigma'(y,t)dy, \quad A(y+dy) \approx A(y) + A'(y)dy. \tag{6.227}$$

Így Newton második törvénye az elkülönített szakaszra:

$$\begin{aligned}\varrho A(y)dy\ddot{v}(y,t) = {}& -\sigma(y,t)A(y)+ \\ & + \left[\sigma(y,t) + \sigma'(y,t)dy\right]\left[A(y,t) + A'(y,t)dy\right].\end{aligned} \tag{6.228}$$

A szögletes zárójelek szorzatának felbontása után egyszerűsíthetünk a negatív és pozitív előjellel egyaránt egyszer előforduló $\sigma(y,t)A(y)$ taggal:

$$\varrho A(y)dy\ddot{v}(y,t) = \sigma'(y,t)A(y)dy + \sigma(y,t)A'(y)dy + \sigma'(y,t)dyA'(y)dy. \tag{6.229}$$



6.10. ábra. Az ekvivalens rúdmodell elemi darabja és a rá ható erők.

Az utolsó tag a jobb oldalon másodrendűen kicsiny, így a dy-nal történő egyszerűsítés után az a tag eltűnik:

$$\varrho A(y)\ddot{v}(y,t) = \sigma'(y,t)A(y) + \sigma(y,t)A'(y). \tag{6.230}$$

A keresztmetszeti terület függvényének deriváltja (6.222) felhasználásával:

$$A'(y) = \frac{2}{f}A_0 e^{\frac{2y}{f}}, \tag{6.231}$$

A feszültség deriváltja pedig (6.224) alapján:

$$\sigma'(y,t) = E_c\varepsilon'_y(x,t). \tag{6.232}$$

Ezeket behelyettesítve (6.230) deriváltjai helyére, és az alakváltozást (6.223) segítségével kifejezve:

$$\varrho A_0 e^{\frac{2y}{f}}\ddot{v}(y,t) = E_c v''(y,t)A_0 e^{\frac{2y}{f}} + E_c v'(y,t)A_0 e^{\frac{2y}{f}}\frac{2}{f}. \tag{6.233}$$

Ezt egyszerűsítsük $A_0 e^{\frac{2y}{f}}$-fel, majd a tagok egy oldalra rendezése után kapjuk az ekvivalens rúdmodell mozgásának parciális differenciálegyenletét:

$$E_c v''(y,t) + \frac{2}{f}E_c v'(y,t) - \varrho\ddot{v}(y,t) = 0. \tag{6.234}$$

Vezessük be a

$$c_n = \sqrt{\frac{E_c}{\varrho}} \tag{6.235}$$

hullámsebességet, melyet felhasználva (6.234) egyenletét osszuk le E_c-vel, így végül megkapjuk az ekvivalens rúdmodell mozgásának differenciálegyenletét:

$$\boxed{v''(y,t) + \frac{2}{f}v'(y,t) - \frac{1}{c_n^2}\ddot{v}(y,t) = 0} \tag{6.236}$$

6.4.1.2. Egyensúlyi differenciálegyenlet, statikus merevség

Az ekvivalens rúdmodell f karakterisztikus mélységének illesztését úgy végezzük, hogy a modell statikus merevsége azonos legyen a végtelen rugalmas féltér (6.220) szerinti merevségével.

A helyettesítő merevség fizikai jelentése alapján azt a függőleges erőt kell meghatároznunk, amit a felszíni keresztmetszeten működtetnünk kell ahhoz, hogy annak elmozdulása egységnyi legyen. Ezt a deformált alakot statikus állapotban vizsgáljuk, ezért (6.236) egyenletéből az időfüggést és az idő szerinti deriváltakat elhagyva kapjuk az ekvivalens rúdmodell egyensúlyi differenciálegyenletét:

$$v''(y) + \frac{2}{f}v'(y) = 0, \tag{6.237}$$

melynek olyan megoldását keressük, ami a felszínen egységnyi, a végtelen mélységben pedig zérus eltolódással rendelkezik, azaz kielégíti az alábbi peremfeltételeket:

$$v(0) = 1, \qquad v(\infty) = 0. \tag{6.238}$$

Keressük (6.237) megoldását

$$v(y) = ae^{\lambda y} \tag{6.239}$$

alakban, melynek első és második deriváltjait behelyettesítve (6.237) egyenletébe azt kapjuk, hogy

