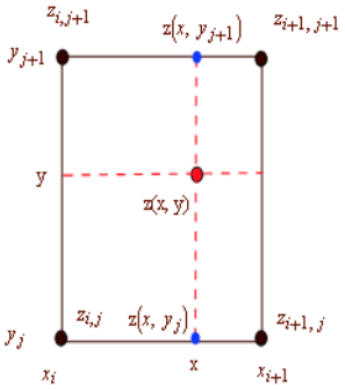
11. KÉTVÁLTOZÓS INTERPOLÁCIÓ, REGRESSZIÓ

KÉTVÁLTOZÓS INTERPOLÁCIÓ SZABÁLYOS RÁCS ALAPJÁN[1]

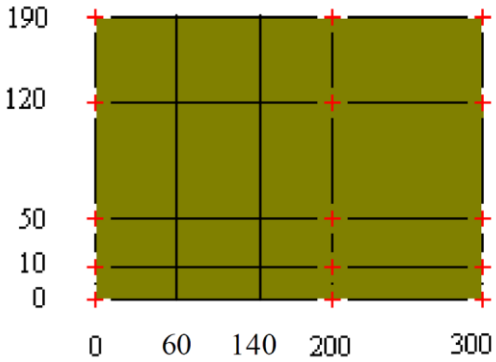
Kétváltozós esetben a legegyszerűbb interpolációs módszer a szabályos rácshálóban adott pontoknál alkalmazható bilineáris interpoláció. Az interpoláció három egyváltozós interpolációs lépésből állhat:

1) Interpoláció az $y = y_j$mentén vízszintesen: $z(x, y_j)$,
2) interpoláció az $y = y_{j+1}$ mentén vízszintesen: $z(x, y_{j+1})$,
3) végül a harmadik interpoláció az $x = állandó$mentén függőlegesen, felhasználva az előbbi két interpoláció eredményét: *z*(*x*, *y*).



Megjegyzés**:** A fentiek csak a bilineáris interpoláció lépései, azonban a *j-1*, *j+2* stb. pontok bevonásával magasabb fokú interpoláció is lehetséges.

Nézzünk egy tereprendezési példát a fentiekre! A terep magasságait egy szabályos rács pontjaiban mérésekkel határozták meg. A mérési pontok koordinátái és a mért magasságok az alábbiak (a magasságok a ***terep.txt*** fájlból beolvashatók):



$$Z = \begin{bmatrix} 135.0 & 131.7 & 136.4 & 139.8 & 119.8 \\ 134.8 & 133.0 & 139.7 & 135.5 & 120.0 \\ 124.4 & 130.0 & 140.0 & 139.2 & 122.3 \\ 131.1 & 133.8 & 138.1 & 137.7 & 121.1 \\ 133.2 & 137.1 & 143.0 & 135.0 & 123.3 \end{bmatrix}$$

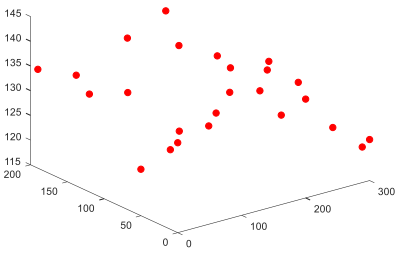
Válaszoljunk a következő kérdésekre!

1) Mekkora a terep magassága a (100,100) pontban?
2) Ábrázoljuk ebben a pontban a Ny-K irányú metszetet!
3) Mennyi földet kell hozni vagy elvinni, ha a fenti mérési eredményekkel rendelkező domborzatot 135 m magasságú sík tereppé szeretnénk átalakítani?

A megoldáshoz elő kell állítanunk a rácspontok x,y koordinátáit is és beolvasni a hozzájuk tartozó z értékeket. Figyeljünk arra, hogy a matematikai koordináta rendszer kezdőpontja a bal alsó sarokba esik, a mátrixok kezdőpontja (első sor, első oszlop) pedig a bal felső sarokba! A koordináta rendszerek eltérése miatt itt az y koordinátákat fentről lefelé kell megadjuk!

[1] Felhasználva: Paláncz Béla (2012): Numerikus módszerek példatár + előadás fóliák

```
> % Tereprendezes
> clc; clear all; close all;
> % A magasság értékek beolvasása
> Z = load('terep.txt')
> %  A rácspontok koordinátái (figyeljünk az adatok sorrendjére!)
> x=[0 60 140 200 300];
> y=[190 120 50 10 0];
> %  Rácsháló előállítása
> [X,Y]=meshgrid(x,y)
```

