

Óravázlat
Végeselemes Modellezés

2015.

1 Mechanikai háttér

1.1 Alapegyenletek

forma

megnevezés

$$\bar{L}\sigma - p = 0 \quad \text{egyensúlyi egyenletek}$$

$$Lu = \varepsilon \quad \text{geometriai egyenletek}$$

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad \text{anyagegyenletek}$$

1.2 Megoldási módok:

1. alapegyenletek \rightarrow peremérték feladat (alkalmazva az elmozdulás módszer alapelveit)

peremérték feladat általános alakja:

$$\boxed{Lu = f} \text{ figyelembe véve a peremfeltételeket}$$

2. Felhasználva a potenciális energia stacionaritási tételét:

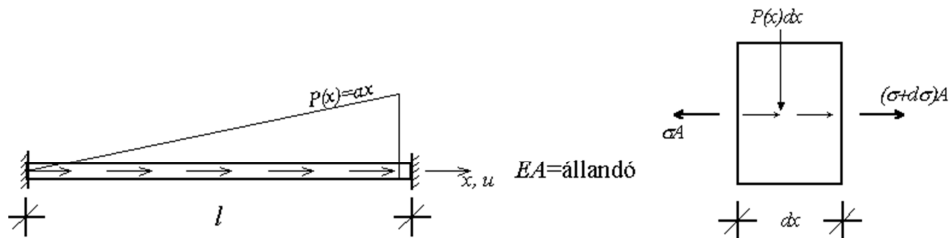
$$\pi(u) = \frac{1}{2} \int_V (Lu)^T D(Lu) dV - \int_V (Lu)^T D\varepsilon_0 dV - \int_V u^T p dV = \text{stac!}$$

1.3 Alapmodellek:

- pont modellek (támaszok, tömegpont)
- vonal modellek (központosan húzott-nyomott rúd -rácsrúd-, gerenda modellek -Euler-Bernoulli-féle, Timoshenko-féle)
- felület modellek (tárcsák -síkbeli feszültség állapot, síkbeli alakváltozási állapot, lemezek -klasszikus (vékony) lemez, vastag (Mindlin- Reissner féle, héjak)
- térfogat modellek

2 Központosan húzott-nyomott rúd modellje

Ha egy szerkezet esetén a geometriát leíró három méret közül két méret sokkal kisebb, mint a harmadik méret és a teher a tartótengelyen hat, akkor a szerkezet központosan húzott-nyomott rúdként (rács) modellezhető.



1. Ábra: Központosan húzott-nyomott rúd.

Geometriai egyenlet: $\varepsilon = \frac{du}{dx}$, egyensúlyi egyenlet: $\frac{d\sigma}{dx} = -\frac{p(x)}{A}$,

anyagmodell egyenlete: $\sigma = E \varepsilon$. Peremfeltételek: $u(0) = u(l) = 0$.

A fenti három egyenlet az *elmozdulásmódszer* technikájának segítségével (σ és ε kiküszöbölésével) összevonható egyetlen egyenletté:

$$-EA \frac{d^2 u}{dx^2} = p(x) \left[-EA \frac{d \varepsilon_0}{dx} \right].$$

Itt az utolsó tag a kinematikai teherből származó tag. A peremfeltételek mindegyike *lényeges peremfeltétel*, mert a függvények 0-adik deriváltja szerepel bennük, és $0 < n < 1$. Ennél a feladatnál az $Lu=f$ általános peremértékfeladat elemei:

$$L = -EA \frac{d^2}{dx^2}, u = u(x), f = p(x).$$

A peremértékfeladat „párjaként” felírható *variációs feladat*, vagyis a potenciális energia funkcionálja:

$Lu = f \rightarrow F(u) = \frac{1}{2} \langle Lu, u \rangle - \langle f, u \rangle$ vagy $F(u) = \frac{1}{2} \langle Ru, Ru \rangle - \langle f, u \rangle$. Az egyes

tagok számítása: $\langle f, u \rangle = \int_0^l p(x)u(x)dx$, $\langle Lu, u \rangle = \int_0^l (-EA \frac{d^2u}{dx^2} u)dx$, ez azonban

átalakítható a homogén peremfeltételek és a parciális integrálás ($\int v'u = vu - \int vu'$) segítségével.

Legyen $v = -EA \frac{du}{dx}$, illetve $u' = \frac{du}{dx}$, így:

$\langle Lu, u \rangle = \left[-EA \frac{du}{dx} u \right]_0^l - \int_0^l (-EA \frac{du}{dx} \frac{du}{dx}) dx = \int_0^l EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx$. Az első egyenlőségjel

után szögletes zárójelben szereplő tag értéke a homogén peremfeltételek miatt zérus.

A másik, $\langle Ru, Ru \rangle$ változatban $F(u)$ alakja (felhasználva az $R = \sqrt{EA} \frac{d}{dx}$ értéket):

$$F(u) = \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - EA \int_0^l \left(\frac{du}{dx} \right) \epsilon_0 dx - \int_0^l p(x)u(x) dx,$$

ez pedig pontosan a *potenciális energia (adott szerkezethez tartozó) függvénye*. Érdemes bemutatni

ennek kapcsolatát az „általános” alakhoz. Mivel $\epsilon = \frac{du}{dx}$, és a keresztmetszet állandó, így

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{du}{dx} E \frac{du}{dx} A dx - \int_0^l u p(x) dx = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E \epsilon dV - \int_l u p dx = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \sigma dV - \int_l u p dx.$$

Összefoglalva:

$$\mathbf{p} = [p_x(x)], \mathbf{u} = [u(x)], \boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x(x)], \boldsymbol{\epsilon}_0 = [\alpha \Delta T_s], \boldsymbol{\sigma} = [N(x)], \mathbf{D} = [EA]$$

$$\mathbf{L} = \left[\frac{d}{dx} \right], \bar{\mathbf{L}} = \left[-\frac{d}{dx} \right]$$

3 Gerenda modellek

Ha egy szerkezet esetén a geometriát leíró három méret közül két méret sokkal kisebb, mint a harmadik méret és a teher a tartótengelyre merőlegesen hat, akkor a szerkezet gerendaként modellezhető.

3.1 Euler-Bernoulli gerenda

Az Euler-Bernoulli féle rúdmodell a sík keresztmetszetek elvét veszi alapul (Kaliszky S.; Kurutzné Kovács M. és Szilágyi Gy. (2000)) . A sík keresztmetszetek feltevése szerint a keresztmetszetek a terhelés során nem szenvednek alakváltozásokat. Az Euler-Bernoulli féle elmélet szerint az alakváltozások után ezen keresztmetszetek merőlegesek maradnak a tartótengelyre.



2. Ábra: Hajlított Euler-Bernoulli félegerendák keresztmetszetének és semleges tengelyének a sematikus képe az alakváltozás után.