$$\lambda^2 ae^{\lambda y} + \frac{2}{f}\lambda ae^{\lambda y} = 0, \tag{6.240}$$

melynek két megoldása a $\lambda^2 + \frac{2}{f}\lambda = 0$ egyenletből:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -\frac{2}{f}, \tag{6.241}$$

azaz a megoldás általános alakja:

$$v(y) = a_1 + a_2 e^{-\frac{2}{f}y}. \tag{6.242}$$

A (6.238) peremfeltételek közül a második miatt $a_1 = 0$, majd ezt felhasználva az elsőből $a_2 = 1$, vagyis a keresett statikus rúdalak:

$$v(y) = e^{-\frac{2}{f}y}. \tag{6.243}$$

Ebből az alakváltozás függvénye:

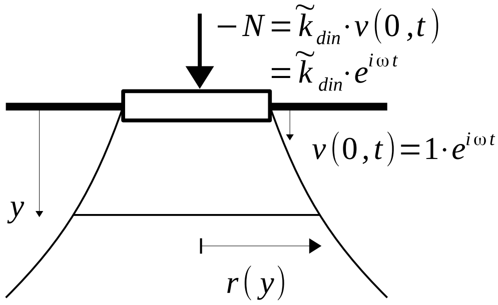
$$\varepsilon_y(y) = -\frac{2}{f}e^{-\frac{2}{f}y}, \tag{6.244}$$

a legfelső szinten pedig:

$$\varepsilon_y(0) = -\frac{2}{f}. \tag{6.245}$$

A normálfeszültség és a normálerő rendre:

$$\sigma_y(0) = -E_c\frac{2}{f}, \qquad N(0) = -\frac{2E_cA_0}{f}. \tag{6.246}$$



6.11. ábra. Az ekvivalens rúdmodell dinamikus merevségének fizikai jelentése.

A rugómerevségnek megfelelő erő nyomja a legfelső keresztmetszetet, így a merevség a normálerő ellentettje, azaz:

$$k_{st}^{ekv} = \frac{2E_c A_0}{f}. \tag{6.247}$$

Ennek kell egyenlőnek lennie a (6.220) szerinti merevséggel:

$$2E_c R \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2} = \frac{2E_c A_0}{f}, \tag{6.248}$$

amibe behelyettesítjük $A_0 = R^2\pi$-t és megoldjuk f-re:

$$\boxed{f = R\pi \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}} \tag{6.249}$$

6.4.2. Az ekvivalens rúdmodell dinamikus merevsége

6.4.2.1. Dinamikus merevség

Az ekvivalens rúdmodell dinamikus merevségét a (6.249) karakterisztikus merevséggel a statikus merevséghez illesztett modellen keressük annak fizikai jelentése alapján. Hozzunk létre egy egységnyi amplitúdójú, komplex harmonikus mozgást a rúd felszíni keresztmetszetében, és határozzuk meg a mozgást létrehozó erő amplitúdóját (lásd a 6.11. ábrát).

Azaz keressük a (6.236) parciális differenciálegyenlet megoldását, ha a peremfeltételek:

$$\tilde{v}(0,t) = 1e^{i\omega t}, \qquad \tilde{v}(\infty,t) = 0. \tag{6.250}$$

Keressük a megoldást a változók szétválasztásával

$$v(y,t) = \tilde{v}(y)e^{i\omega t} \tag{6.251}$$

alakban, ahol $\tilde{v}(y)$ a komplex alakfüggvény. A feltételezett alak szükséges deriváltjai:

$$v'(y,t) = \tilde{v}'(y)e^{i\omega t}, \quad v''(y,t) = \tilde{v}''(y)e^{i\omega t}, \quad \ddot{v}(y,t) = -\omega^2\tilde{v}(y)e^{i\omega t}, \tag{6.252}$$

Amiket behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\tilde{v}''(y)e^{i\omega t} + \frac{2}{f}\tilde{v}'(y)e^{i\omega t} + \frac{\omega^2}{c_n^2}\tilde{v}(y)e^{i\omega t} = 0. \tag{6.253}$$

Az $e^{i\omega t}$ tagot kiemelve és azzal egyszerűsítve kapjuk a komplex rezgésalak közönséges differenciálegyenletét:

$$\tilde{v}''(y) + \frac{2}{f}\tilde{v}'(y) + \frac{\omega^2}{c_n^2}\tilde{v}(y) = 0. \tag{6.254}$$