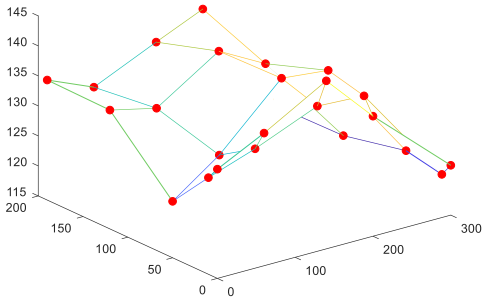


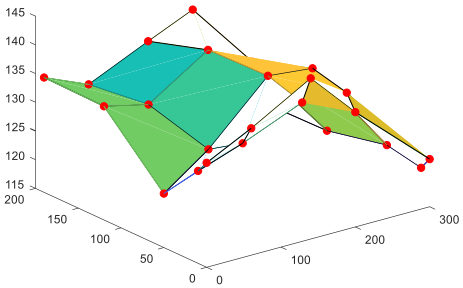
Ezzel előállt egy rácsháló x,y,z koordinátákkal. Jelenítsük meg a mért pontokat 3 dimenzióban (**plot3**)!

```
> figure(1)
> plot3(X,Y,Z,'ro','MarkerFaceColor','r')
```

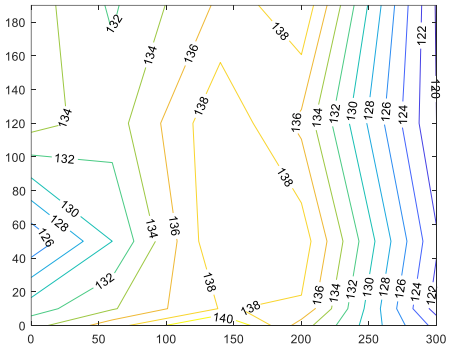
Szemléletesebben is meg lehet jeleníteni a domborzatot rácshálóként (**mesh**), vagy felületként (**surf**). Nézzük meg ezeket is!

```
> hold on; mesh(X,Y,Z)
> surf(X,Y,Z)
```





Másik gyakran használt lehetőség a szintvonalas ábrán történő megjelenítés (**contour**), ahol opcióként megadhatjuk azt is, hogy melyik szintvonalak jelenjenek meg (pl. most állítsuk be, hogy 120 és 140 méter között 2 méterenként legyenek szintvonalak), illetve bekapcsolhatjuk a szintvonalak feliratozását is a **set** paranccsal, ha két kimenettel hívjuk meg a **contour**-t, és a második kimenet tulajdonságait módosítjuk.



```
> figure(2)
> [C,h] = contour(X,Y,Z,118:2:144)
> set(h,'ShowText','on')
```

A fenti parancsok csak megjelenítésre szolgálnak, ebből még nem tudjuk meghatározni egy tetszőleges pontban a terep magasságát, ahhoz interpolációra (vagy regresszióra) lesz szükség.

1) Mekkora a terep magassága a (100,100) pontban?

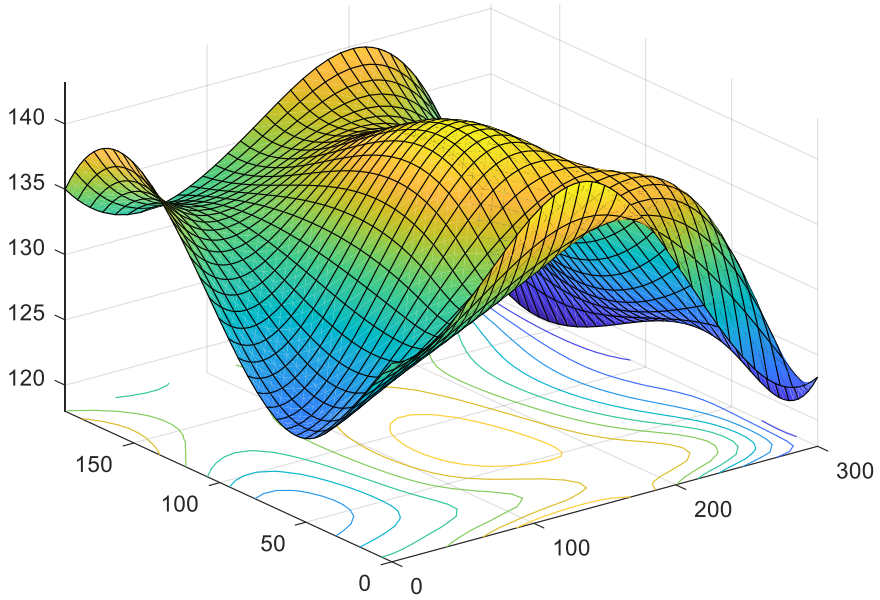
Illesszünk a pontokra interpolációs felületet! Az interpolációhoz egy független változó esetén eddig az **interp1** parancsot használtuk, most 2 független változó esetén az

interp2 parancs használható. Az **interp2** csak rácshálóban megadott pontok/adatok esetén alkalmazható (a rácspontok egyenlő távolsága nem követelmény, csak a 'cubic' módszer alkalmazásakor). Több különböző módszerrel is meghívható:

- nearest - legközelebbi szomszéd,
- linear - bilineáris interpoláció,
- spline - spline interpoláció,
- cubic - 2D köbös spline interpoláció (bicubic), csak egyenletes rácstávolság esetén alkalmazható, ellenkező esetben spline interpoláció kerül helyette alkalmazásra.