Ezért a rudat úgy tekinthetjük, mint a rúd tengelyére merőleges, végtelen sok, egymáshoz rugókkal kapcsolódó merev lapok összessége. A lapok a rúd keresztmetszetével azonos alakúak, végtelen merevek és végtelen vékonyak; az őket összekötő végtelen sűrűn elhelyezett rugók húzás, nyomás és nyírás felvételére egyaránt alkalmasak és a rúd anyagának szilárdságtani tulajdonságainak megfelelően viselkednek. A keresztmetszetek merőlegességi feltétele azt a szilárdsági következményt vonja maga után, hogy az ilyen mechanikai modell alkalmazása esetén **a nyírési szögtorzulás értéke elhanyagolásra kerül ($\gamma = 0$)**. Az Euler-Bernoulli elmélet szerint a tartótengely z irányú eltolódása (v) és a külső teher ($q(x)$) között az alábbi differenciál egyenlettel írhatjuk le a kapcsolatot:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = q(x) \tag{1}$$

Itt v jelöli a tartótengely z irányú eltolódását, E a rugalmassági modulus, I a keresztmetszet inerciája, $q(x)$ a z irányú megoszló erő.

A belső erők (M nyomaték , Q nyíróerő) számítása is megadható differenciál egyenletekkel:

$$M(x) = - \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) , \tag{2}$$

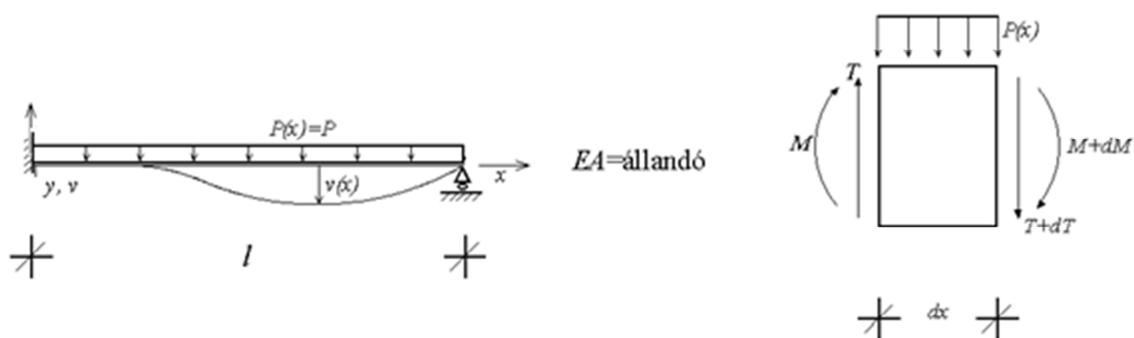
$$Q(x) = - \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) . \tag{3}$$

Látható, hogy a nyomatéki ábra deriváltja a nyíróerő ábra, amint azt a Statika tárgyban tanultuk. Az alakváltozásokat tekintve a szögelfordulás ($\varphi(x)$), a görbület (ρ) szintén a tartótengelyre merőleges eltolódásból kifejezhető:

$$\varphi(x) = \frac{dv}{dx} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\Theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} = \kappa \quad (5)$$

3.1.1 „Klasszikus” hajlított gerenda vizsgálata



Geometriai egyenlet: $\kappa = \frac{d^2v}{dx^2}$, **egyensúlyi egyenlet:** $\frac{d^2M}{dx^2} = -p(x)$ (felhasználva a $dT = -p(x)dx$ függőleges vetületi és a $Tdx = dM$ nyomatéki egyensúlyi egyenleteket), **anyagmodell egyenlet:** $M = EI\kappa$. A peremfeltételek:

$$v(0) = v(l) = 0, \quad \frac{dv}{dx}(0) = 0, \quad \frac{d^2v}{dx^2}(l) = 0.$$

Ismét az *elmozdulásmódszer* segítségével vonjuk össze az egyenleteket:

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = p(x).$$

A kapott differenciálegyenlet negyedrendű (n=2), így az első három peremfeltétel *lényeges*, az utolsó pedig *természetes*. A *potenciális energia* az előbb bemutatott átalakítással, vagy mechanikai alapokra hivatkozva közvetlenül is felírható. Most ez utóbbit választjuk:

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \\
 &= \Pi(v) = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon \sigma dV - \int_I v p dx = \frac{1}{2} \int_I \int_A \kappa_y E \kappa_y dA dx - \int_I v p dx = \frac{1}{2} \int_I \kappa^2 E \int_A y^2 dA dx - \\
 &- \int_I v p dx = \frac{1}{2} \int_I \kappa^2 EI_z dx - \int_I v p dx = \frac{EI_z}{2} \int_I \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_I v(x) p(x) dx.
 \end{aligned}$$

Az utolsóként felírt tag a *hajlított gerenda potenciális energiája*.

Ha például a fentiekén kívül még egyenlőtlen hőmérsékletváltozás hatását is figyelembe kell vennünk a gerenda teljes hosszán, akkor ezt a hatást a külső potenciálhoz adjuk hozzá:

$$- \int_V (\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 dV \rightarrow - \int_I \left(- \frac{d^2 v}{dx^2} \right) EI \kappa_0 dx = EI \int_0^l \frac{d^2 v}{dx^2} \kappa_0 dx.$$

Összefoglalva:

Ha a rudat az xy síkban hajlítjuk, akkor $\gamma_{xy} = 0$.

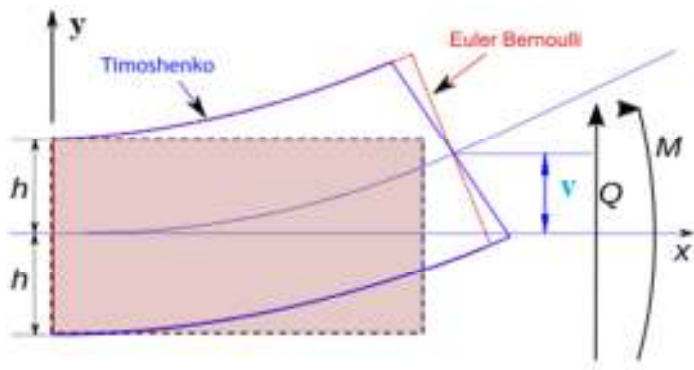
$$\mathbf{p} = [p_y(x)], \quad \mathbf{u} = [v(x)], \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\kappa_z(x)], \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \left[\alpha \frac{\Delta T_y}{h_y} \right], \quad \boldsymbol{\sigma} = [M_z(x)],$$

$$\mathbf{D} = [EI_y]$$

$$\mathbf{L} = \left[\frac{d^2}{dx^2} \right], \quad \bar{\mathbf{L}} = \mathbf{L}$$