A (6.251) szerinti feltételezett alakot behelyettesítve a (6.250) peremfeltételekbe, ugyancsak $e^{i\omega t}$-vel való egyszerűsítés után kapjuk az alakfüggvény peremfeltételeit:

$$\tilde{v}(1) = 1, \qquad \tilde{v}(\infty) = 0. \tag{6.255}$$

6.4.2.2. Rezgésalak megoldása

Keressük az alakfüggvényt

$$\tilde{v}(y) = \tilde{b}e^{\lambda y} \tag{6.256}$$

alakban, melynek szükséges deriváltjai:

$$\tilde{v}'(y) = \tilde{b}\lambda e^{\lambda y}, \qquad \tilde{v}''(y) = \tilde{b}\lambda^2 e^{\lambda y}. \tag{6.257}$$

Ezeket behelyettesítve a rezgésalak differenciálegyenletébe az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\tilde{b}e^{\lambda y}\left\{\lambda^2 + \frac{2}{f}\lambda + \frac{\omega^2}{c_n^2}\right\} = 0. \tag{6.258}$$

Az egyenlőség úgy teljesülhet, ha a kapcsos zárójelben levő kifejezés értéke 0, mely másodfokú egyenletből λ lehetséges értékei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{2}{f} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{f}\right)^2 - 4\left(\frac{\omega^2}{c_n^2}\right)}}{2}, \tag{6.259}$$

azaz

$$\lambda_1 = -\frac{1}{f} + \sqrt{\frac{1}{f^2} - \frac{\omega^2}{c_n^2}}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{f} - \sqrt{\frac{1}{f^2} - \frac{\omega^2}{c_n^2}}, \tag{6.260}$$

a megoldás általános alakja pedig

$$\tilde{v}(y) = \tilde{B}_1 e^{\lambda_1 y} + \tilde{B}_2 e^{\lambda_2 y}. \tag{6.261}$$

A λ_1 és λ_2 értékekre f, c_n és ω viszonyától függően kaphatunk két valós gyököt, vagy egy komplex konjugált gyökpárt. A két eset közötti különbséget a gyükjel alatti kifejezés előjele adja. Mivel egy adott modellben az f és c_n értékek rögzítettek, így azt mondhatjuk, hogy a gerjesztés körfrekvenciájától függ, hogy melyik eset áll fenn.

- Ha a gyökjel alatti szám negatív, akkor *nagy frekvenciájú gerjesztés*ről beszélünk. Ilyenkor

$$\frac{1}{f} < \frac{\omega}{c_n}, \qquad \frac{c_n}{\omega} < f, \qquad c_n < f\omega, \qquad \frac{c_n}{f} < \omega. \tag{6.262}$$

- Ha a gyökjel alatti szám pozitív, akkor *alacsony frekvenciájú gerjesztés*ről beszélünk. Ilyenkor

$$\frac{1}{f} > \frac{\omega}{c_n}, \qquad \frac{c_n}{\omega} > f, \qquad c_n > f\omega, \qquad \frac{c_n}{f} > \omega. \tag{6.263}$$

A folytatásban ezt a két esetet külön vizsgáljuk.

6.4.2.3. Nagy frekvenciájú gerjesztés

A nagy frekvenciájú gerjesztés esetében a két λ gyök komplex. Vezessük be a c_{sd} sebességet az alábbi módon

$$\frac{1}{c_{sd}} = \sqrt{\frac{1}{c_n^2} - \frac{1}{f^2\omega^2}}. \tag{6.264}$$

A c_{sd} értéke valós szám, a mértékegysége pedig valóban egy sebességé. Ezt felhasználva a két gyök egyszerűbben írható:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{f} + i\frac{\omega}{c_{sd}}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{f} - i\frac{\omega}{c_{sd}}, \tag{6.265}$$

amit felhasználhatunk a rezgésalakban:

$$\tilde{v}(y) = B_1 e^{-\frac{y}{f} + i\frac{\omega y}{c_{sd}}} + B_2 e^{-\frac{y}{f} - i\frac{\omega y}{c_{sd}}}. \tag{6.266}$$