Rajzoljuk fel az interpolációs felületet az illesztett függvényt felhasználva (**fsurf** vagy **ezsurf**)!

```
>  %  spline interpoláció
>  F=@(u,v) interp2(X,Y,Z,u,v,'spline');
>  %  A terep megjelenítése
>  figure(3);
>  fsurf(F,[0,300,0,190] ,'ShowContours','on')
>  %  Ellenőrzés
>  F(0,0) % 133.2000
>  F(300,190) % 119.8000
>  % Terep magassága a 100,100 pontban?
>  F(100,100) % 137.8079
```

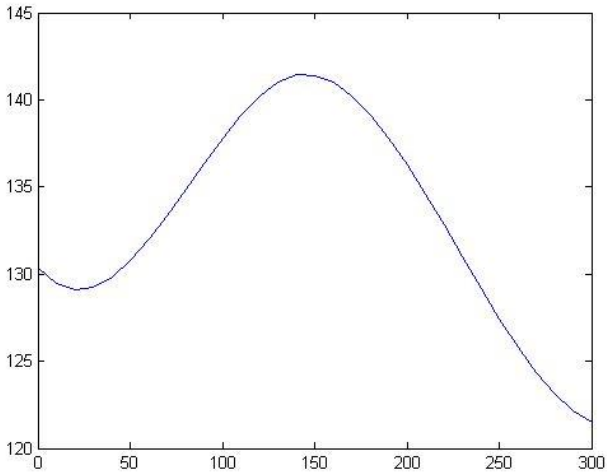


A (0,0) pontban a magasság 133.2 volt, a (300,190)-ben pedig 119.8, az interpoláció eredményeképpen visszakaptuk ezeket az értékeket. Az első kérdésre a válasz, a (100,100) pont magassága spline interpolációval 137.8 m-re adódott. Próbaképp cseréljük le a 'spline' módszert a 'nearest'-re, 'linear'-ra, hogy lássuk, mi történik ezekben az esetekben!

2) Ábrázoljuk ebben a pontban a Ny-K irányú metszetet!

A második feladat, hogy rajzoljuk fel a Ny-K irányú metszetet ebben a pontban. Ehhez vegyünk fel 50 pontot az y=100 keresztmetszetben a $P_1(0,100)$ és a $P_2(300,100)$ pontok között! Használjuk az előbb meghatározott függvényt a magasságok kiszámítására!

```
> % Ny-K irányú terepmetszet
> x0 = linspace(0,300,50)
> y0 = ones(size(x0))*100
> z0 = F(x0,y0)
> figure(4); plot(x0,z0);
```



3) Mennyi földet kell hozni vagy elvinni, ha a fenti mérési eredményekkel rendelkező domborzatot 135 m magasságú sík tereppé szeretnénk átalakítani?

Oldjuk meg a feladat utolsó részét is, hogy mennyi földet kell hozni vagy elvinni, ha a fenti mérési eredményekkel rendelkező domborzatot 135 m magasságú sík tereppé szeretnénk átalakítani. Ehhez számítsuk ki a terep és a tengerszint által határolt földtömeg mennyiségét és a 135 méteres vízszintes sík és a tengerszint által határolt földtömeg mennyiségét a megadott téglalapra. A kettő különbsége fogja megadni a tereprendezéshez szükséges föld mennyiségét. A terep által határolt földtömeg mennyiségét az alábbi kettős integrállal (**integral2**) számíthatjuk:

$$V_t = \int_0^{190} \int_0^{300} F(x,y)\ dx\ dy$$

A vízszintes z=áll. sík által határolt földtömeg mennyisége egy téglatest térfogata: $V_{sz} = z \cdot 300 \cdot 190.$

```
> %  Terep alatti földtérfogat téglalap tartományon kettős integrállal
> Vt=integral2(F,0,300,0,190) % 7.6140e+06
> %  Vízszintes sík által határol földtérfogat
> Vs=135*300*190 % 7695000
> %  A tereprendezéshez szükséges földtérfogat
> Vr=Vs-Vt % 8.0983e+04
```

Mivel a tervezett vízszintes sík által határol térfogat nagyobb volt, mint a terep alatti, ezért feltöltésre van szükség, méghozzá 80983 m^3 földre.

KÉTVÁLTOZÓS REGRESSZIÓ[2]