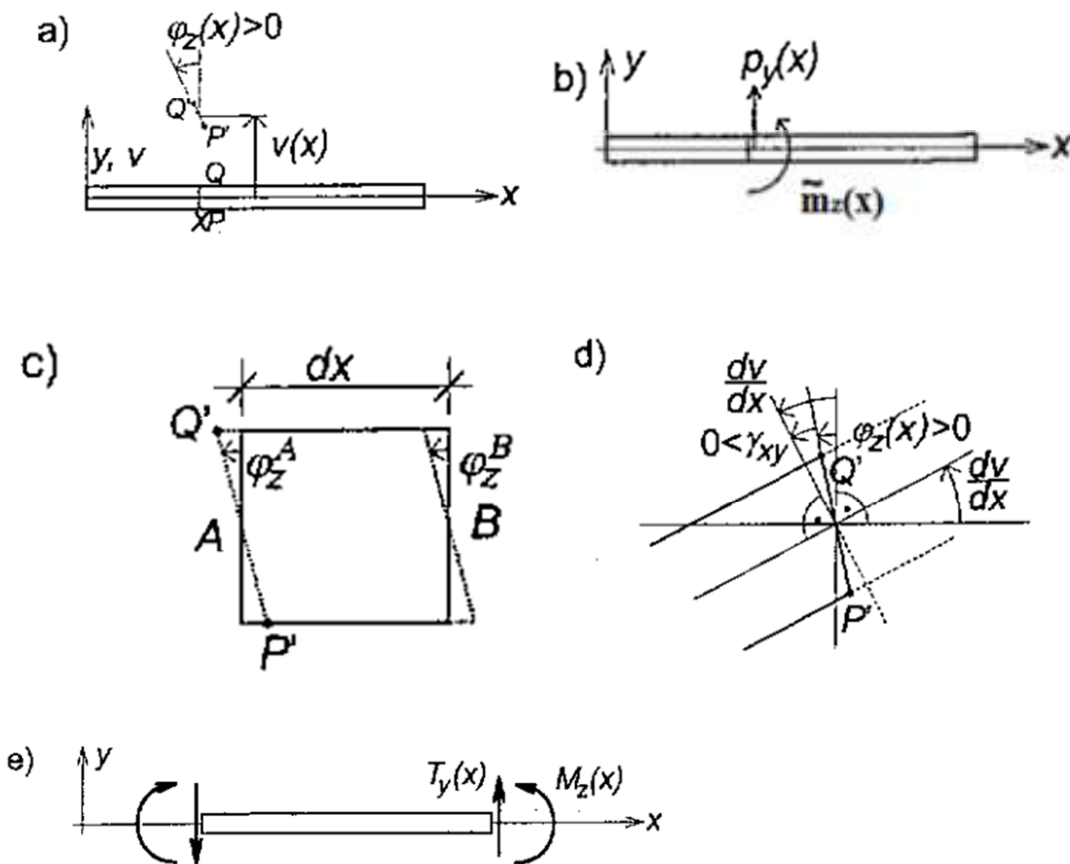
3.1.2 Timoshenko gerenda

A Timoshenko-féle gerendaelmélet a XX. század elejétől származik (Timoshenko (1921)). Az elmélet szerint a modell az Euler-Bernoulli modelltől eltérően nem tételezi fel a keresztmetszetek merőlegességi feltételét az alakváltozások után, minden egyéb feltételt pedig megtart. Ennek szilárdságtani következménye, hogy a **nyírási alakváltozásokat már nem elhanyagolhatóak**. A tartó ugyanolyan peremfeltételek mellett **„lágyabb” merevségű**, mint az Euler-Bernoulli féle gerenda. Ennek következménye, hogy a **statikus alakváltozások nőnek**, a **sajátfrekvencia csökken**. A szögtorzulás és a tartótengely eltolódás független ismeretlenként szerepel ebben a modellben.

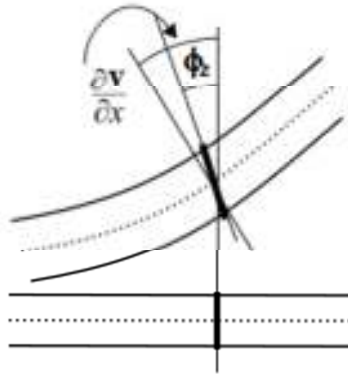


3. Ábra: Az Euler-Bernoulli illetve a Timoshenko féle gerendák alakváltozási elméletének az összehasonlítása

Amennyiben a gerenda nyírési modulusát a végtelenhez közelítjük, a Timoshenko féle modell azonos eredményre vezet, mint az Euler Bernoulli féle modell.



Az xy síkban hajlított rúd egy keresztmetszetének (a) elmozdulása, (b) terhelése, (c, d) alakváltozásai, (d) belső erői



Ábra: Timoshenko-féle gerenda alakváltozási elmélete

Mivel a nyírási szögtorzulás értéke nem elhanyagolható, ezért a $\varphi_z(x) \neq \frac{dv}{dx}$. A különbség a nyírási szögtorzulással egyenlő.

$$\varphi_z(x) + \gamma_{xy} = \frac{dv}{dx}. \quad (6)$$

A differenciális összefüggések az alábbiak szerint szétesnek két független egyenletté:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d\varphi_z}{dx} \right) = q_y(x), \quad (7)$$

$$\frac{dv}{dx} = \varphi_z(x) - \frac{1}{\beta AG} \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\varphi_z}{dx} \right). \quad (8)$$

Itt β a Timoshenko féle nyírási tényező, ami a keresztmetszet geometriai alakjától függ. Téglalapkeresztmetszet esetén $\beta = 5/6$. A a keresztmetszet területe, G a nyírási modulus.

Látható, hogy az utolsó kifejezés a két elmélet szerinti különbség kifejezője, azaz a Timosenko-féle modellezés az Euler –Bernoulli modellel azonos eredményt ad, ha

$$\frac{EI}{\beta L^2 AG} \ll 1 \quad (\text{itt } L \text{ a rúd hossza}).$$

A 7 és 8 egyenletekből származtathatjuk a Timoshenko modell alapegyenletét konstans keresztmetszeti terület esetén:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) - \frac{EI}{\beta AG} \frac{d^2 q}{dx^2} \quad (9)$$

Az eltolódások (v), a szögelfordulások (φ_z) és a belső erők (M és Q) közötti összefüggések az alábbiak szerint alakulnak:

$$M = -EI \frac{d\varphi_z}{dx} \quad (10)$$

$$Q = \beta AG \left(-\varphi_z + \frac{dv}{dx} \right). \quad (11)$$

Összefoglalva:

Ha a rudat az xy síkban hajlítjuk, akkor a Timoshenko gerenda modell esetén $\gamma_{xy} \neq 0$.