A teljes rezgés függvényéhez ezt $e^{i\omega t}$-vel kell szoroznunk, így:

$$\begin{aligned} v(y,t) = B_1 e^{-\frac{y}{f} + i\frac{\omega y}{c_{sd}}} e^{i\omega t} + B_2 e^{-\frac{y}{f} - i\frac{\omega y}{c_{sd}}} e^{i\omega t} = \\ = B_1 e^{-\frac{y}{f}} e^{+i\frac{\omega y}{c_{sd}}} e^{i\omega t} + B_2 e^{-\frac{y}{f}} e^{-i\frac{\omega y}{c_{sd}}} e^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{6.267}$$

Bővítsük az utolsó exponenciális tagok kitevőit $\frac{c_{sd}}{c_{sd}}$-vel:

$$v(y,t) = B_1 e^{-\frac{y}{f}} e^{+i\frac{\omega y}{c_{sd}}} e^{i\frac{\omega c_{sd} t}{c_{sd}}} + B_2 e^{-\frac{y}{f}} e^{-i\frac{\omega y}{c_{sd}}} e^{i\frac{\omega c_{sd} t}{c_{sd}}}, \tag{6.268}$$

így elvégezhető az alábbi összevonás:

$$v(y,t) = B_1 e^{-\frac{y}{f}} e^{+i\frac{\omega}{c_{sd}}(y + c_{sd} t)} + B_2 e^{-\frac{y}{f}} e^{-i\frac{\omega}{c_{sd}}(y - c_{sd} t)}. \tag{6.269}$$

Az Euler-féle átírást[12] alkalmazva így azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} v(y,t) = B_1 e^{-\frac{y}{f}} \left[\cos\left(\frac{\omega}{c_{sd}}(y + c_{sd} t)\right) + i \sin\left(\frac{\omega}{c_{sd}}(y + c_{sd} t)\right)\right] + \\ + B_2 e^{-\frac{y}{f}} \left[\cos\left(\frac{\omega}{c_{sd}}(y - c_{sd} t)\right) - i \sin\left(\frac{\omega}{c_{sd}}(y - c_{sd} t)\right)\right]. \end{aligned} \tag{6.270}$$

A szögletes zárójelben levő függvényekről azt állapíthatjuk meg, hogy azok egy-egy haladó hullám függvényét adják meg. A B_1 együtthatójú függvény $y + c_{sd}t$ argumentuma egy negatív y irányba, azaz felfelé haladó hullámot ír le,

[12] $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$

míg a B_2 együtthatójú függvény $y - c_{sd}t$ argumentuma egy pozitív y irányba, azaz lefelé haladó hullámot ír le.

A 4.1.3. szakaszban láttuk, hogy az egyik irányba haladó hullámok két forrásból származhatnak: a vizsgált tartományon a kezdeti feltételek miatti alakból, és a másik irányba haladó hullámok visszaverődéséből azon a peremen, ahol azok kilépnek az értelmezési tartományból. Az állandósult rezgés során a kezdeti alak nem befolyásolja a rezgést, a lefelé haladó hullámok pedig a végtelen mélységben levő peremről nem verődnek vissza: ott már nulla lenne az amplitúdójuk és végtelen idő múlva érne fel a felszínig ez a nulla amplitúdójú alak. Emiatt a felfelé haladó hullám amplitúdója, azaz a $\tilde{B}_1$ együttható értéke nulla lesz, a 6.266 szerinti rezgésalak pedig az alábbiak szerint egyszerűsödik:

$$\tilde{v}(y) = B_2 e^{\left\{-\frac{1}{f} - i\frac{\omega}{c_{sd}}\right\}y}. \tag{6.271}$$

A felszíni keresztmetszetre vonatkozó peremfeltételbe (tehát (6.255) első egyenletébe) behelyettesítve:

$$\tilde{v}(0) = B_2 e^{\left\{-\frac{1}{f} - i\frac{\omega}{c_{sd}}\right\}0} = B_2 e^0 = 1, \tag{6.272}$$

amiből $B_2 = 1$ adódik, a peremfeltételeket kielégítő alakfüggvény tehát:

$$\tilde{v}(y) = e^{\left\{-\frac{1}{f} - i\frac{\omega}{c_{sd}}\right\}y}. \tag{6.273}$$