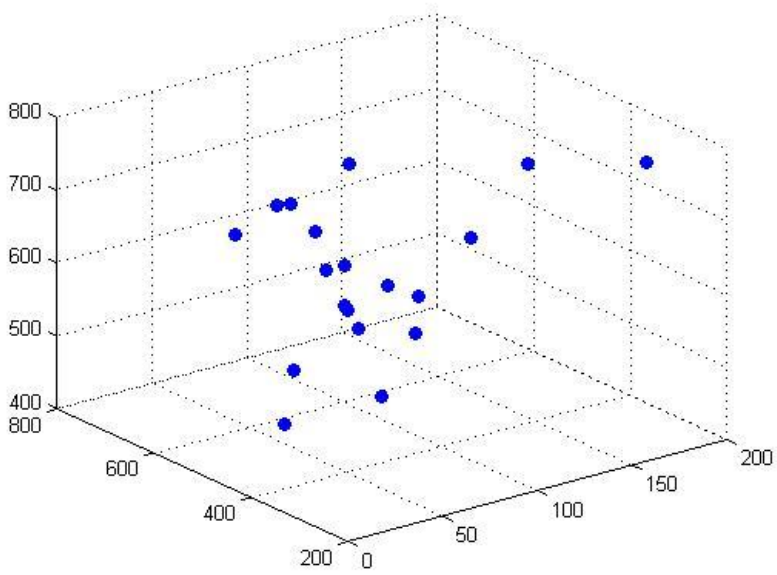
Szabálytalan elrendezésű pontok esetében jóval bonyolultabb interpolációt végezni. Ellenben a polinomiális regressziónak nem követelménye a pontok szabályos elhelyezkedése. Ez utóbbi esetben viszont ügyelni kell, hogy nagyon magas fokszámú polinomot nem szabad alkalmazni a túltanulás miatt. Az illesztő pontokban a hibaösszeg csökkenése ugyanis nem jelent feltétlenül megbízhatóbb modellt, sokszor a pontok között a felületben nagyfokú hullámzás, oszcilláció lép fel.

Nézzünk egy példát kétváltozós regresszióra, interpolációra! A magyar Duna vízgyűjtőjének területei Ausztriában és Bajorországban találhatók. Ha itt jelentős mennyiségű csapadék esik, akkor a Dunán árhullám vonul le. Feladatunk a budapesti tetőző vízállás előrejelzése a következő két adat alapján:

x: az árhullámot kiváltó csapadék, amely 15 bajor illetve osztrák csapadékjelző állomás adatainak középértéke [mm];
y: a Duna vízállása Budapestnél az árhullámot kiváltó esőzések kezdetekor [cm];
z: a becsülendő érték Budapestnél, az árhullám tetőzéséhez tartozó vízszint [cm].

Az eddig mért adatokat az alábbi táblázat tartalmazza (az adatok az arhullam.txt file-ban elérhetőek), ebben egy sor egy adott időponthoz tartozó x, y, z értékeket jelenti:

58	405	590
52	450	660
133	350	780
179	285	770
98	330	710
72	400	640
72	550	670
43	480	520
62	450	660
67	610	690
64	380	500
33	460	460
57	425	610
62	560	710
54	420	620
48	620	660
68	390	620
74	350	590
95	570	740



Kérdés:

- Ha az osztrák és bajor vízgyűjtő területen átlagosan 100 mm csapadék esett, ugyanekkor a Duna vízszintje Budapesten 400 cm-nél volt, akkor mekkorára várható az árhullám tetőzése Budapesten?

[2] Felhasználva: Paláncz Béla (2012): Numerikus módszerek példatár + előadás fóliák

Illesszünk egy másodfokú regressziós polinomot a pontokra, és ennek felhasználásával adjunk becslést a várható tetőzési magasságra! Illesszünk felületet a pontokra interpolációval is, lineáris és spline interpolációt alkalmazva és ezek alapján is becsüljük meg az árhullám várható tetőzését!

Először olvassuk be és ábrázoljuk az adatokat! 3D szórt pontokat a **plot3** vagy a **scatter3** paranccsal tudunk megjeleníteni.

```
> clc; clear all; close all;
> xyz=load('arhullam.txt')
> x=xyz(:,1); % árhullámot kiváltó csapadék [mm]
> y=xyz(:,2); % Duna vízállása Budapestnél az esőzés kezdetekor [cm]
> z=xyz(:,3); % a becsülendő érték, árhullám tetőzése Budapestnél [cm]
> % Ábrázolás
> figure(1);clf;
> scatter3(x,y,z,'filled')
```

Kétváltozós esetben regressziós síkot a következő módon írhatunk fel:

$$z = f(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y$$

A másodfokú regressziós polinom általános felírása pedig a következő:

$$z = f(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 xy + c_6 y^2$$

Harmadfokú regressziós polinom:

$$z = f(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 xy + c_6 y^2 + c_7 x^3 + c_8 x^2 y + c_9 x y^2 + c_{10} y^3$$

Hasonlóképp negyed-, ötöd- stb. fokú polinomokat is felírhatnánk, de a túltanulás jelensége miatt 5. fokúnál magasabbat nem szoktak alkalmazni.