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_y(x) \\ \hat{m}(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v(x) \\ \varphi_z(x) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \gamma_{xy}(x) \\ \kappa_z(x) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \frac{\Delta T_y}{h_y} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} T_y(x) \\ M_z(x) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} G\bar{A}_y & 0 \\ 0 & EI_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & -1 \\ 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix}$$

4 Felületszerkezetek



Tárcsák

Síkbeli feszültségállapot

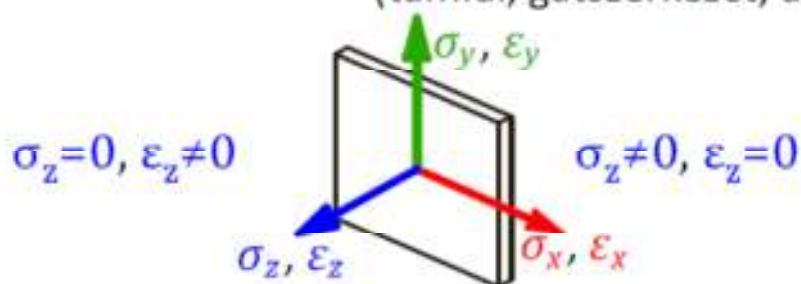
Síkbeli alakváltozás állapot



falszerkezetek



vonalas építmények metszete
(támfal, gátszerkezet, alagút stb.)



Ha egy szerkezet esetén a geometriát leíró három méret közül két méret sokkal nagyobb mint a harmadik méret és a teher a szerkezet középfelületének síkjában hat, akkor az **tárcsaként modellezhető**. Tárcsa esetén a teher, a feszültség és az alakváltozás nem függ a harmadik (kis méretet leíró) koordinátától. Ezt a méretet (vastagságot) állandónak tételezzük fel –ez lehet részenként állandó-.

Ha egy szerkezet esetén a geometriát leíró három méret közül két méret sokkal nagyobb mint a harmadik méret és a teher a szerkezet középfelületének síkjára merőlegesen hat, akkor az **lemezként modellezhető**.

4.1 Tárcsa vizsgálata

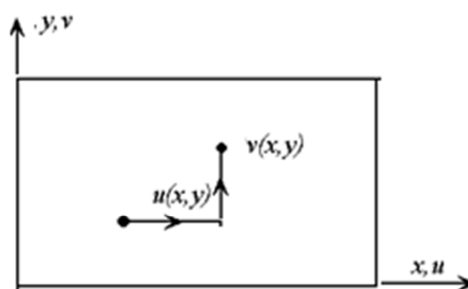
Ha egy szerkezet esetén a geometriát három méret közül két méret sokkal nagyobb mint a harmadik méret és a teher a szerkezet középfelületének síkjában hat, akkor az tárcsaként modellezhető.

4.1.1 Síkbeli feszültség állapot

Síkbeli feszültség állapot esetén (három főfeszültség közül egy zérus) vagy

$$\sigma_z(x, y) = 0, \tau_{xz}(x, y) = 0, \tau_{yz}(x, y) = 0 \text{ feltétel minden } (x, y) \text{ pontban teljesül és}$$

$$\text{akkor } \gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0, \varepsilon_z = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$



Az alapvető változók:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y(x, y) \\ \tau_{xy}(x, y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x(x, y) \\ p_y(x, y) \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \alpha \Delta t_s \\ \alpha \Delta t_s \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

itt L a geometriai egyenletek differenciáloperátora.

A síkbeli feszültség állapothoz tartozó merevség

$$\mathbf{D}^{\text{SF}} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Ennél a feladatnál csak a tárcsa potenciális energiafüggvényét írjuk fel, a peremérték-feladat után érdeklődőknek a Lamé-féle megoldást ajánljuk (Tartók statikája előadásjegyzet...).

A „h” vastagságú síkbeli feszültségi állapotú tárcsa potenciális energiájának függvényét:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} dA -$$

$$-\frac{Eh}{(1-\nu^2)} \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{bmatrix} dA - \int_A [u \quad v] \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} dA$$

4.1.2 Síkbeli alakváltozási állapot

Tárcsaként modellezhető minden olyan, szerkezet amely síkbeli **alakváltozási állapotban** van (három főnyúlás közül egy zérus) vagy

$$\varepsilon_z(x, y) = 0, \gamma_{xz}(x, y) = 0, \gamma_{yz}(x, y) = 0 \text{ feltétel minden } (x, y) \text{ pontban teljesül és}$$

$$\text{akkor } \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0, \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Az alapvető változóknak csak kis mértékű változás van:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y(x, y) \\ \tau_{xy}(x, y) \end{bmatrix}, \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x(x, y) \\ p_y(x, y) \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \alpha(1+\nu)\Delta t_s \\ \alpha(1+\nu)\Delta t_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

itt L a geometriai egyenletek differenciáloperátora.

A síkbeli alakváltozási állapothoz tartozó merevség

$$\mathbf{D}^{\text{SA}} = \frac{Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

A síkbeli alakváltozási állapotú tárcsa esetén a gyakorlati feladatokban a **vastagságot mindig egységnyinek tételezzük fel.**

A „h” vastagságú síkbeli alakváltozási állapotú tárcsa potenciális energiájának függvényét:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \frac{Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} dA -$$

$$- \frac{Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{bmatrix} dA - \int_A \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} dA$$

4.2 Lemezelméletek

A felületszerkezetek elméletében leggyakrabban használt, így a közismert „lemezelméletnek” is a gerincét adó geometriai feltételezés a *Kirchhoff-Love* hipotézis. Ez voltaképpen három állítást fogalmaz meg a vizsgált felületszerkezet középfelületének normálisaira vonatkozóan:

- azt, hogy a deformálatlan középfelületre merőleges vonalak (a középfelület normálisai) a szerkezet deformációja után is egyenes vonalak maradnak.
- azt, hogy ezek a vonalak a deformált szerkezet középfelületének is normálisai lesznek,
- azt, hogy ezeknek a vonalaknak a hossza a deformáció során nem változik meg.

A *Kirchhoff*-féle lemezelmélet feltételezés-rendszernek a létjogosultságát az alkalmazások messzemenően **igazolták tömör keresztmetszetű vékony vasbeton lemezek esetében.**

Jelentős hibák származhatnak azonban az elmélet alkalmazásából,

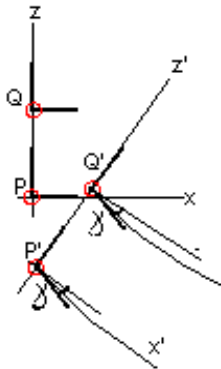
- ha a lemez kialakítása olyan, hogy a nyíróerők okozta szögtorzulások nagyok.
Tömör keresztmetszet esetén ez csak kifejezetten vastag lemezeknél fordul elő, egyre

gyakoribb viszont olyan lemezek alkalmazása, amelyeket a súlycsökkentés céljából takarékküreggel alakítanak ki,

- olyan réteges lemezeké (szendvicslemezeké), amelyek közbenső kitöltő rétege alacsony fajsúlyú és kicsiny merevségű anyag, és ezekben a lemezekben a szögtorzulások valóban nagyok.