Az alakváltozás alakfüggvénye ennek y szerinti deriváltja:

$$\tilde{\varepsilon}_y(y) = \tilde{v}'(y) = \left\{-\frac{1}{f} - i\frac{\omega}{c_{sd}}\right\} e^{\left\{-\frac{1}{f} - i\frac{\omega}{c_{sd}}\right\}y}, \tag{6.274}$$

amiből a legfelső keresztmetszet alakváltozásának amplitúdója[13]:

$$\tilde{\varepsilon}_y(0) = \left\{-\frac{1}{f} - i\frac{\omega}{c_{sd}}\right\}. \tag{6.275}$$

Ugyanebben a keresztmetszetben a normálfeszültség és a normálerő amplitúdója rendre:

$$\tilde{\sigma}_y(0) = E_c \left\{-\frac{1}{f} - i\frac{\omega}{c_{sd}}\right\}., \qquad \tilde{N}(0) = E_c A_0 \left\{-\frac{1}{f} - i\frac{\omega}{c_{sd}}\right\}. \tag{6.276}$$

Emlékeztetünk, hogy a dinamikus rugómerevség a normálerő ellentettje, így:

$$\boxed{\tilde{k}_{din} = \frac{E_c A_0}{f} + i\omega\frac{E_c A_0}{c_{sd}}} \tag{6.277}$$

Szóródó csillapítás

Ahogy (6.277) képletében látjuk, nagy frekvenciájú gerjesztés esetén a dinamikus rugómerevség komplex alakú lesz. Korábban láttuk, hogy ilyenkor a rugalmasság és a tömeg miatti együttes hatás a valós $k - \omega^2 m$ dinamikus merevségben jelenik meg, míg a csillapítás a képzetes $i\omega c$ tagban. A kapott eredményből azt

[13]Emlékeztetünk, hogy ez az alak még szorzódik az $e^{i\omega t}$-vel, de mivel a dinamikai merevséghez is csak az amplitúdóra van szükségünk, az időfüggést már nem visszük tovább.

állapíthatjuk meg, hogy nagy frekvenciájú gerjesztés esetén az ekvivalens rúdmodell alapján a talaj dinamikus megtámasztó hatását egy

$$\boxed{k_{din} = \frac{E_c A_0}{f}} \tag{6.278}$$

merevségű rugóval (ami a statikus rugómerevség (6.247) szerinti értékének a fele) és egy

$$\boxed{c_{ekv} = \frac{E_c A_0}{c_{sd}}} \tag{6.279}$$

együtthatójú viszkózus csillapító elemmel modellezhetjük.

A komplex dinamikus merevségben megjelenő csillapítás annak ellenére jött létre, hogy a talaj anyagának belső csillapítását elhanyagoltuk. A csillapítás forrása az, hogy a végtelen féltérbe behatoló hullámok nem verődnek vissza, így az általuk hordozott energia szétszóródik a talajban. Emiatt ezt a csillapítást (és általában a végtelenbe terjedő hullámok miatti energia-disszipációt) *szóródó csillapítás*nak nevezzük. A (6.264) képletet behelyettesítve a csillapítási tényező (6.279) szerinti képletébe azt láthatjuk, hogy a gerjesztés körfrekvenciájának növelésével a csillapítás mértéke is növekszik. Határértéke a végtelenbe tartó körfrekvencia esetén:

$$c_{ekv}^{\infty} = \frac{E_c A_0}{c_n} \tag{6.280}$$

Megjegyezzük azt is, hogy nagy frekvenciájú gerjesztés esetén a valós dinamikus rugómerevség (6.278) szerinti értéke éppen a fele a statikus merevség (6.247) szerinti értékének.

6.4.2.4. Alacsony frekvenciájú gerjesztés

Alacsony frekvenciájú gerjesztés esetében a (6.260) szerinti mindkét λ gyök valós. Természetesen le lehet vezetni a dinamikus merevséget e két gyök és a belőlük származtatott rezgésalakból közvetlenül is, de felhasználhatjuk a korábbi eredményt is, ami (6.277) képletére vezetett.