Most a feladatban másodfokú polinomiális felületet kell illesztenünk. *n* pont esetén *n* darab lineáris egyenletet írhatunk fel, és 6 meghatározandó paraméterünk van. A fölös mérések száma: *n-6*. Az egyenletrendszer mátrixos alakban ($A \cdot c = b$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & {x_1}^2 & x_1 y_1 & {y_1}^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & {x_2}^2 & x_2 y_2 & {y_2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & {x_n}^2 & x_n y_n & {y_n}^2 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_6 \end{pmatrix}; \; b = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Mivel a feladatban jóval több, mint 6 adatunk van, ezért egy túlhatározott lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk, a legkisebb négyzetek módszerével minimalizálva a maradék ellentmondásokat. A feladat megoldása lényegében ugyanúgy megy, mint egyváltozós esetben.

```
> n = length(x) % 19
> A = [ones(n,1) x y x.^2 x.*y y.^2]
> c = A\z
```

A megoldást megkaphatjuk a matlab egy másik beépített függvényét, a **regress**-t használva is, ekkor az együtthatók mellett megkaphatjuk a 95 százalékos konfidencia intervallumukat és a maradék ellentmondásokat is

```
> [c int95 err]=regress(z,A)
```

Definiáljuk a regressziós felületet függvényként, és rajzoljuk be az illesztett felület az ábrába! Ábrázoljuk szintvonalakkal is a felületet! Becsüljük meg a várható árhullám tetőzését 100 mm csapadék és 400 cm-es vízszint esetén!

```
> f=@(x,y) c(1)+c(2)*x+c(3)*y+c(4)*x.^2+c(5)*x.*y+c(6)*y.^2
> hold on;
> fsurf(f,[min(x),max(x),min(y),max(y)])
```

Forgassuk el kicsit az ábrát a Rotate 3D paranccsal a grafikus ablakban, hogy jobban látszódjon az illeszkedés. Ábrázoljuk az illesztett *f* függvényt szintvonalas ábrán is! Függvény esetében a **contour** parancs nem használható, hanem vagy az **ezcontour** vagy az **fcontour**. A Matlab 2017-es verziójától az **ezcontour** használata nem javasolt, hanem helyette az **fcontour**, viszont ez utóbbi esetében egyelőre nem működik a szintvonalak feliratozása, úgyhogy egyelőre maradjunk az előbbinél. Ha a feliratokat be szeretnénk kapcsolni, akkor a szintvonalas ábrát el kell mentin egy változóba, és utána a **set** parancs segítségével állíthatjuk be a feliratozást ('Show','on'), illetve itt adhatjuk meg, hogy melyik szintvonalak jelenjenek meg ('LevelList',450:50:800). Figyeljünk, hogy a sima contour parancs esetében a ('ShowText','on') kapcsolót kellett beállítani, itt ez eltér ettől.

```
> figure(2); hold on;
> h = ezcontour(f, [min(x) max(x) min(y) max(y)])
> set(h,'Show','on','LevelList',450:50:800)
```

Az utolsó paranccsal beállítottuk, hogy a szintvonal feliratai is jelenjenek meg, és, hogy az alap 100 m helyett 50 m-ként rajzoljon szintvonalakat.

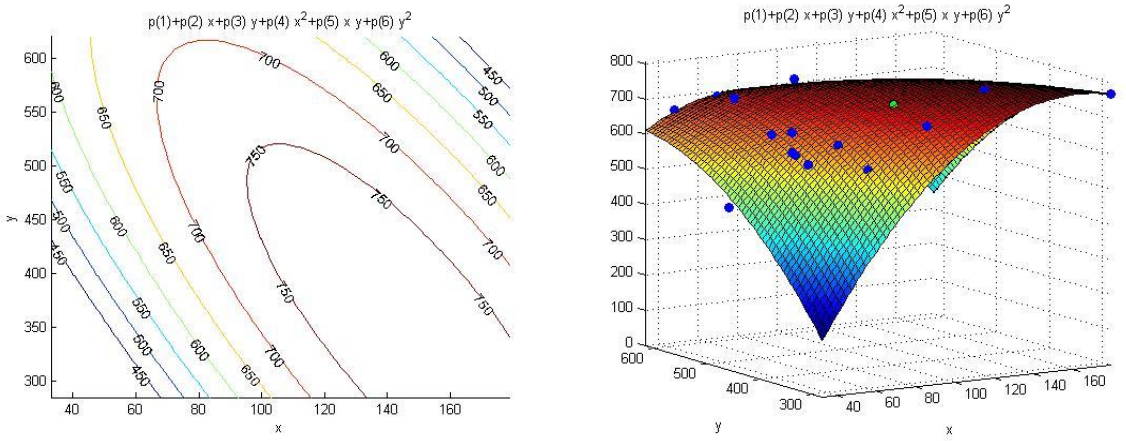
Ugyanez **fcontour** használatával is megoldható, szintvonal feliratozás nélkül (mivel az R2018a Matlab verziónál egyelőre nincs lehetőség feliratozásra).

```
> fcontour(f, [min(x) max(x) min(y) max(y)],'LevelList',450:50:800)
```

Az árhullám várható tetőzése 100 mm csapadék és 400 cm-es vízszint esetén a regressziós polinommal végzett becslés alapján 738 cm lesz:

```
> % Előrejelzés
> zpol = f(100,400) % 737.8771
```

Az első ábránkba, ahol az adatokat megjelenítettük rajzoljuk be az illesztett felületet 3D-ben és az előre jelzett értéket is. Forgassuk el kicsit az ábrát a Rotate 3D paranccsal a grafikus ablakban, hogy jobban látszódjon az illeszkedés.