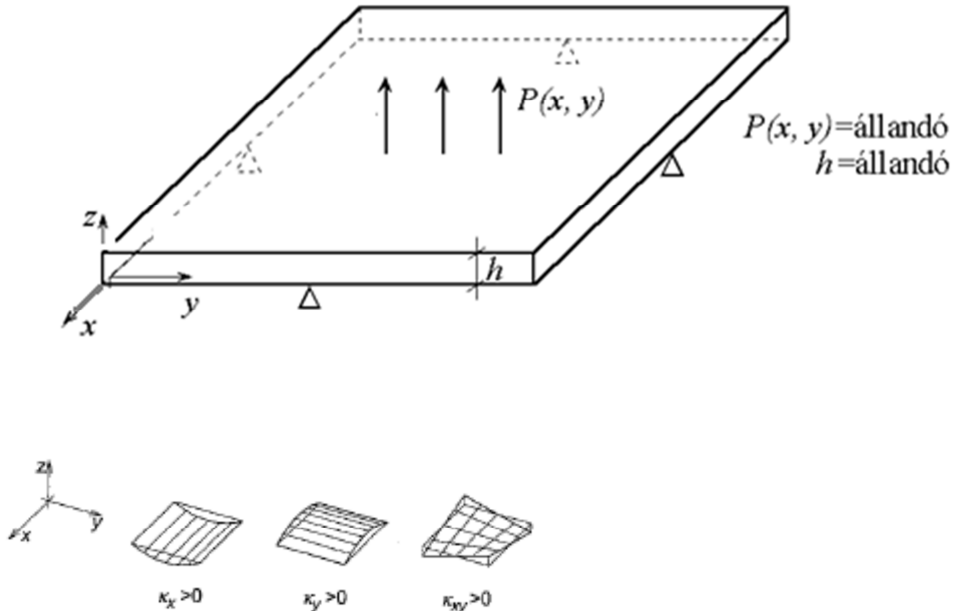
Ha $\gamma_{zx} \neq 0$ és $\gamma_{zy} \neq 0$, akkor a z' irányú koordinátavonalak **nem maradhatnak merőlegesek a deformálódott középfelületre**, sőt, ha γ_{zx} -t és γ_{zy} -t a lemezvastagság irányában változónak tekintjük, azzal a feltételezéssel is ellentmondásba kerülünk, hogy ezek a vonalak egyenesek maradnak. Vagyis ilyen esetben a *Kirchhoff-Love* hipotézis mindkét állítása érvénytelenné válik.

A nyírási alakváltozások figyelembevételének leggyakrabban alkalmazott módszere olyan „kompromisszumos” megoldás alkalmazása, amely *Kirchhoff-Love* hipotézis második állításának érvényességétől eltekint, megtartja viszont az első állítás érvényességét, azaz a *merőleges normálisok* feltételezése helyett csupán *egyenes normálisok* feltételezésével ad kapcsolatot a középfelület elmozdulásai és a középfelületen kívül fekvő pontok elmozdulásai között.



Az egyenes normálisok feltételezésével adódó geometriai összefüggések lehetőséget adnak a nyíróerők okozta alakváltozások hatásának a figyelembevételére, amelyeket a *Kirchhoff*-féle lemezelmélet elhanyagol. Ilyen lemezelméletek pl. a *Mindlin*-féle, a *Reissner*-féle elmélet, ill. a vékony héjalású szendvicslemezek hajlításelmélete.

4.2.1 „Klasszikus” lemez vizsgálata



A potenciális energia függvényének felírása a feladatunk. A peremérték feladatot „Tartók statikája” tárgy előadásán részletesen levezettük. A nyírási alakváltozások elhanyagolása miatt az elfordulás függvények nem függetlenek az eltolódás függvényektől. A $\gamma_{xz}(x, y) = 0$ és $\gamma_{yz}(x, y) = 0$ feltétel miatt $\varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial x}$ illetve $\varphi_x(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y}$.

A mechanikai modell leírásához szükséges vektorok:

$$\mathbf{u} = [w(x, y)], \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \kappa_{0x} \\ \kappa_{0y} \\ \kappa_{0xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha \Delta t}{h} \\ \frac{\alpha \Delta t}{h} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = [p_z(x, y)], \quad L = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

Az anyagi merevségi mátrix a „feszültségként” szereplő fajlagos nyomatékok és az alakváltozások között teremt kapcsolatot, elemeinek értéke:

$$\mathbf{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

A potenciális energia függvénye végül is egyszerű behelyettesítéssel számítható.

A „h” vastagságú vékony „klasszikus” lemez potenciális energiájának függvényét:

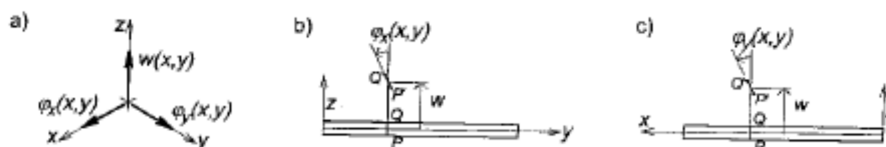
$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \, dA - \int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \, dA - \int_A w \, p \, dA.$$

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} [w(x,y)] \,)^T \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} [w(x,y)] \, dA -$$

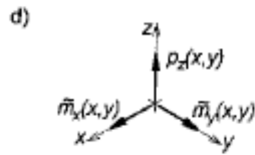
$$- \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} [w(x,y)] \,)^T \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{0x} \\ \kappa_{0y} \\ \kappa_{0xy} \end{bmatrix} \, dA - \int_A [w(x,y)] [p_z(x,y)] \, dA$$

4.2.2 Vastaglemezek: Mindlin-Reissner lemez vizsgálata

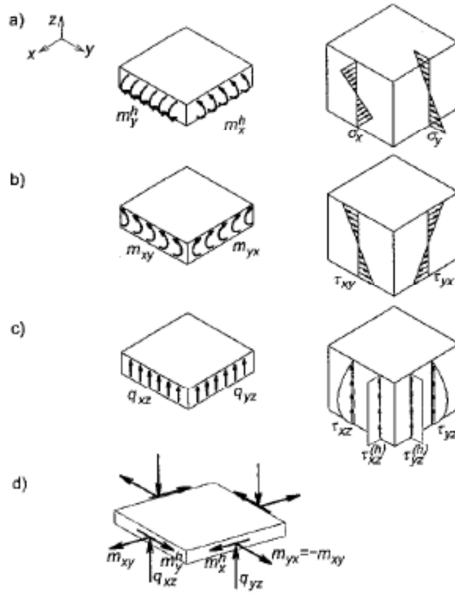
Az elmélet a nyírási alakváltozásokat figyelembe veszi. A terheletlen lemez középfelületére merőleges vonalak nem lesznek merőlegesek a terhelés hatására az alakváltozott szerkezetnél.