Az alacsony frekvenciájú gerjesztés esetén a (6.264) képlettel bevezetett c_{sd} sebesség képzetes lesz, amit valóssá tehetünk, ha beszorozzuk i-vel:

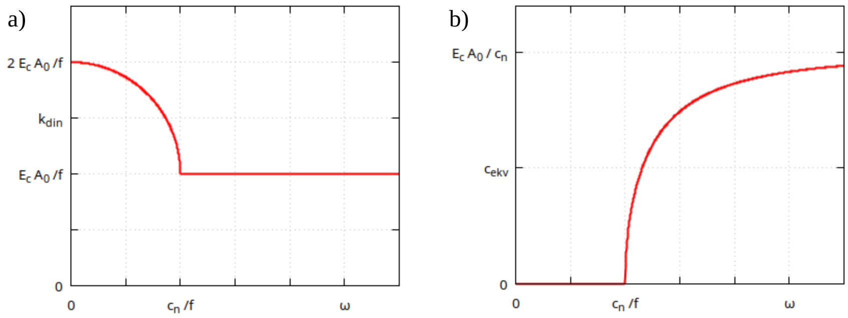
$$i\frac{1}{c_{sd}} = \sqrt{-1}\sqrt{\frac{1}{c_n^2} - \frac{1}{f^2\omega^2}} = \sqrt{(-1)\left(\frac{1}{c_n^2} - \frac{1}{f^2\omega^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{f^2\omega^2} - \frac{1}{c_n^2}}. \tag{6.281}$$

Ezt az eredményt helyettesítsük be (6.277) képletébe:

$$k_{din} = \frac{E_c A_0}{f} + \omega E_c A_0 \sqrt{\frac{1}{f^2\omega^2} - \frac{1}{c_n^2}}, \tag{6.282}$$

amit egyszerűbb alakra hozhatunk:

$$\boxed{k_{din} = E_c A_0 \left(\frac{1}{f} + \sqrt{\frac{1}{f^2} - \frac{\omega^2}{c_n^2}}\right)} \tag{6.283}$$



6.12. ábra. Az ekvivalens rúdmodell komplex dinamikus merevségének összetevői: a) valós dinamikus merevség (6.283) és (6.278), b) a csillapítási tényező (6.279).

Ebben az esetben tehát nincsen szóródó csillapítás, a helyettesítő rugómerevség pedig a statikus merevség értéke és annak fele közé esik a gerjesztés frekvenciájától függően.

Összegzés

Az alacsony és a nagy frekvenciájú gerjesztésekre levezetett komplex dinamikus merevségből származó dinamikus merevséget és csillapítási hányadot a 6.12.a)-b) ábrákon mutatjuk be jellegzetes értékeikkel. A talajra helyezett szerkezet vizsgálata ezután egy rugalmasan megtámasztott szerkezet vizsgálataként folytatódhat.

6.4.3. Egyebek

6.4.3.1. Összenyomhatatlan anyagok csillapítása

Összenyomhatatlan, vagy közel összenyomhatatlan anyagok (például sportpályák rekortánborítása, vagy műfüvek gumitörmelékes feltöltése) esetén a szóródó csillapítás megjelenése eredményez a használat szempontjából kedvező hatásokat. Ennek megértéséhez nézzük végig az összenyomhatatlanságot jelentő $\nu = 0.5$-ös Poisson-tényező hatását a számításra, hiszen a közel összenyomhatatlan anyagok $\nu = 0.49\ldots$ jellegű Poisson-tényezője esetén is hasonló jelenségre számíthatunk.

A szóródó csillapítás szempontjából a $\frac{c_n}{f}$ hányados a lényeges, hiszen az ennél nagyobb frekvenciák esetén tapasztalható annak hatása. Írjuk fel e hányadost (6.235) és (6.249) alapján:

$$\frac{c_n}{f} = \sqrt{\frac{E_c}{\varrho}} \cdot \frac{R\pi\,(1-2\nu)}{(1-\nu)^2}, \tag{6.284}$$

és helyettesítsük be a gátolt modulusz (6.219) szerinti képletét:

$$\frac{c_n}{f} = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \cdot \frac{R\pi\,(1-2\nu)}{(1-\nu)^2}. \tag{6.285}$$

Kis átalakítással és egyszerűsítéssel azt kapjuk, hogy:

$$\frac{c_n}{f} = R\pi\sqrt{\frac{E}{\varrho}}\sqrt{\frac{(1-\nu)\,(1-2\nu)^2}{(1+\nu)(1-2\nu)(1-\nu)^4}} = R\pi\sqrt{\frac{E}{\varrho}}\sqrt{\frac{(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-\nu)^3}}. \quad (6.286)$$

A képlet számlálójából kiolvasható, hogy az összenyomhatatlan anyagnak megfelelő $\nu = 0.5$ esetén a hányados nulla lesz (majdnem összenyomhatatlan anyag esetén pedig nullához tart), vagyis (6.262) képletének megfelelően minden dinamikus gerjesztés nagy frekvenciájú gerjesztésnek fog számítani, ahol valamekkora szóródó csillapítás is megjelenik.