KÉTVÁLTOZÓS INTERPOLÁCIÓ SZABÁLYTALAN ELRENDEZÉSŰ PONTOK ESETÉN

Szabálytalan elrendezésű pontok esetében többféle interpolációs módszert szoktak alkalmazni. Lehet ez pl.

- a legközelebbi szomszéd módszere, amikor a pont a hozzá legközelebb eső pont értékét kapja
- krigelés, amikor távolságot is figyelembe vesszük valamilyen súlyozással
- radiál-bázis függvények, amikor több bázisfüggvényt illesztünk a pontokhoz
- szabályos geometriai elemekre bontás.

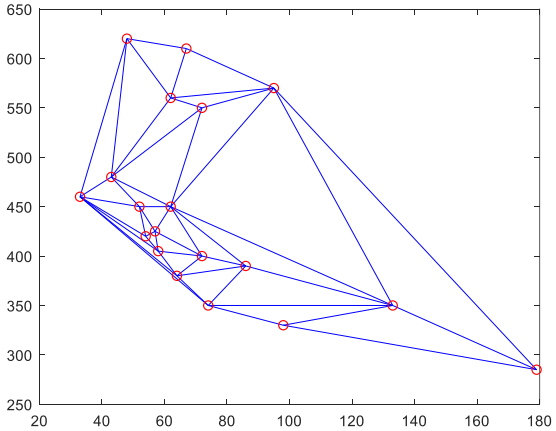
A Matlab beépített függvényei között a szabályos geometriai elemekre bontást találjuk meg, a legközelebbi szomszéd mellett. A **griddata** függvény esetében is több interpolációs módszert lehet alkalmazni:

- nearest: legközelebbi szomszéd interpoláció
- linear: háromszög alapú lineáris interpoláció, ekkor minden háromszögre egy síkot illesztünk (TIN model, triangular irregular network)
- cubic: háromszög alapú köbös interpoláció ('bicubic spline' interpoláció).
- v4 - biharmonikus spline interpoláció (ez nem háromszögelésen alapul)

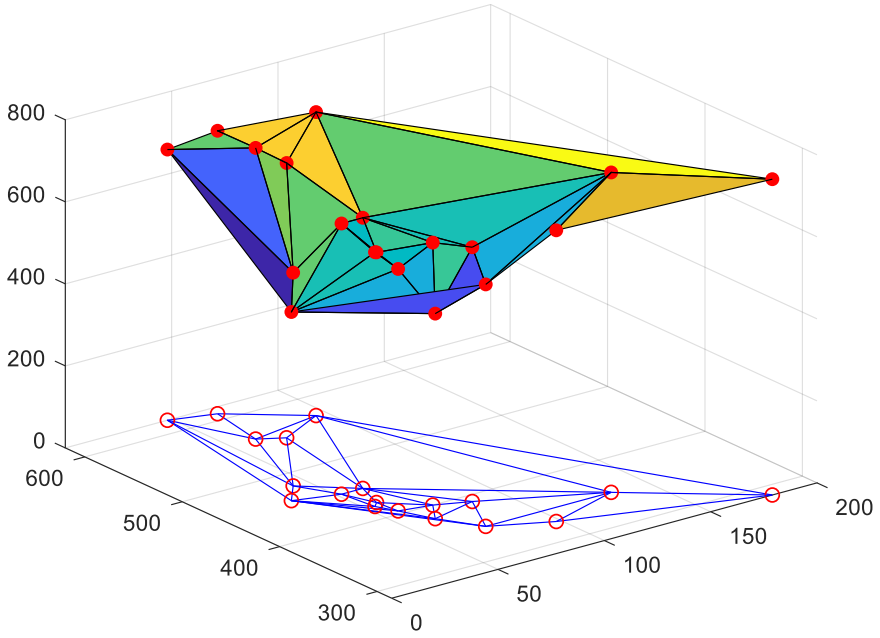
A szabályos geometriai elemekre bontás alapja a Delaunay háromszögelés, ahol úgy veszik fel a szórt pontok alapján a háromszögeket, hogy egy háromszög köré írt körbe ne kerüljön másik pont. Előnye ennek a háromszögelésnek, hogy mivel maximalizálja a háromszög legkisebb szögét, ezáltal kerüli a keskeny háromszögeket. Néhány alkalmazási területe: domborzatmodellezés (segítségével könnyen számíthatók az esés-, kitettség viszonyok, meghatározhatóak a szintvonalak), illetve a végeselem-módszerben is gyakran használják, mivel könnyen előállítható.