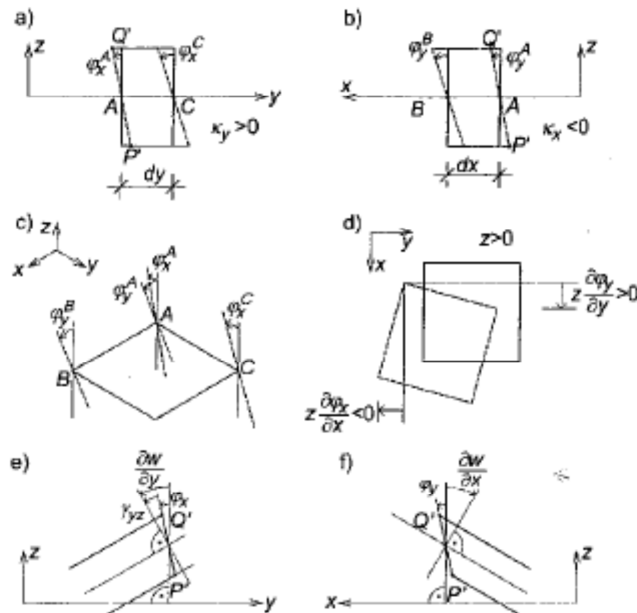
A Mindlin-Reissner-féle lemez elmozdulásai



A Mindlin-Reissner-féle lemez terhei



A Mindlin-Reissner-féle lemez igénybevételei



A Mindlin-Reissner-féle lemez alakváltozásának szemléltetése

A Timoshenko gerendához hasonlóan itt is hasonlóan adhatjuk meg az alakváltozás komponenseket.

$$\text{miatt } \kappa_y(x, y) = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}, \kappa_x(x, y) = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \text{ illetve } \kappa_{xy}(x, y) = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}.$$

A nyírási alakváltozások figyelembe vétele miatt:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y(x, y) \text{ és } \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x(x, y).$$

Továbbá $\gamma_{xy}(x, y, z) = -z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = z \kappa_{xy}(x, y)$ számítható.

A mechanikai modell leírásához szükséges vektorok:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} w(x, y) \\ \varphi_x(x, y) \\ \varphi_y(x, y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_z(x, y) \\ \tilde{m}_x(x, y) \\ \tilde{m}_y(x, y) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} & -\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & \varphi_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} & -\varphi_x & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{0x} \\ \mathbf{K}_{0y} \\ \mathbf{K}_{0xy} \\ \gamma_{0xz} \\ \gamma_{0yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha\Delta t}{h} \\ \frac{\alpha\Delta t}{h} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} m_x(x, y) \\ m_y(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \\ q_{xz}(x, y) \\ q_{yz}(x, y) \end{bmatrix}, \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_z(x, y) \\ \tilde{m}_x(x, y) \\ \tilde{m}_y(x, y) \end{bmatrix},$$

Az anyagi merevségi mátrix a „feszültségként” szereplő fajlagos nyomatékok és az alakváltozások között teremt kapcsolatot, elemeinek értéke:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & -\nu \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Gh^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Gh}{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Gh}{1,2} \end{bmatrix}.$$

A potenciális energia függvénye végül is egyszerű behelyettesítéssel számítható a .

$$\pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{Lu})^T \mathbf{D} (\mathbf{Lu}) dV - \int_V (\mathbf{Lu})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{p} dV = \text{stac!}$$

képlet alapján.

5 Ritz módszer

Közelítő megoldását számíthatjuk az elmozdulás függvénynek.

Feltesszük, hogy az elmozdulás függvény közelíthető előre ismert függvények (φ_i) lineáris kombinációjával. Ezen függvényekről megköveteljük, hogy elégítsék ki a peremfeltételeket.

$$\text{Így } u \cong u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$$

Ennélfogva az $F(u) = \frac{1}{2} \langle Ru, Ru \rangle - \langle p, u \rangle = \text{stac!}$ felhasználásával a c -kre nézve egy lineáris egyenlet rendszert kapunk.

Azaz

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \begin{bmatrix} \langle R\varphi_1, R\varphi_1 \rangle & & & \\ & \langle R\varphi_2, R\varphi_2 \rangle & & \\ & & \dots & \\ & & & \langle R\varphi_n, R\varphi_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \langle p, \varphi_1 \rangle \\ \langle p, \varphi_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle p, \varphi_n \rangle \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

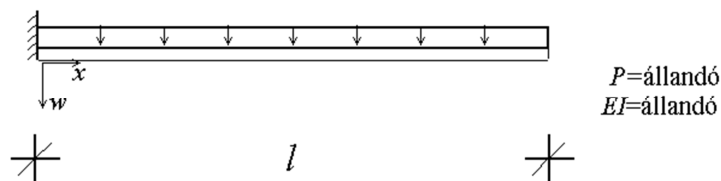
Rövidítve $\mathbf{A}c - \mathbf{b} = 0$. Így $a_{ij} = \langle R\varphi_i, R\varphi_j \rangle$ illetve $b_i = \langle p, \varphi_i \rangle$

A fenti lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapott c vektor felhasználásával az elmozdulások számíthatók, továbbá a geometriai egyenletek felhasználásával alakváltozások felírhatók, majd a belső erők kiszámíthatók az anyagegyenletek segítségével.

Azaz

$$u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \rightarrow \varepsilon_n = Lu_n \rightarrow \sigma_n = D(\varepsilon_n - \varepsilon_0).$$

5.1.1 1.Példa: Határozzuk meg az eltolódásfüggvényt és a konzol végének lehajlását.



A bázisfüggvények: $\varphi_1 = x^2$, $\varphi_2 = x^3$. Mindkettő teljesíti a $v = \frac{dv}{dx} = 0$ feltételeket az $x = 0$ helyen.

Ritz közelítő függvénye:

$$v(x) = \sum_{i=1}^2 c_i \varphi_i = c_1 x^2 + c_2 x^3.$$

Hagyományos lépésekkel (a szilárdságtanban tanultakkal) folytatva.