6.4.3.2. Szóródó csillapítás modellezése véges rendszerben

Mint láttuk, a végtelen féltérben távolodó haladó hullámok energia disszipációt eredményeznek a szerkezetben. Végeselemes modellezés esetén viszont általában az elemeink és a modellünk is véges kiterjedésű, amit a peremein megtámasztunk. A merev, vagy rugalmas támaszok esetén a szerkezettől induló haladó hullámok visszaverődnek, ezáltal módosulhat a véges modell viselkedése a modellezni kívánt végtelen szerkezetéhez képest. Ezt kétféleképpen lehet elkerülni. Az egyik lehetőség az, hogy a peremekre nem csak rugós, hanem viszkózus csillapító elemekből álló megtámasztást is elhelyezünk. A másik lehetőség, hogy a talajnak adunk valamilyen fiktív belső csillapítási hányadost, ami ezáltal a véges tartományban disszipálja azt az energiát, ami egyébként a végtelenbe tartana.

6.4.3.3. Talaj anyagának viszkózus csillapítása

A komplex dinamikus merevség (6.277) szerinti képletét lineárisan rugalmas anyagra vezettük le. Amennyiben a talaj anyagának a ξ csillapítását is figyelembe szeretnénk venni, akkor a komplex statikus merevség (6.158) szerinti képletében látott módon járhatunk el: a gátolt modulusz helyett komplex gátolt modulusszal dolgozhatunk, ami

$$\tilde{E}_c = E_c(1+2i\xi), \quad (6.287)$$

így (6.277) képletét módosítanunk kell

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{din} = (1+2i\xi)\left(\frac{E_cA_0}{f} + i\omega\frac{E_cA_0}{c_{sd}}\right) &= \\ = \left(\frac{E_cA_0}{f} - 2\xi\omega\frac{E_cA_0}{c_{sd}}\right) &+ i\omega\left(\frac{2\xi}{\omega}\frac{E_cA_0}{f} + \frac{E_cA_0}{c_{sd}}\right) \quad (6.288)\end{aligned}$$

Nagy frekvenciájú gerjesztés esetén fenti képlet annyit jelent, hogy a valós rugómerevséget és a csillapítási tényezőt módosítanunk kell, és (6.278), illetve (6.279) helyett az alábbi képletekkel dolgozhatunk:

$$k_{din} = \frac{E_cA_0}{f} - 2\xi\omega\frac{E_cA_0}{c_{sd}}, \quad c_{ekv} = \frac{2\xi}{\omega}\frac{E_cA_0}{f} + \frac{E_cA_0}{c_{sd}}. \quad (6.289)$$

Alacsony frekvenciájú gerjesztés esetén (6.288) képletében c_{sd} képzetes, így érdemesebb (6.283) képletéből kiindulni. A komplex merevség valós értéke nem változik, a $2i\xi$-vel való szorzás miatt viszont egy csillapító elemet is alkalmaznunk kell a megfelelő együtthatóval:

$$k_{din} = E_c A_0 \left(\frac{1}{f} + \sqrt{\frac{1}{f^2} - \frac{\omega^2}{c_n^2}} \right), \qquad c_{ekv} = \frac{2\xi}{\omega} k_{din}. \tag{6.290}$$

6.4.3.4. Szóródó csillapítás előfordulása más modellekben

Ebben az alfejezetben csak a rugalmas féltér függőleges rezgésére mutattuk be a szóródó csillapítás jelenségét, amikor a keresztmetszet egy kör. A felszíni keresztmetszet vízszintes mozgása esetén hasonló lépésekkel lehet hasonló eredményekre jutni, akárcsak a merev alaptest elfordulásához kapcsolódó, ún. billegő mozgás esetén.

Ezeken kívül megemlítjük, hogy egyéb, végtelen szerkezeteknél is megjelenik a haladó hullámok vissza nem verődése miatti energiaveszteség, és az ezt jellemző szóródó csillapítás. Erre példa lehet az egyik irányban végtelen hosszúságú lemez esete.