A következő ábrák a Delaunay háromszögelését mutatják az előző példa pontjait használva.

```
> % delaunay háromszögelés
> tri = delaunay(x,y) % Delaunay háromszögek létrehozása a pontok x,y
  koord. alapján
> figure();
> triplot(tri,x,y) % Delaunay háromszögek kirajzolása
> hold on; plot(x,y,'ro');
```



```
> figure();
> trisurf(tri,x,y,z); % 3D ábrázolása a háromszögeknek
> hold on;
> scatter3(x,y,z,'ro','filled');
> plot(x,y,'ro');
> triplot(tri,x,y);
```



- Mekkora lesz az árhullám várható tetőzése Budapesten háromszög alapú lineáris és köbös interpolációval, ha a lehullott csapadék 100 mm és az aktuális vízállás Budapestnél 400 cm?

Ahhoz, hogy válaszolni tudjunk a fenti kérdésekre, először definiálni kell az interpolációs függvényeket!

```
> zlin = griddata(x,y,z,100,400,'linear') % 724.7377
> zkob = griddata(x,y,z,100,400,'cubic') % 735.3939
```

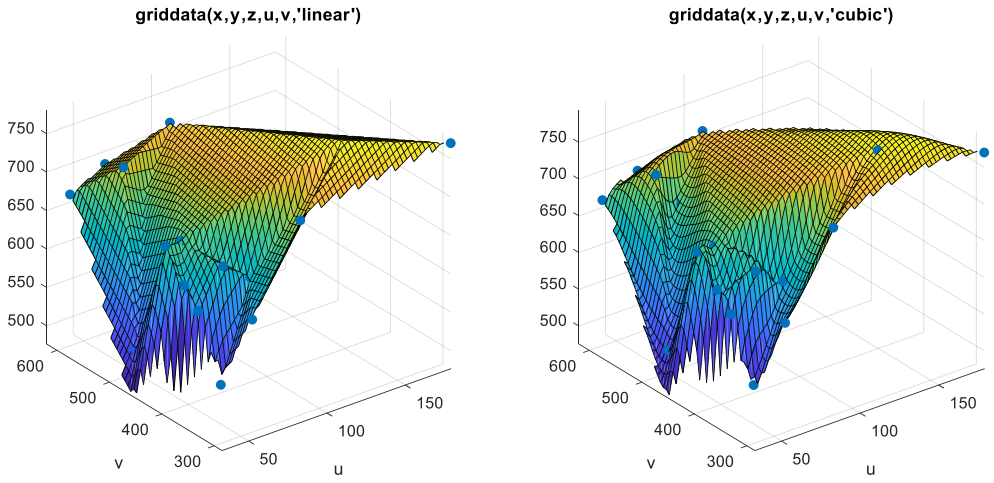
A polinom illesztéssel végzett előrejelzés alapján a tetőzés 738 cm-en várható, a lineáris interpoláció alapján 725 cm-en, a köbös alapján pedig 735 cm-en. Függvényként is definiálhatjuk a fentieket, és akkor tetszőleges pontra könnyen meghívhatjuk, pl. a köbös interpolációra:

```
> % Interpolációs függvény definiálása
> flin = @(u,v) griddata(x,y,z,u,v,'linear')
> fkob = @(u,v) griddata(x,y,z,u,v,'cubic')
> flin(100,400) % 724.7377
> fkob(100,400) % 735.3939
```

Ábrázoljuk a függvényeket térben. Sajnos az fsurf a Matlab R2018a verziójában nem jelenítette meg a függvényeket, csak a korábbi verziókból itt még megmaradt ezsurf függvény.

```
> figure(); subplot(1,2,1)
> scatter3(x,y,z,'filled'); hold on;
> ezsurf(flin,[min(x),max(x),min(y),max(y)])
```

```
> subplot(1,2,2)
> scatter3(x,y,z,'filled'); hold on;
> ezsurf(fkob,[min(x),max(x),min(y),max(y)])
```



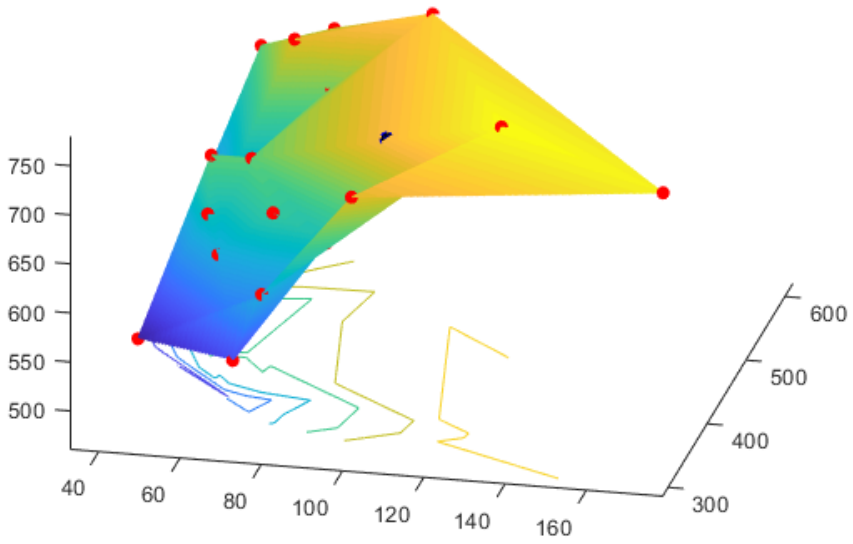
Egy másik térbeli ábrázolási mód sűrű rácshálóval illetve szintvonalakkal történhet. Ehhez először egy sűrű rácsot kell definiálnunk és kiszámolni a rácspontokban az interpolált függvény értékeket.