Helyettesítsük be a potenciális energia képletébe a közelítő függvényt:

$$\Pi(c_1, c_2) = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l v p dx = \frac{EI}{2} \int_0^l (2c_1 + 6c_2 x)^2 dx - \int_0^l p(c_1 x^2 + c_2 x^3) dx.$$

A műveletek elvégzése után:

$$\Pi(v) = \frac{EI}{2} (4lc_1^2 + 12l^3 c_2^2 + 12c_1 c_2 l^2) - p(c_1 \frac{l^3}{3} + c_2 \frac{l^4}{4}).$$

A minimumfeltételből következően:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = 0 = \frac{1}{EI} (4lc_1 + 6l^2 c_2) - \frac{pl^3}{3}, \text{ illetve } \frac{\partial \Pi}{\partial c_2} = 0 = \frac{1}{EI} (12l^3 c_2 + 6l^2 c_1) - \frac{pl^4}{4}.$$

A két ismeretlenes egyenletrendszer megoldása után az eredmények:

$$c_1 = \frac{5l^2 p}{24EI}, \quad c_2 = -\frac{pl}{12EI}.$$

A keresett lehajlás függvény:

$$v(x) = \frac{pl^4}{24EI} \left(\frac{5x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right). \text{ Innen a konzolvég lehajlása: } v(l) = \frac{pl^4}{8EI}.$$

Összehasonlításul a „pontos” megoldás:

$$v(x) = \frac{pl^4}{24EI} \left(\frac{6x^2}{l^2} - \frac{4x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right), \quad v(l) = \frac{pl^4}{8EI}.$$

A Ritz-módszer lépéseit követve nincs szükség a potenciális energia felírására.

A Ritz-operátor Euler-Bernoulli gerenda esetén: $R = \sqrt{EI} \frac{d^2}{dx^2}$

$$\text{Így } a_{11} = EI \int_0^l \left(\frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} \right)^2 dx = EI \int_0^l 2^2 dx = 4lEI,$$

$$a_{12} = EI \int_0^l \left(\frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} \right) dx = EI \int_0^l 2 \times 6x dx = 6l^2 EI$$

$$a_{22} = EI \int_0^l \left(\frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} \right)^2 dx = EI \int_0^l (6x)^2 dx = 12l^3 EI,$$

$$\text{így } b_1 = \int_0^l p \varphi_1 dx = \int_0^l px^2 dx = \frac{pl^3}{3}, \quad b_{21} = \int_0^l p \varphi_2 dx = \int_0^l px^3 dx = \frac{pl^4}{4},$$

$$EI \begin{bmatrix} 4l & 6l^2 \\ 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} l^3/3 \\ l^4/4 \end{bmatrix}. \quad \text{A megoldás: } \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5l^2 p}{24EI} \\ -\frac{pl}{12EI} \end{bmatrix}$$

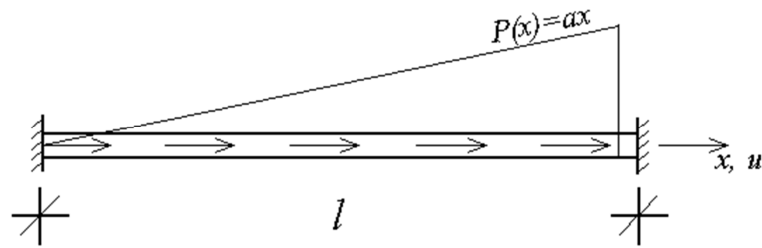
$$\text{A közelítő megoldás } v \cong v_2(x) = \frac{pl^4}{24EI} \left(\frac{5x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right).$$

Alakváltozás és igénybevétel

$$\kappa \approx \kappa_2(x) = \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{pl^4}{24EI} \left(\frac{10}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right).$$

$$M \approx M_2(x) = EI \kappa_2 = EI \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{pl^4}{24EI} \left(\frac{10}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right).$$

5.1.2 2.Példa: Határozzuk meg az elmozdulásfüggvényt.



A feladathoz tartozó potenciális energia függvénye: $\Pi(u) = \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l p u dx$.

A bázisfüggvények: $\varphi_1 = x(l-x)$, $\varphi_2 = x^2(l-x)$.

Deriváltjaik: $\frac{d\varphi_1}{dx} = l - 2x$, $\frac{d\varphi_2}{dx} = 2lx - 3x^2$.

Ennél a példánál nem az eddig alkalmazott „hagyományos” utat követjük, hanem közvetlenül a lineáris egyenletrendszer elemeit állítjuk elő:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

$$a_{11} = \langle R\varphi_1, R\varphi_1 \rangle = EA \int_0^l (l^2 - 4x + 4x^2) dx = EA \left[l^2 x - 2x^2 + \frac{4}{3} x^3 \right]_0^l = \frac{EA l^3}{3},$$

$$a_{12} = EA \int_0^l (2l^2 x - 7lx^2 + 6x^3) dx = EA \left[l^2 x^2 - \frac{7}{3} lx^3 + \frac{3}{2} x^4 \right]_0^l = \frac{EA l^4}{6},$$

$$a_{22} = EA \int_0^l (4l^2 x^2 - 12lx^3 + 9x^4) dx = EA \left[\frac{4}{3} l^2 x^3 - 3lx^4 + \frac{9}{5} x^5 \right]_0^l = \frac{2EA l^5}{15},$$

$$b_1 = \langle ax, x(l-x) \rangle = a \int_0^l (lx^2 - x^3) dx = a \left[\frac{lx^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^l = \frac{al^4}{12},$$

$$b_2 = a \int_0^l (lx^3 - x^4) dx = a \left[\frac{lx^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^l = \frac{al^5}{20}.$$

A teljes egyenletrendszer:

$$EA \begin{bmatrix} l^3/3 & l^4/6 \\ l^4/6 & 2l^5/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} l^4/12 \\ l^5/20 \end{bmatrix}. \text{ A megoldás: } \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{al}{6EA} \\ \frac{a}{6EA} \end{bmatrix}$$

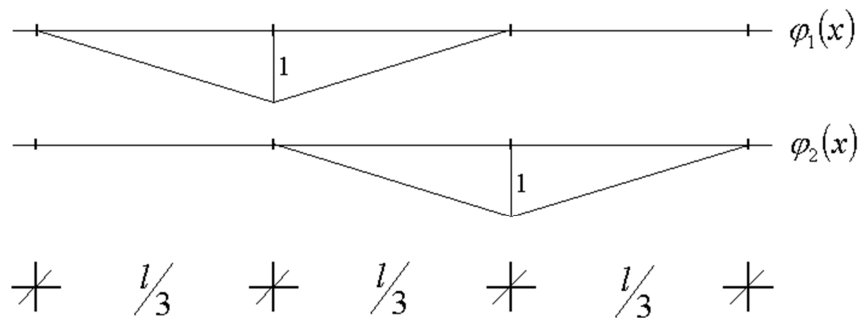
A keresett eltolódásfüggvény:

$$u(x) = \frac{al}{6EA} x(l-x) + \frac{a}{6EA} x^2(l-x) = \frac{ax(l^2 - x^2)}{6EA}.$$

A normálerő változását is kiszámíthatjuk ennek segítségével:

$$N(x) = EA \frac{du}{dx} = \frac{a}{6} (l^2 - 3x^2).$$

5.1.3 3.Példa: Határozzuk meg az előbbi példa eltolódás- és normálerőfüggvényét másféle bázisfüggvény segítségével.



A potenciális energia függvénye természetesen ugyanaz. A bázisfüggvények:

$$\varphi_1 = \frac{3x}{l}, \text{ ha } x \leq \frac{l}{3}, \varphi_1 = 2 - \frac{3x}{l}, \text{ ha } \frac{l}{3} \leq x \leq \frac{2l}{3}, \varphi_1 = 0, \text{ ha } \frac{2l}{3} \leq x,$$

$$\varphi_2 = 0, \text{ ha } x \leq \frac{l}{3}, \varphi_2 = -1 + \frac{3x}{l}, \text{ ha } \frac{l}{3} \leq x \leq \frac{2l}{3}, \varphi_2 = 3 - \frac{3x}{l}, \text{ ha } \frac{2l}{3} \leq x.$$

a./ Oldjuk meg a példát ezekkel a bázisfüggvényekkel a "hagyományos" lépések felhasználásával.

$$\Pi(u) = \frac{EA}{2} \left\{ \int_0^{l/3} (c_1 \frac{3}{l} + c_2 \cdot 0)^2 dx + \int_{l/3}^{2l/3} (c_1 (-\frac{3}{l}) + c_2 \frac{3}{l})^2 dx + \int_{2l/3}^l (c_2 (-\frac{3}{l}))^2 dx \right\} -$$

$$-a \left\{ \int_0^{l/3} x c_1 \frac{3x}{l} dx + \int_{l/3}^{2l/3} x \left[c_1 \left(2 - \frac{3x}{l} \right) + c_2 \left(-1 + \frac{3x}{l} \right) \right] dx + \int_{2l/3}^l x c_2 \left(3 - \frac{3x}{l} \right) dx \right\}.$$

Az integrálás után:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{EA}{2} \left(\frac{3}{l} \right)^2 \left\{ c_1^2 \frac{l}{3} + (c_1^2 - 2c_1c_2 + c_2^2) \frac{l}{3} + c_2^2 \frac{l}{3} \right\} - a \left(c_1 \frac{(l/3)^3}{l} + c_1 \left[\left(\frac{2l}{3} \right)^2 - \left(\frac{l}{3} \right)^2 \right] - \right. \\ &- \frac{c_1}{l} \left[\left(\frac{2l}{3} \right)^3 - \left(\frac{l}{3} \right)^3 \right] - \frac{c_2}{2} \left[\left(\frac{2l}{3} \right)^2 - \left(\frac{l}{3} \right)^2 \right] + \frac{c_2}{l} \left[\left(\frac{2l}{3} \right)^3 - \left(\frac{l}{3} \right)^3 \right] + c_2 \frac{3}{2} \left[l^2 - \left(\frac{2l}{3} \right)^2 \right] - \\ &- \left. \frac{c_2}{l} \left[l^3 - \left(\frac{2l}{3} \right)^3 \right] \right) = \frac{3EA}{l} (c_1^2 - c_1c_2 + c_2^2) - \frac{al^2}{27} (c_1(1+9-7) + c_2(-\frac{9}{2} + 7 + \frac{45}{2} - 19)) = \\ &= \frac{3EA}{l} (c_1^2 - c_1c_2 + c_2^2) - a \frac{l^2}{27} (3c_1 + 6c_2). \end{aligned}$$

A minimumfeltételből:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = \frac{3EA}{l} (2c_1 - c_2) - a \frac{l^2}{9} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_2} = \frac{3EA}{l} (-c_1 + 2c_2) - a \frac{2l^2}{9} = 0.$$

Az eredmények: $c_1 = \frac{4al^3}{81EA}$, $c_2 = \frac{5al^3}{81EA}$. A közelítő elmozdulásfüggvény:

$$u(x) = \frac{4al^2x}{27EA} \text{ ha } x \leq \frac{l}{3}, \quad u(x) = \frac{al^2(l+x)}{27EA} \text{ ha } \frac{l}{3} \leq x \leq \frac{2l}{3}, \text{ és}$$

$$u(x) = \frac{5l^2a(l-x)}{27EA} \text{ ha } \frac{2l}{3} \leq x.$$

b./ Oldjuk meg ugyanezt a feladatot, ugyanezekkel a bázisfüggvényekkel, de most az egyenletrendszer közvetlen felírásával!

$$a_{11} = EA \left(\int_0^{l/3} \left(\frac{3}{l} \right)^2 dx + \int_{l/3}^{2l/3} \left(-\frac{3}{l} \right)^2 dx + \int_{2l/3}^l 0^2 dx \right) = EA \left(\frac{3}{l} + \frac{3}{l} \right) = \frac{6EA}{l},$$

$$a_{22} = a_{11}, \quad a_{12} = a_{21} = EA \int_{l/3}^{2l/3} \frac{3}{l} \left(-\frac{3}{l} \right) dx = -\frac{3EA}{l},$$

$$b_1 = \frac{3a}{l} \int_0^{l/3} x^2 dx + a \int_{l/3}^{2l/3} \left(2x - \frac{3x^2}{l}\right) dx = \frac{a}{l} \left(\frac{l}{3}\right)^3 + a \left[x^2 - \frac{x^3}{l} \right]_{l/3}^{2l/3} = \frac{al^2}{9},$$

$$b_2 = a \int_{l/3}^{2l/3} \left(-x + \frac{3x^2}{l}\right) dx + a \int_{2l/3}^l \left(3x - \frac{3x^2}{l}\right) dx = a \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{l}{3}\right)^2 + \frac{7}{l} \left(\frac{l}{3}\right)^3 \right] + a \left[\frac{3}{2} 5 \left(\frac{l}{3}\right)^2 - \frac{19}{l} \left(\frac{l}{3}\right)^3 \right]$$

$$= \frac{2al^2}{9}. \text{ Az egyenletrendszer:}$$

$$\frac{3EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{al^2}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \text{ Innen: } \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{al^3}{81EA} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Érzelkelhető, hogy ez a megoldás lényegesen gyorsabb.

Számítsuk ki a normálerő függvényét is. Felhasználva az előbb már felírt elmozdulásfüggvényt:

$$N(x) = EA \frac{du}{dx} = \frac{al^2}{27} \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{Bmatrix}, \text{ a három } l/3 \text{ hosszúságú tartományra. Az ábrán felrajzoltuk a}$$

normálerőábra közelítését és a „pontos” megoldást is.