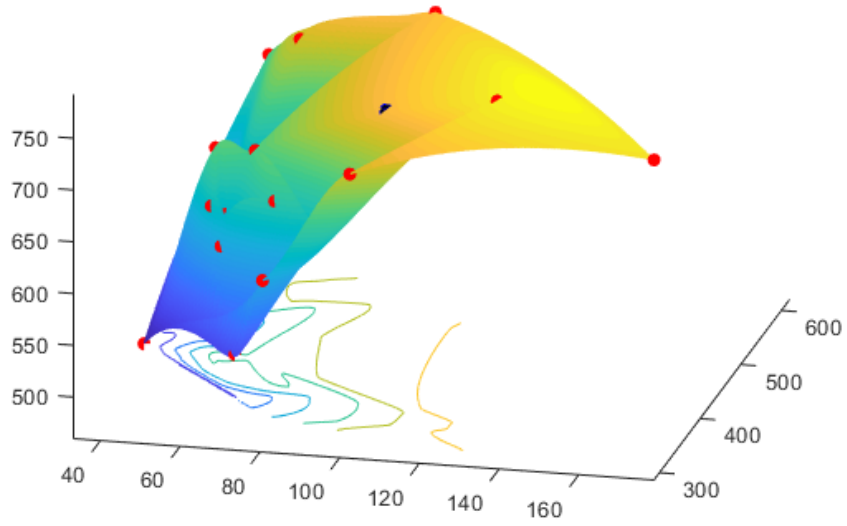
```
> % 1000x1000-as rács előállítása
> xx = linspace(min(x),max(x),1000);
> yy = linspace(min(y),max(y),1000);
> [X, Y] = meshgrid(xx,yy);
> ZL = flin(X,Y);
> ZC = fkob(X,Y);
```

Az ábrázoláshoz használhatjuk a **mesh** parancsot, ami rácshálóban megadott felületet jelenít meg, vagy a **meshc** parancsot, ami a szintvonalakat is alárajzolja. használjuk most ez utóbbit!

```
> figure(); hold on;
> scatter3(x,y,z,'ro','filled');
> meshc(X,Y,ZL)
> plot3(100,400,zlin,'bo','MarkerFaceColor','k')
>
> figure(); hold on;
> scatter3(x,y,z,'ro','filled');
> meshc(X,Y,ZC)
> plot3(100,400,zkob,'bo','MarkerFaceColor','k')
```

A következő két ábrán látszik, hogy a második, a köbös interpoláció, simább felületet eredményezett, a szintvonalak sem olyan szögletesek.





A FEJEZETBEN HASZNÁLT ÚJ FÜGGVÉNYEK

diff	-	vektor elemeinek különbsége, közelítő numerikus derivált, szimbolikus derivált számítása
cumsum	-	vektor elemeinek folyamatos összegzése
meshgrid	-	2-3 dimenziós rács előállítása vektorban tárolt x,y(,z) koordinátákból
plot3	-	Pontok 3D megjelenítése
mesh, meshc	-	Rácshálóban adott 3D pontok megjelenítése térbeli rácsként, a parancsot c-vel kiegészítve a szintvonalakat is alárajzolja
surf	-	Rácshálóban adott 3D pontok megjelenítése színezett felületként (kitöltött térbeli rács)
contour	-	Rácshálóban adott 3D pontok alapján szintvonalak rajzolása

set	-	grafikus objektum (pl. h) megadott tulajdonságainak beállítása, pl. szintvonalak feliratozása (set(h,'ShowText','on') contour parancs esetén, vagy set(h,'Show',on) ezcontour esetén)
interp2	-	2D interpoláció rácshálóban adott pontokból tetszőleges pontra (módszer: lineáris – 'linear', legközelebbi szomszéd - 'nearest', spline inetrpoláció – 'spline', 2D köbös spline (bicubic) – 'cubic')
integral2	-	Kettős integrál számítása numerikusan, szabályos téglalap tartományon
scatter3	-	Szórt pontok 3D megjelenítése
regress	-	Többváltozós lineáris regresszió legkisebb négyzetek módszerével
fsurf, ezsurf	-	3D felületek kirajzolása megadott függvény alapján
fcontour, ezcontour	-	Szintvonalak kirajzolása függvény alapján
griddata	-	Interpoláció szórt pontok alapján tetszőleges pontra vagy rácsra (módszer: háromszög alapú lineáris interpoláció (TIN modell) – 'linear', legközelebbi szomszéd - 'nearest', háromszög alapú köbös interpoláció – 'cubic', biharmonikus spline inetrpoláció – 'v4')